北京大学教材

# 数学分析新讲

## 第一册

张筑生　编著



北京大学出版社

# 内 容 提 要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义。改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养。书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用（包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律等）。从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排处理，使传统的材料以新的面貌出现。书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）。

全书共三册。第一册的内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用；第二册的内容是：一元微积分的进一步讨论，多元微积分；第三册的内容是：曲线、曲面与微积分，级数与含参变元的积分等。

本书可作为大专院校数学系基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科学工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书。

北京大学教材



数学分析新讲

第一册

张筑生 编著

责任编辑：刘 勇

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168毫米　32开本　10印张　250千字

1990年1月第一版　1990年1月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN 7-301-00846-5/O·153

定价：4.00元

# 序　　言

微积分是大学数学教育中最重要的基础课。经过三百多年的发展，这一课程的基本内容已经定型，并且已经有了为数众多的教材（其中不乏优秀之作）。但是，人们仍然感到微积分的教和学都不是一件容易的事。究其原因，恐怕与这门学科本身的历史进程有关。

微积分这座大厦是从上往下施工建造起来的。微积分诞生之初就显示了强大的威力，解决了许多过去认为是高不可攀的困难问题，取得了辉煌的胜利。创始微积分的大师们着眼于发展强有力的方法，解决各式各样的问题。他们没有来得及为这门新学科建立起经得起推敲的严格的理论基础。在以后的发展中，后继者才对逻辑的细节作了逐一的修补。重建基础的细致工作当然是非常重要的，但也给后世的学习者带来了不利的影响。微积分本来是一件完整的艺术杰作，现在却被拆成碎片，对每一细部进行详尽的、琐细的考察。每一细节都弄得很清楚了，完整的艺术形象却消失了。今日的初学者在很长一段时间里只见树木不见森林。在微积分创始时期刺激了这一学科飞速发展的许多重要的应用问题，今日的初学者却几乎一无所知。因为这些应用往往涉及到微分方程，而微分方程则要等待到漫长的学究式的考察完成之后再到另一门课程中去学习。P.Lax，S.Burstein 和 A.Lax 在他们合著的《微积分及其应用与计算》(有人民教育出版社出版的中译本)序言中批评道："传统的课本很象一个车间的工具帐，只载明这儿有不同大小的锤子，那儿有锯子，而刨子则在另一个地方，只教给学生每种工具的用法而很少教学生将这些工具一起用于构造某个真正有意义的东西"。

虽然越来越多的人认识到分析教学中的这一缺憾，但要改变这一状况也并不容易的：因为数学分析在漫长的岁月中已形成一个庞大的知识体系，牵一发而动全身，任何改动都必须作全局通盘考虑，稍有疏忽就难免顾此失彼。

本书的前身是北京大学数学系《数学分析》基础课教学改革实验讲义。改革方案的基调是：强调启发性；强调数学内在的统一性；重视学生能力的培养。

我们希望尽可能早一点让初学者对分析的全貌有一个轮廓的印象，尽可能早一点让初学者学会用分析的方法去解决问题。为了达到这一目的，我们在准备好基础之后，不拘泥于每一细节的深入详尽的讨论，也不追求最一般的条件，而是尽快地展示分析的主要概念（导数、原函数、积分、微分方程）并应用这些概念去解决一些重要而有趣的问题。等到学生对全貌有了初步的印象之后，再具体进行涉及细节的讨论。根据这样的方案进行试验，学生在第一学期就能掌握一元函数微积分的基本理论和方法，能用初等的微分方程解应用问题，并能了解历史上应用微积分的一些最著名的例子。

虽然《数学分析》课程的基本内容已经定型，我们仍然尝试加入了一些在理论上或应用上有重要意义，经适当处理之后又能放入基础课的材料。例如：利用微分形式的积分证明著名的Brouwer不动点定理；利用Fourier级数的封闭性方程去解等周问题，等等。

实数理论的教学，历来是一个棘手的问题。从逻辑顺序来说，这一部分材料应该摆在开头的地方，而初学者在一开始时又很难接受这些内容。我们考虑再三，最后采取的折衷方案是：在讲义中较详细地写出实数理论（不过分学究气），但在讲课时却只扼要地说明实数的连续性。可以基于学生已有的关于无尽小数的知识，概述一下讲义中关于确界原理的证明——主要是说明怎样构造一个无尽小数，它的各不足近似值都是下界，而过剩近似

值都不是下界。至于所构造的数应是集合的下确界。这一事实容易为学生所接受。讲授“实数”这一章时，甚至可以略去§1、§2和§3的大部分内容，只简要地介绍上、下确界的概念，然后重点讲解§4与§5。讲义中的详细内容可供学生经过一段时间的学习之后再回过头来复习时用，那时他们就可以进一步理解较细致的论述了。

从教学改革实验到最后整理写成本书，在整个过程中作者得到了北京大学数学系领导与同事们多方面的关心与帮助。在此谨向李忠、邓东皋、姜伯驹、方企勤、敖海龙等同志致谢。

美国加州大学伯克莱分校的项武义教授关心祖国的教育事业。作者曾就教学改革问题向他请教，获益实多。借此机会谨向项先生表示衷心感谢。

张筑生

1988年12月于北京大学

# 符 号 说 明

本书所采用的符号都是很普通的。例如

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 $n$ 个实数中最大的一个，而

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

则表示这些实数中最小的一个。又如，

$$[x]$$

表示实数 $x$ 的整数部分，也就是不超过 $x$ 的最大整数。我们还以符号



表示证明完毕，或者要证之事很显然，不再详细写出了。其他符号将在第一次出现时予以说明。

# 目　录

## 预篇　准备知识



## 第一篇　分析基础

## 第二篇 微积分的基本概念及其应用

# 第二册　目　　录

## 第三篇　一元微积分的进一步讨论

## 第十二章 多元微分学



## 第十三章 重积分

# 第三册　目　　录

## 第五篇　曲线、曲面与微积分



## 第六篇　级数与含参变元的积分

# 预　篇

## 准　备　知　识

本篇为课程的学习作准备，先介绍一些在数学中广泛采用的术语和记号，然后介绍几个启发微积分基本概念的典型问题。

## §1 集合与逻辑记号

集合这一概念描述如下：一个集合是由确定的一些对象汇集的总体。组成集合的这些对象被称为集合的元素。$x$ 是集合 $E$ 的元素这件事，用记号表示为

$x \in E$（读作：$x$ 属于 $E$）；

$y$ 不是集合 $E$ 的元素这件事记为

$y \notin E$（读作：$y$ 不属于 $E$）。

如果集合 $E$ 的任何元素都是集合 $F$ 的元素，那么我们就说 $E$ 是 $F$ 的子集合，记为

$E \subset F$（读作：$E$ 包含于 $F$）①

或者

$F \supset E$（读作：$F$ 包含 $E$）。

如果集合 $E$ 的任何元素都是集合 $F$ 的元素并且集合 $F$ 的任何元素也都是集合 $E$ 的元素（即 $E \subset F$ 并且 $F \subset E$），那么我们就说集合 $E$ 与集合 $F$ 相等，记为

$$E = F.$$

为了方便起见，我们引入一个不含任何元素的集合——空集合 $\varnothing$。我们还约定：空集合 $\varnothing$ 是任何集合 $E$ 的子集合，即

$$\varnothing \subset E.$$

---

① 有些作者用符号"$\subset$"表示"真包含"关系，但在现代数学文献中广泛采用的是另一种约定："$\subset$"表示一般的包含关系（不限于真包含）。本书采用这后一种约定。这样约定之后，当需要表示"真包含"关系时，反而要用稍累赘的记号"$\subsetneqq$"。但毕竟需要这样做的情形是很少的，没有带来多少不方便。

全体自然数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是最常遇到的集合，我们约定分别用空体字母 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbb{N}$　表示全体自然数的集合；

$\mathbb{Z}$　表示全体整数的集合；

$\mathbb{Q}$　表示全体有理数的集合；

$\mathbb{R}$　表示全体实数的集合；

$\mathbb{C}$　表示全体复数的集合。

我们还把非负整数、非负有理数和非负实数的集合分别记为 $\mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Q}_+$ 和 $\mathbb{R}_+$。显然有

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

和

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}_+\subset\mathbb{Q}_+\subset\mathbb{R}_+.$$

集合可以通过罗列其元素或者指出其元素应满足的条件等办法来给出。例如：

$$\{1,2,3,4,5\}$$

表示由1，2，3，4，5这五个数字组成的集合，而

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$$

表示由大于 3 的实数组成的集合。又如：2 的平方根的集合可以记为

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2=2\}$$

或者

$$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}.$$

在本课程中经常要遇到以下形式的实数集的子集：

闭区间

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$

开区间

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\};$$

左闭右开区间

$$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\};$$

左开右闭区间

$$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\},$$

这里$a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$。

设$E$和$F$是任意两个集合。由$E$的所有元素与$F$的所有元素合在一起组成的集合称为是这两个集合的并集，记为$E\cup F$。由$E$和$F$共同的元素组成的集合称为是两个集合的交集，记为$E\cap F$。由属于$E$但不属于$F$的元素组成的集合称为是这两个集合的差集，记为$E\backslash F$。

以下介绍几个逻辑符号。设$\alpha$和$\beta$是两个判断。如果当$\alpha$成立时，$\beta$也就一定成立，我们就说$\alpha$能够推出$\beta$，或者$\alpha$蕴含$\beta$，记为

$$\alpha\Rightarrow\beta.$$

例如

$$x\in\mathbf{R}\Rightarrow x^2\geqslant 0.$$

如果$\alpha\Rightarrow\beta$并且$\beta\Rightarrow\alpha$，我们就说$\alpha$与$\beta$等价，或者说$\alpha$与$\beta$互为充分必要条件，记为$\alpha\Leftrightarrow\beta$。例如，对于$x\in\mathbf{R}$，我们有

$$x>0\Longleftrightarrow\frac{1}{x}>0.$$

设$\alpha(x)$是涉及$x\in E$的一个判断，我们用记号

$$(\exists x\in E)(\alpha(x))\text{或者}\exists x\in E:\alpha(x)$$

表示“存在$x\in E$使得$\alpha(x)$成立”，例如

$$\exists n\in\mathbf{N}:n^2-4n+4>0.$$

设$\beta(x)$是涉及$x\in E$的一个判断，我们用记号

$$(\forall x\in E)(\beta(x))$$

或者

$$\beta(x),\quad\forall x\in E$$

表示“对一切$x\in E$都有$\beta(x)$成立”，例如

$$(\forall x\in\mathbf{R})(x^2\geqslant 0)$$

或者

$$x^2 \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

## §2 函数与映射

人们常说："变量 $y$ 随着变量 $x$ 的变化而变化"或者"变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数"。这些说法的确切含义是什么呢？这就是说：变量 $x$ 所取的任何一个确定的值，决定了变量 $y$ 的唯一确定的值。或者说：对变量 $x$ 的任何一个值，有变量 $y$ 的唯一确定的值与之对应。采用集合论的术语对这些说法作进一步的概括，就得到映射的概念。设 $D$ 和 $E$ 都是集合。我们把 $D$ 的元素与 $E$ 的元素之间的对应关系 $f$ 叫做一个*映射*，如果按照这对应关系，对集合 $D$ 中的任何一个元素 $\xi$，有集合 $E$ 中的唯一的一个元素 $\eta$ 与之对应。$f$ 是从 $D$ 到 $E$ 的一个映射这件事，通常记为

$$f: D \longrightarrow E.$$

按照对应关系 $f$，由 $D$ 中的元素 $\xi$ 所决定的 $E$ 中的唯一元素 $\eta$ 记为 $f(\xi)$。有时候，我们用记号 $\xi \mapsto \eta$ 表示元素之间的对应。例如，设 $D = \mathbf{R}$，$E = \mathbf{R}$，而映射 $f: D \to E$ 定义为 $f(x) = x^2$，则这映射规定了元素之间这样的对应关系

$$f: x \longmapsto x^2.$$

设 $f: D \to E$ 是一个映射，$A \subset D$，$B \subset E$。我们把集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} (\subset E)$$

叫做集合 $A$ 经过映射 $f$ 的*象集*，并把集合

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \quad (\subset D)$$

叫做集合 $B$ 关于映射 $f$ 的*原象集*。

如果 $D \subset \mathbb{R}$，$E = \mathbb{R}$，那么从 $D$ 到 $E$ 的映射就是通常的一元函数。但映射的概念远比这广泛。在以后的学习中，将会遇到更广泛的映射的例子。但在开始的时候，我们主要关心的是函数。

**例1** 圆的面积 $S$ 是半径 $r$ 的函数：

$$S=\pi r^2.$$

在这里，$D=\mathbf{R}_+, E=\mathbf{R}$，对应关系由一个代数运算式子来表示。

例2 自由落体经过的路程 $s$ 是时间 $t$ 的函数：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

这里的函数关系也能用一个代数式子来表示。

例3 有一些函数关系具有"分段"的表达形式，例如在技术科学中有重要应用的海维赛德(Heviside)函数(又称符号函数)可以表示为

$$H(t)=\begin{cases}-1, & \text{如果 } t<0,\\ 0, & \text{如果 } t=0,\\ 1, & \text{如果 } t>0.\end{cases}$$

例4 狄里克莱(Direchlet)函数定义如下：

$$D(t)=\begin{cases}1, & \text{如果 } t \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{如果 } t \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

例5 在自动记录气压计中，有一个匀速转动的圆柱形记录鼓。印有坐标方格的记录纸就裹在这鼓上。记录鼓每24小时转动一周。气压计指针的端点装有一支墨水笔，笔尖接触着记录纸。这样，经过24小时之后，取下的记录纸上就描画了一条曲线。这条曲线表示气压 $p$ 随时间 $t$ 变化的函数关系。

例6 设 $D=\mathbf{N}, E=\mathbf{R}$。一个映射

$$f:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{R}$$

意味着用自然数编号的一串实数：

$$x_1=f(1), x_2=f(2), \cdots, x_n=f(n), \cdots.$$

这样的一个映射，或者说这样的以自然数编号的一串实数 $\{x_n\}$，被称为实数序列。

设 $f:D\to E$ 是一个映射，$g:G\to H$ 也是一个映射。如果 $f(D)\subset G$，那么从 $\xi\in D$ 开始，相继经过 $f$ 和 $g$ 的作用，就得到 $g(f(\xi))$。这样的对应关系

$$\xi \longmapsto g(f(\xi))$$

也是一个映射。我们把这映射称为 $g$ 与 $f$ 的复合，记为$g\circ f$。简言之，映射 $g$ 与映射 $f$ 的复合定义为

$$g\circ f: D\longrightarrow H,$$
$$\xi \longmapsto g(f(\xi)).$$

**例7** 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$定义为 $f(x)=x^m$，则有

$$f\circ f(x)=f(f(x))=(x^m)^m=x^{m^2}.$$

**例8** 考察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sin x$。我们有

$$g\circ f(x)=\sin x^2,\ f\circ g(x)=\sin^2 x.$$

一般说来，对于映射 $f$ 和 $g$，两种顺序的复合映射 $g\circ f$ 和 $f\circ g$不一定都有定义，即使有定义也不一定相同。让我们再看两个例子。

**例9** 考察函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$和$g(x)=x^2+10$。我们看到，$g\circ f$对$x\leqslant 1$有定义，而$f\circ g$却没有定义。

**例10** 考察函数$f(x)=x^2$和$g(x)=x+2$。这两个函数都在整个数轴R上有定义，因而$g\circ f$ 和 $f\circ g$ 也都在R上有定义。但我们有：

$$g\circ f(x)=x^2+2,$$
$$f\circ g(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4.$$

## §3 连加符号Σ与连乘符号Π

在数学中，常遇到一连串的数相加或者一连串的数相乘，例如$1+2+\cdots+n$ 或者 $m(m-1)\cdots(m-k+1)$等。为简便起见，人们引入连加符号Σ与连乘符号Π：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2\cdots x_n.$$

这里的指标 $i$ 仅仅用以表示求和或求乘积的范围，把 $i$ 换成别的符号 $j$，$k$ 等，也仍然表示同一和或同一乘积，例如

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

人们通常把这样的指标称为"哑指标"。

我们举几个例子说明连加符号$\sum$与连乘符号$\prod$的应用。

例1　阶乘 $n!$ 的定义可以写成

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

例2　二项式定理可以表示为

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

这里

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

例3　$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{ 项}} = n.$

例4　我们来计算 $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2)$.

这和式表示

$$(1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \cdots + (n^2 - (n-1)^2).$$

因而

$$\sum_{k=1}^{n}(k^p-(k-1)^p)=n^p.$$

数的运算满足交换律、结合律以及(乘法对加法的)分配律。据此我们得到以下的运算法则:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)&=(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\lambda c_i)&=\lambda c_1+\cdots+\lambda c_n=\lambda(c_1+\cdots+c_n)\\&=\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i.\end{aligned}$$

**例5** 我们有恒等式

$$k^2-(k-1)^2=2k-1.$$

对于 $k=1,2,\cdots,n$,将相应的恒等式加起来,我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1,$$

$$n^2=2\sum_{k=1}^{n}k-n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

我们得到了熟悉的公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

**例6** 由恒等式

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3)=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1,$$

$$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)+n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

类似地，由恒等式

$$k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}(k^4-(k-1)^4)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3-6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1,$$

$$n^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3-(2n^3+3n^2+n)+2(n^2+n)-n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

采用类似的推理方式，利用数学归纳法可以证明以下结论：

$\sum_{k=1}^{n}k^p$ 可以表示成 $n$ 的 $p+1$ 次多项式，其最高项系数为 $\frac{1}{p+1}$，常数项为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}n^{p+1}+c_1n^p+c_2n^{p-1}+\cdots+c_pn.$$

对于给定的 $p$，上面公式中的系数 $c_1,\cdots,c_p$ 当然都可以具体算出。我们这里不再作深入的讨论了。

## §4 面积、路程与功的计算

我们已经会求直线形和圆的面积。为了计算更一般的曲线图形的面积，需要寻求更有效的方法。

先来看一个具体的例子。设有这样一个曲线图形，它由曲线 $y=x^2$，$OX$ 轴和直线 $x=b$ 围成，我们来求这图形的面积（图0-1）。

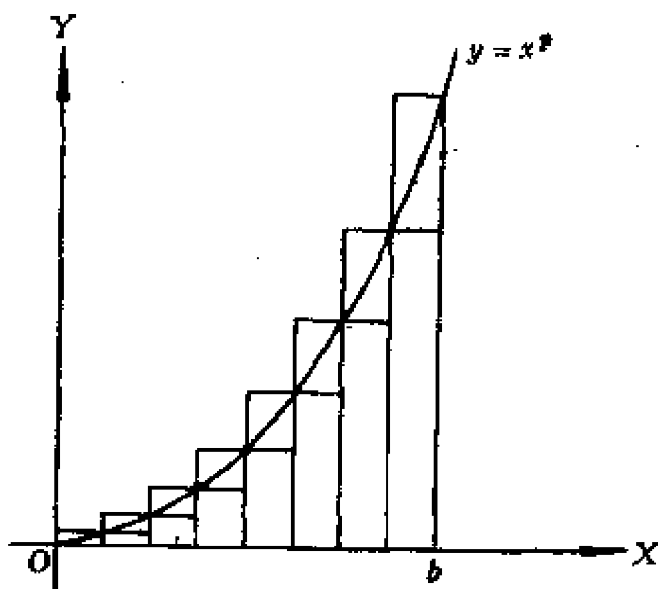



图 0-1

我们把 $OX$ 轴上的闭区间$[0,b]$分成 $n$ 等分，其中第 $k$ 个等分是

$$\left[\frac{k-1}{n}b,\ \frac{k}{n}b\right].$$

相应地把上述曲线图形分成 $n$ 个等宽的条形

$$\frac{k-1}{n}b\leqslant x\leqslant\frac{k}{n}b,\quad 0\leqslant y\leqslant x^2,\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

每一条形的面积 $S_k$ 介于二矩形条的面积之间：

$$\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n} \leqslant S_k \leqslant \left(\frac{k}{n}b\right)^p \cdot \frac{b}{n}.$$

因而所求的曲线图形的面积 $S$ 应该介于以下两个和数之间：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p \frac{b}{n} \leqslant S \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \frac{b}{n}.$$

我们可以把矩形条面积之和 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^p \frac{b}{n}$ 与 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \frac{b}{n}$ 当作曲线图形面积 $S$ 的近似值。所分成的矩形条越细，这样的近似值的精确度就越高。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \frac{b}{n} &= \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p \\ &= \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\left(\frac{1}{p+1}n^{p+1} + c_1 n^p + \cdots + c_p n\right) \\ &= b^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_p}{n^p}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^p \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^p \frac{b}{n} - \frac{b^{p+1}}{n} \\ &= b^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{c_1-1}{n} + \cdots + \frac{c_p}{n^p}\right).\end{aligned}$$

当 $n$ 无限增大时，上面两个和数趋于共同的极限值 $\frac{b^{p+1}}{p+1}$。这共同的极限值应该看作所求的面积 $S$。这样，我们求得

$$S = \frac{1}{p+1}b^{p+1}.$$

再来看一般的情形。设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且非负（即只取大于或等于 0 的值）。曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b, y=0$ 围成一个图形，我们来求这个曲线图形的面积 $S$。为此，用一串分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

把闭区间$[a,b]$分成$n$段，相应地把上述曲线图形分成$n$个条形，其中第$j$个条形为

$$x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\qquad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$

在闭区间$[x_{j-1},x_j]$上任取一点$\xi_j$，我们把高为$f(\xi_j)$，底长为$\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$的矩形条的面积，当作曲线图形的第$j$个条形的面积的近似值。这样得到曲线图形面积的近似值

$$\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)\Delta x_j.$$

以后将证明，对于相当普遍的函数$f$，当分割的条形越来越窄时，上述和式有确定的极限。这极限应当视为所求曲线图形的面积。

我们还可以讨论更一般的情形。设$y=f(x)$是在闭区间$[a,b]$上有定义的函数（不一定非负），考察由直线$x=a,x=b,y=0$与曲线$y=f(x)$所围图形的面积。我们约定，对于函数$f$取负值的部分，曲线$y=f(x)$与$OX$轴所夹的面积为负值(图 0-2)。这

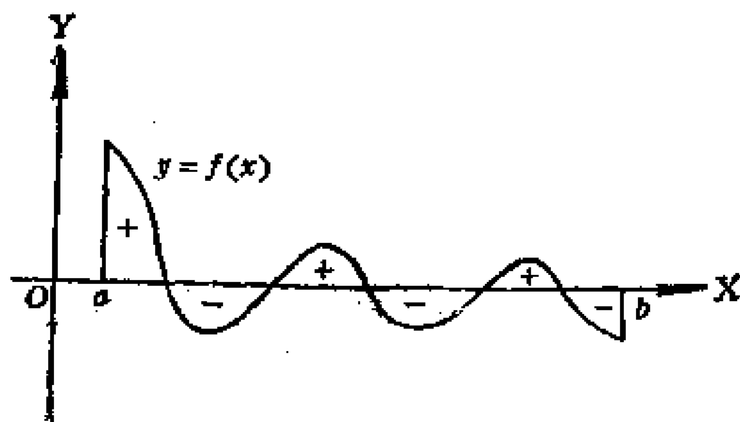



图 0-2

样，我们仍能把所述图形的面积的近似值表示为

$$\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)\Delta x_j.$$

对于相当普遍的函数$f$，当分割的条形越来越窄时，上述和式有

确定的极限。这极限应当视为所述曲线图形的面积的代数值。

再来看一些取自物理学的例子。

设物体作变速直线运动，其速度 $v$ 是时间 $t$ 的函数

$$v=f(t).$$

我们来计算这物体从时刻 $a$ 到时刻 $b$ 经过的路程。为此，用一串分点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

把这段时间分成 $n$ 小段。在第 $j$ 段时间中物体通过的路程可以认为近似等于

$$f(\tau_j)\Delta t_j,$$

这里 $\tau_j$ 是$[t_{j-1},t_j]$中的一个时刻，$\Delta t_j=t_j-t_{j-1}$。于是，从时刻 $a$ 到时刻 $b$ 物体通过的路程近似等于

$$\sum_{j=1}^{n}f(\tau_j)\Delta t_j.$$

当所分割的时间间隔越来越短时，上述和式的极限值即为物体从时刻 $a$ 到时刻 $b$ 通过的路程。

另一取自物理学的问题是求变力所做的功。设物体 $m$ 受到一个沿 $OX$ 轴方向的力 $F$ 的作用，它沿这轴从 $a$ 点运动到 $b$ 点。如果力 $F$ 随着 $x$ 而改变，即

$$F=f(x),$$

我们来求 $F$ 对这物体 $m$ 所做的功。为此，在 $a$ 和 $b$ 之间插入一串分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

设 $\xi_j$ 是$[x_{j-1},x_j]$上任意一点，而 $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$。在路程$[x_{j-1},x_j]$上把力 $F=f(x)$ 近似地看成常力 $f(\xi_j)$，则在这段上力 $F$ 所做的功近似地等于

$$f(\xi_j)\Delta x_j.$$

变力 $F=f(x)$ 在整段路程$[a,b]$上所做的功近似地等于

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

当所分割的路程间隔越来越小时，上述和式的极限值即为变力$F=f(x)$所做的功$W$。

在上面列举的例子中，来源不同的几个问题都可以用类似的方法讨论。还可以举出更多的例子，所涉及的问题归结为如下形式的和数的极限

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

当分割无限加细的时候，上述和数的极限值称为是函数$f(x)$的积分，记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中$a,b$表示和数展布的区间，积分号$\int$（拉长了的$S$）表示求和求极限的过程，而$f(x)\mathrm{d}x$表示求和各项的形状。如果把$\Delta x_1$，$\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$中最大的一个记为

$$\max\Delta x_j,$$

那么我们就可以写

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

早在公元前三世纪，古希腊时代的著名学者阿基米德(Archimedes)就已经会计算曲线图形

$$0\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant x^2$$

的面积。但他的方法(所谓"穷竭法")陈述起来并不那么简单清楚，所以在很长的一段时间里没有被人们普遍接受。直到两千年以后，牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibnitz)创立了微积分学，特别是把积分的计算与微分联系起来，人们才有了统一地解决多种多样的问题的简单而有效的工具。

## §5 切线、速度与变化率

初等几何课程已经告诉我们如何作圆的切线。但那作法依赖于圆的特殊几何性质，并没有提示作一般曲线的切线的方法。初等几何着眼于具体地研究每一特殊图形的性质。高等数学却致力于寻求普遍地解决问题的方法。为此，首先引进坐标把几何问题"代数化"。

考察如下的典型问题。设 $y=f(x)$ 是在 $(a,b)$ 上有定义的函数，它表示 $OXY$ 坐标系中的一段曲线。我们希望过曲线 $y=f(x)$ $(x\in(a,b))$ 上的一点 $P_0(x_0,f(x_0))$，作这曲线的切线(图0-3)。为此，考虑曲线上的另一点 $P(x,f(x))$。过这两点可以作一条直线——曲线的割线——$P_0P$，其斜率为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

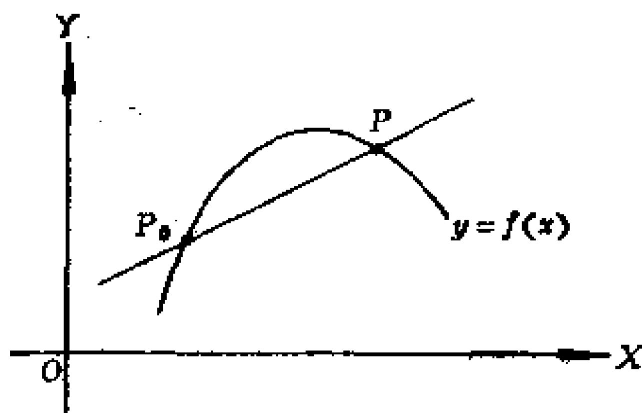



图 0-3

当点 $P$ 沿着曲线变动时，割线 $P_0P$ 的方位也随着变动，当 $P$ 无限接近于 $P_0$ 时，割线 $P_0P$ 的极限位置就应该是曲线过 $P_0$ 点的切线。在以后的课程中，我们将看到，对于相当普遍的函数(包括我们在中学学过的所有的初等函数)，当 $P$ 趋于 $P_0$ 时，割线 $P_0P$ 确实有一个极限位置。这就是说，可以作曲线过 $P_0$ 点的切线，

其斜率为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

我们把差商$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$的极限$f'(x_0)$称为导数或微商。

我们再来看一个属于运动学的问题。设物体沿$OX$轴运动，其位置$x$是时间$t$的函数

$$x=f(t).$$

如果运动比较均匀，那么我们可以用平均速度反映其快慢。在$[t_1,t_2]$这一段时间里的平均速度定义为

$$v_{[t_1,t_2]}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$

如果物体的运动很不均匀，那么平均速度就不能很好地反映物体运动的状况，必须代之以在每一时刻$t_0$的瞬时速度$v(t_0)$。为了计算瞬时速度，我们取越来越短的时间间隔$[t_0,t]$，以平均速度$v_{[t_0,t]}$作为瞬时速度$v(t_0)$的近似值。让$t$趋于$t_0$，平均速度$v_{[t_0,t]}$的极限即为物体在时刻$t_0$的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0).$$

与切线问题一样，我们又遇到了差商$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$的极限——导数(或微商)$f'(t_0)$。

速度问题只是更一般的变化率问题的一个例子。假设有一个随时间变化的量$x=f(t)$。我们把差商

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

称为是这个量从时刻$t_1$到时刻$t_2$的平均变化率。当量$x=f(t)$变化比较均匀时，平均变化率反映了它变化的快慢。如果量$x=f(t)$的变化很不均匀，就需要用瞬时变化率来描述这个量在各个不同时刻的变化状况。取接近时刻$t_0$的一小段时间，考察这段时间

内的平均变化率。当 $t$ 趋于$t_0$时这平均变化率的极限就是量 $x = f(t)$在时刻 $t_0$ 的瞬时变化率：

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

**例1** 设从时刻 0 到时刻 $t$ 通过导线截面的电量是 $q = f(t)$。电量的平均变化率就是平均电流强度

$$\bar{I}_{[t_1, t_2]} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

而电量的瞬时变化率则表示在时刻 $t_0$ 的瞬时电流强度

$$I(t_0) = f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

**例2** 设容器内有某种放射性元素，其质量$m$随着时间 $t$ 而变化：$m = f(t)$。因为放射性元素衰变的时候质量不断减少，所以质量的平均变化率总是负数：

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} < 0.$$

这平均变化率的绝对值被称为平均衰变速度。质量的瞬时变化率也是负数：

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} < 0.$$

这瞬时变化率的绝对值被称为瞬时衰变速度。

上面考察的几个问题，涉及到几何学、力学、电学和物质放射性。而在这些问题中都出现了差商的极限——导数：

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

由此看来，对这样的极限进行研究很有必要。关于导数的计算，已经发展了一套行之有效的方法——微分法。这将是我们进一步学习的重要内容。

# 第 一 篇

## 分 析 基 础

# 第一章 实 数

微积分创始于十七世纪后半期。创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法。他们虽然解决了许多过去认为是高不可攀的困难问题，却未能为自己的方法提供逻辑上无懈可击的理论说明。这引起了人们长达一个多世纪的争论与误解。直到十九世纪初，柯西(Cauchy)才以极限理论为微积分奠定了坚实的基础。又过了半个世纪以后，康托(Cantor)和戴德金(Dedekind)等人经过缜密的审查才发现：极限理论的某些基本原理，实际上依赖于实数系的一个非常重要的性质——连续性。本章的重点是实数系的连续性。希望读者能紧紧抓住问题的关键，领会精神而不过分拘泥于细节。

## §1 实数的无尽小数表示与顺序

在初等数学课程里，我们已经熟悉了有尽小数，会做有尽小数的加减法和乘法运算。我们还知道，任何有理数都可以表示为无尽循环小数(有尽小数看成后面接有一串 0 的无尽循环小数)。在此基础上，我们进一步引入无尽不循环小数以表示无理数。这样，一般地以无尽小数表示实数。以这种朴素的理解为背景，我们来考察实数的顺序，讨论实数系的连续性问题，并定义实数的运算。

**无尽小数** 形状如

$$\pm a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

这样的表示被称为*无尽小数*，这里 $a_0\in \mathbb{Z}_+$，而 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中的每一个都是$0,1,\cdots,9$这些数字之一。形状如$+a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$

的无尽小数常常简单地写为$a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$。我们还约定：如象$\pm a_0.a_1a_2\cdots a_m0000\cdots$这样的无尽小数可以写成$\pm a_0.a_1a_2\cdots a_m$，并可称为有尽小数。

**等同关系** 我们给无尽小数规定如下的等同关系$(E_1)$和$(E_2)$：

$$(E_1)\qquad -0.000\cdots = +0.000\cdots,$$

$$(E_2)\qquad \pm b_0.b_1\cdots b_p999\cdots = \pm b_0.b_1\cdots(b_p+1)000\cdots$$

（其中$b_p<q$）。

如同$(E_1)$和$(E_2)$两式中等号左边那样的无尽小数被称为非规范小数，其他的无尽小数都称为规范小数。所规定的等同关系将每一个非规范小数等同于一个与它相对应的规范小数。

**实数** 在所有的无尽小数中，把每两个彼此等同的无尽小数视为同一个数，这样就得到了实数。于是，每一个实数都具有唯一的规范小数表示。规范表示为$+a_0.a_1a_2\cdots$的实数被称为非负实数，其中规范表示为$+0.00\cdots$的实数记为0。规范表示为$-b_0.b_1b_2\cdots$的实数被称为负实数。

**相反数** 两个非0实数，如果它们的规范小数表示的各位数字分别相同，但符号正好相反，那么我们就说这两实数互为相反数。0的相反数就规定为0自己。实数$x$的相反数通常记为$-x$。

**实数的顺序** 我们陈述比较两实数大小的规则如下：

情形1 两实数都是非负实数。对于规范表示的两个非负实数$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$和$b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，我们逐位比较它们的各位数字。如果

$$a_0=b_0,\ \cdots,\ a_{p-1}=b_{p-1},\ a_p>b_p,$$

那么我们就说$a$大于$b$；

情形2 两实数都是负实数。对于规范表示的两个负实数$-c=-c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$和$-d=-d_0.d_1d_2\cdots d_n\cdots$，如果

$$c_0=d_0,\ \cdots,\ c_{q-1}=d_{q-1},\ c_q<d_q,$$

那么我们就说 $-c$ 大于 $-d$；

情形3　两实数之一是非负实数，另一个是负实数．对这情形，我们规定任何非负实数大于任何负实数。

如果实数 $x$ 大于实数 $y$，那么我们就说实数 $y$ 小于实数 $x$。如果两实数有相同的规范小数表示，那么我们就说这两实数相等．

用上述方式，我们在实数中定义了大于“$>$”，小于“$<$”和等于“$=$”等关系。这样定义的顺序关系具有“三歧性”和“传递性”。

**三歧性**　对任意两个实数 $a$ 和 $b$，必有以下三种情形之一出现，而且也只有其中之一出现：

$$a>b, a=b \quad \text{或者} \quad a<b.$$

**传递性**　如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$。

我们约定：用记号 $a \geqslant b$ 表示“$a>b$ 或者 $a=b$”，用记号 $a \leqslant b$ 表示“$a<b$ 或者 $a=b$”。

**有尽小数在实数系中处处稠密**　下面的定理指出，在任意两个不相等的实数之间还可以再插进一个有尽小数。这一重要结论说明了有尽小数在实数系中的稠密性。

**定理**　设 $a$ 和 $b$ 是实数，$a<b$。则存在有尽小数 $c$，满足

$$a<c<b.$$

**证明**　如果 $a<0<b$，那么 $c=0$ 就合乎要求。因此只须考察 $0 \leqslant a<b$ 或者 $a<b \leqslant 0$ 的情形．我们只对 $0 \leqslant a<b$ 的情形写出证明。对另一情形的讨论留给读者作为练习。

设 $a$ 和 $b$ 的规范小数表示为

$$a=a_0.a_1a_2\cdots \quad \text{和} \quad b=b_0.b_1b_2\cdots.$$

因为 $a<b$，所以存在 $p \in \mathbf{Z}_+$，使得

$$a_0=b_0, \cdots, a_{p-1}=b_{p-1}, a_p<b_p.$$

又因为 $a_0.a_1a_2\cdots$ 是规范小数，所以存在 $q>p$，使得

$$a_q<9.$$

我们取

$$c = a_0.a_1\cdots a_p\cdots a_{q-1}(a_q+1)000\cdots.$$

于是，$c$ 是有尽小数，它满足

$$a<c<b. \qquad \square$$

**实数的绝对值** 实数 $x$ 的绝对值 $|x|$ 定义如下：

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{如果 } x \text{ 是非负实数,} \\ -x, & \text{如果 } x \text{ 是负实数.} \end{cases}$$

## §2 实数系的连续性

关于实数系的连续性，有若干种相互等价的描述办法。本节将要介绍的"*确界原理*"，就是其中便于运用的一种陈述方式。通过在以后各章中的运用，读者将会逐渐加深对这一原理的理解。

先来介绍有关的术语。

**上界与下界，有界集** 设 $E\subset \mathbf{R}$，$E\neq\varnothing$。如果存在 $L\in\mathbf{R}$，使得

$$x\leqslant L, \quad \forall x\in E,$$

那么我们就说集合 $E$ 有上界，并且说 $L$ 是集合 $E$ 的一个上界。如果存在 $l\in\mathbf{R}$，使得

$$x\geqslant l, \quad \forall x\in E,$$

那么我们就说集合 $E$ 有下界，并且说 $l$ 是集合 $E$ 的一个下界。如果一个集合有上界并且也有下界，那么我们就说这集合有界，或者说这集合是有界集。

如果 $L$ 是集合 $E$ 的上界，$L_1>L$，那么 $L_1$ 也是集合 $E$ 的一个上界。因此，一个有上界的集合，不可能有最大的上界。下面，我们来考察一个意义十分重大的问题：非空而有上界的实数集合，是否总有一个最小的上界？这种"最小的上界"，通常称为上确界。

**上确界** 设$E$是实数的非空集合，即设$E\subset\mathbf{R}, E\neq\varnothing$。如果存在一个实数$M$，满足下面的条件(i)和(ii)，那么我们就把$M$叫做集合$E$的上确界。条件(i)和(ii)是：

(i) $M$是集合$E$的一个上界，即

$$x\leqslant M, \quad \forall x\in E;$$

(ii) $M$是集合$E$的最小的上界——任何小于$M$的实数$M'$都不再是集合$E$的上界，即

$$(\forall M'<M)(\exists x'\in E)(x'>M').$$

上确界定义中的条件(ii)等价于说：集合$E$的任何上界$M_1\geqslant M$。

如果$M$和$M_1$都是集合$E$的上确界，那么就应该有

$$M_1\geqslant M, \quad M\geqslant M_1,$$

因而有

$$M_1=M.$$

由此得知：集合$E$的上确界如果存在就必定只有一个。我们把这唯一的上确界记为

$$\sup E.$$

类似地可以定义下确界。

**下确界** 设$E\subset\mathbf{R}, E\neq\varnothing$。如果存在一个实数$m$，满足以下的条件(1)和(2)，那么我们就把$m$叫做集合$E$的下确界：

(1) $m$是集合$E$的一个下界，即

$$x\geqslant m, \quad \forall x\in E;$$

(2) $m$是集合$E$的最大的下界——任何大于$m$的实数$m'$都不再是集合$E$的下界，即

$$(\forall m'>m)(\exists x'\in E)(x'<m').$$

集合$E$的下确界如果存在就必定是唯一的。我们把这唯一的下确界记为

$$\inf E.$$

设$E$是实数的非空集合。我们以$-E$表示$E$中各数的相反数

组成的集合，即定义

$$-E=\{-x \mid x\in E\}.$$

请读者自己验证以下简单事项：

(1) 集合 $E$ 有上界(下界)的充分必要条件是集合 $-E$ 有下界(上界)；

(2) 集合 $E$ 有上确界的充分必要条件是集合 $-E$ 有下确界，并且

$$\sup E=-\inf(-E);$$

(3) 集合 $E$ 有下确界的充分必要条件是集合 $-E$ 有上确界，并且

$$\inf E=-\sup(-E).$$

我们来介绍实数系的一个重要性质——连续性。这一性质体现为以下的确界原理。

**确界原理** R的任何非空而有上界的子集合 $D$ 在R中有上确界。

我们将证明与这陈述等价的另一陈述：

**确界原理(第二种陈述)** R的任何一个非空并且有下界的子集合 $E$ 在R中有下确界。

**证明** 在下面的讨论中，为了书写方便而作这样的约定：允许用记号

$$\frac{1}{10^n}$$

代表相应的有尽小数

$$\underbrace{0.0\cdots0}_{n\text{个}0}1=\underbrace{0.0\cdots0}_{n\text{个}0}1000\cdots.$$

我们分两种情形讨论。

情形1 设0是集合 $E$ 的一个下界。因为 $E\neq\varnothing$，所以存在 $x\in E$。于是又存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $k>x$。我们看到：0是 $E$ 的一个下界，$k$ 不是 $E$ 的下界。依次考察 $0,1,\cdots,k-1$ 这些数，可以断

定：存在 $a_0\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $a_0$ 是 $E$ 的一个下界而 $a_0+1$ 不是 $E$ 的下界。然后依次考察 $a_0.0,\ a_0.1,\ \cdots,\ a_0.9$ 这些数，又可断定：存在 $a_1\in\{0,1,\cdots,9\}$，使得 $a_0.a_1$ 是 $E$ 的一个下界而 $a_0.a_1+\frac{1}{10}$ 不是 $E$ 的下界。再依次考察 $a_0.a_10,\ a_0.a_11,\ \cdots,\ a_0.a_19$ 这些数，又可断定：存在 $a_2\in\{0,1,\cdots,9\}$，使得 $a_0.a_1a_2$ 是 $E$ 的一个下界而 $a_0.a_1a_2+\frac{1}{10^2}$ 不是 $E$ 的下界。继续这样做下去，我们得到一串数：

$$a_0,\ a_0.a_1,\ a_0.a_1a_2,\ \cdots,\ a_0.a_1a_2\cdots a_n,\ \cdots.$$

这些数满足条件：$a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是集合 $E$ 的下界而 $a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{10^n}$ 不是集合 $E$ 的下界。我们将证明：

$$a_0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$$

是一个规范小数，它正好就是集合 $E$ 的下确界。

假如 $a_0.a_1a_2\cdots$ 不是规范小数，那么必定存在 $p\in\mathbf{Z}_+$，使得

$$a_{p+1}=a_{p+2}=\cdots=9.$$

不妨设 $p$ 是满足这条件的最小的非负整数。对任意的 $\beta\in E$，设 $\beta$ 的规范小数表示为 $\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots$，则必定存在 $n>p$，使得 $\beta_n<9$。因为

$$\beta\geqslant a_0.a_1\cdots a_n,$$

所以又必定存在 $q\in\{0,1,\cdots,p\}$，使得

$$\beta_0=a_0,\ \cdots,\ \beta_{q-1}=a_{q-1},\ \beta_q\geqslant a_q+1$$

（否则 $\beta$ 将小于 $a_0.a_1\cdots a_n$）。于是有

$$\begin{aligned}\beta&\geqslant a_0.a_1\cdots a_{q-1}(a_q+1)\\&\geqslant a_0.a_1\cdots a_{p-1}(a_p+1)\\&=a_0.a_1\cdots a_{p-1}a_p+\frac{1}{10^p}.\end{aligned}$$

我们看到

$$\beta \geqslant a_0.a_1\cdots a_p + \frac{1}{10^p}, \quad \forall \beta \in E.$$

由“$a_0.a_1a_2\cdots$是非规范小数”的假定导出的这一结论，与 $a_p$ 的选择办法相矛盾。由此得知：$a_0.a_1a_2\cdots$必定是规范小数。

下面，我们来证明实数 $a = a_0.a_1a_2\cdots$是集合 $E$ 的下确界。首先指出：任何 $\gamma \in E$ 必定满足

$$\gamma \geqslant a_0.a_1a_2\cdots.$$

如果不是这样，就必定存在 $h \in \mathbb{Z}$，使得

$$\gamma < a_0.a_1\cdots a_h.$$

——这与 $a_0.a_1a_2\cdots a_h$ 的选取办法矛盾。其次，对于任何一个$b > a_0.a_1a_2\cdots$，必定存在 $k \in \mathbb{Z}_+$，使得

$$b \geqslant a_0.a_1\cdots a_k + \frac{1}{10^k}.$$

这样的 $b$ 不可能是集合 $E$ 的下界。

至此，对于 0 是 $E$ 的下界的情形，我们证明了集合 $E$ 在$\mathbb{R}$中必定有下确界。

情形2　设 0 不是集合 $E$ 的下界。这就是说，存在 $x \in E$，使得

$$x < 0.$$

于是，$E$ 的任何下界 $l$ 必定小于 0：

$$l < 0.$$

我们来考察$\mathbb{R}$的另一非空子集合

$$F = \{-l \mid l \text{ 是 } E \text{ 的下界}\}.$$

容易看出：0 是集合 $F$ 的一个下界，利用情形 1 中已经证明的结果可以断定：$F$ 在$\mathbb{R}$中有下确界，即存在

$$c = \inf F \in \mathbb{R}.$$

我们指出：$a = -c$ 是集合 $E$ 的下确界。

为此，考察 $\gamma \in E$。显然对任何 $-l \in F$ 都有

$$\gamma \geqslant l, \quad -\gamma \leqslant -l.$$

这说明 $-\gamma$ 是集合 $F$ 的一个下界. 因而

$$-\gamma \leqslant c, \quad \gamma \geqslant -c = a.$$

这说明 $a = -c$ 是集合 $E$ 的一个下界. 另一方面，对于任意的 $b > a$，我们有 $-b < -a = c$，因而 $-b \notin F$. 这就是说，任何大于 $a$ 的实数 $b$ 都不是集合 $E$ 的下界. 我们证明了 $a$ 是 $E$ 的下确界. □

## §3 实数的四则运算

两个实数的和、差、积、商是什么意思？这是需要予以确切定义的. 为了定义实数 $a$ 与 $b$ 之和，我们考察满足以下条件的有尽小数 $\alpha, \alpha'$ 与 $\beta, \beta'$：

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha', \quad \beta \leqslant b \leqslant \beta'.$$

两实数 $a$ 与 $b$ 之和 $a+b$ 的合理的定义应该满足

$$\alpha + \beta \leqslant a + b \leqslant \alpha' + \beta'.$$

上式中的 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha'+\beta'$ 都只涉及有尽小数的加法运算，因而是已经有定义的. 我们将利用已有定义的有尽小数的运算来定义实数的相应运算.

**定理1** 设 $a$ 和 $b$ 是实数. 则存在唯一实数 $u$，使得对于满足条件

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha', \quad \beta \leqslant b \leqslant \beta'$$

的任何有尽小数 $\alpha, \alpha'$ 和 $\beta, \beta'$，都有

$$\alpha + \beta \leqslant u \leqslant \alpha' + \beta'.$$

这定理的存在性部分比较容易证明. 事实上，实数

$$u = \sup\left\{\alpha + \beta \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha\text{和}\beta\text{是有尽小数，} \\ \alpha \leqslant a, \ \beta \leqslant b. \end{array}\right\}$$

就符合定理的要求. 唯一性的证明基于以下想法：我们可以取彼此充分靠近的有尽小数 $\alpha, \alpha'$ 和彼此充分靠近的有尽小数 $\beta, \beta'$，使得

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha', \quad \beta \leqslant b \leqslant \beta'.$$

于是$\alpha+\beta$与$\alpha'+\beta'$可以任意接近，因而在它们之间容不下两个数。以上推想方式是令人信服的。但要严格地写出每一步证明，却是一件细致的工作。我们把这部分内容放到本节后的附录中，供喜欢寻根究底的读者参考。初学者不必也不宜在这些细节上花费太多的时间，尤其不要因此而分散了对主要问题的注意力。

**定义** 我们把定理1中所述的唯一确定的实数$u$叫做实数$a$与实数$b$之和，并约定把它记为$a+b$。

**定义** 实数$a$与实数$b$之差定义为$a$与$-b$之和，即规定

$$a-b=a+(-b).$$

为了定义两个非负实数的乘积，我们需要以下定理。

**定理2** 设$a$和$b$是非负实数。则存在唯一实数$v$，使得对于满足条件

$$0\leqslant\alpha\leqslant a\leqslant\alpha',\qquad 0\leqslant\beta\leqslant b\leqslant\beta'$$

的任何有尽小数$\alpha,\alpha'$和$\beta,\beta'$，都有

$$\alpha\beta\leqslant v\leqslant\alpha'\beta'.$$

这定理的证明也放在本节后的附录中。

**定义** 我们把定理2中所述的唯一确定的实数$v$叫做非负实数$a$与非负实数$b$的乘积，并约定把它记为$ab$。

**定义** 任意实数$a$与$b$的乘积$ab$定义如下：

$$ab=\begin{cases}|a|\,|b|, & \text{如果}a\text{与}b\text{同号},\\ -(|a|\,|b|), & \text{如果}a\text{与}b\text{异号}.\end{cases}$$

至于实数的除法，我们将在下面的附录中予以讨论。

## 附　录

在这附录里，我们补充定理1和定理2的证明，并对实数的除法作相应的讨论。

**引理1** 设$a$是任意一个实数。则对任何正的有尽小数$\varepsilon$，存在有尽小数$\alpha$和$\alpha'$，满足条件

$$a \leqslant a \leqslant a', \quad a' - a < \varepsilon.$$

**证明** 我们设

$$\varepsilon = \varepsilon_0.\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p,$$

并设其中第一位不等于0的数字是$\varepsilon_{k-1}$，$0 \leqslant k-1 \leqslant p$。则有

$$1/10^k < \varepsilon.$$

如果$a$的规范小数表示为$a_0.a_1a_2\cdots$，则取

$$a = a_0.a_1\cdots a_k, \quad a' = a_0.a_1\cdots a_k + 1/10^k;$$

如果$a$的规范小数表示为$-a_0.a_1a_2\cdots$，则取

$$a = -a_0.a_1\cdots a_k - 1/10^k, \quad a' = -a_0.a_1\cdots a_k.$$

对这两种情形都有

$$a \leqslant a \leqslant a', \quad a' - a = 1/10^k < \varepsilon. \qquad \square$$

**引理2** 设$c$和$c'$是实数，$c \leqslant c'$。如果对任何正的有尽小数$\varepsilon$,存在有尽小数$\gamma$和$\gamma'$，满足条件

$$\gamma \leqslant c \leqslant c' \leqslant \gamma', \quad \gamma' - \gamma < \varepsilon,$$

那么就必定有

$$c = c'.$$

**证明** 用反证法．假如$c < c'$，那么存在有尽小数$\eta$和$\eta'$，满足

$$c < \eta < \eta' < c'.$$

对于$\varepsilon = \eta' - \eta > 0$，任何满足条件

$$\gamma \leqslant c < \eta < \eta' < c' \leqslant \gamma'$$

的有尽小数$\gamma$和$\gamma'$都不能使得

$$\gamma' - \gamma < \varepsilon = \eta' - \eta.$$

这说明：如果引理所述的前提成立，那么就必定有

$$c = c'. \qquad \square$$

**引理3** 设$\varepsilon$是正的有尽小数，$M$和$N$是自然数．则存在正的有尽小数$\varepsilon'$和$\varepsilon''$，使得

$$M\varepsilon' + N\varepsilon'' < \varepsilon.$$

**证明** 我们设

$$\varepsilon=\varepsilon_0.\varepsilon_1\cdots\varepsilon_p,$$

并设其中第一位不等于0的数字是$\varepsilon_{k-1}$, $0\leqslant k-1\leqslant p$. 则有

$$1/10^k<\varepsilon.$$

我们取自然数$m$和$n$，使得

$$10^m\geqslant M,\quad 10^n\geqslant N.$$

然后取

$$\varepsilon'=\frac{1}{10^{m+k+1}},\quad \varepsilon''=\frac{1}{10^{n+k+1}}.$$

于是就有

$$\begin{aligned}M\varepsilon'+N\varepsilon''&\leqslant 10^m\varepsilon'+10^n\varepsilon''\\&=\frac{1}{10^{k+1}}+\frac{1}{10^{k+1}}\\&<\frac{1}{10^k}<\varepsilon.\end{aligned}\qquad\square$$

**定理1的证明** *存在性* 实数

$$u=\sup\left\{\alpha+\beta\ \middle|\ \begin{array}{l}\alpha\text{和}\beta\text{是有尽小数,}\\ \alpha\leqslant a,\ \beta\leqslant b\end{array}\right\}$$

符合定理的要求。

*唯一性* 对于任意正的有尽小数$\varepsilon$和自然数$M=N=1$，根据引理3，存在正的有尽小数$\varepsilon'$和$\varepsilon''$，使得

$$\varepsilon'+\varepsilon''<\varepsilon.$$

又根据引理1，存在有尽小数$\alpha,\alpha'$和$\beta,\beta'$，分别满足

$$\alpha\leqslant a\leqslant\alpha',\quad \alpha'-\alpha<\varepsilon'$$

和

$$\beta\leqslant b\leqslant\beta',\quad \beta'-\beta<\varepsilon''.$$

于是有

$$(\alpha'+\beta')-(\alpha+\beta)<\varepsilon.$$

因为$\varepsilon$可以取任何正的有尽小数，根据引理2，满足条件

$$\alpha+\beta\leqslant u\leqslant\alpha'+\beta'$$

的实数 $u$ 应该是唯一的. □

**定理2的证明** *存在性* 实数

$$v=\sup\left\{\alpha\beta \,\middle|\, \begin{array}{l}\alpha\text{和}\beta\text{是有尽小数,}\\ 0\leqslant\alpha\leqslant a,0\leqslant\beta\leqslant b\end{array}\right\}$$

符合定理的要求.

*唯一性* 首先，取自然数$M$和$N$,使得

$$0\leqslant a<M,\quad 0\leqslant b<N.$$

其次，对于任意正的有尽小数$\varepsilon$，根据引理3，存在正的有尽小数$\varepsilon'$和$\varepsilon''$，使得

$$M\varepsilon'+N\varepsilon''<\varepsilon.$$

又根据引理1，存在有尽小数$\alpha,\alpha'$和$\beta,\beta'$，分别满足

$$0\leqslant\alpha\leqslant a\leqslant\alpha'<M,\quad \alpha'-\alpha<\varepsilon''$$

和

$$0\leqslant\beta\leqslant b\leqslant\beta'<N,\quad \beta'-\beta<\varepsilon'.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\alpha'\beta'-\alpha\beta&=\alpha'\beta'-\alpha'\beta+\alpha'\beta-\alpha\beta\\&=\alpha'(\beta'-\beta)+(\alpha'-\alpha)\beta\\&<M\varepsilon'+N\varepsilon''<\varepsilon.\end{aligned}$$

因为这里的$\varepsilon$可以取任何正的有尽小数，根据引理2，符合定理要求的实数 $v$ 应该是唯一的. □

下面讨论实数的除法. 在初等数学的课程里，我们学习过有尽小数的“长除法”(除法草式). 这是一种可以用来确定近似商的除法手续. 对于给定的正的有尽小数$\alpha,\beta$和自然数$n$，通过逐位试商，可以确定一个有尽小数

$$\gamma=\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_n,$$

满足这样的条件

$$\gamma\cdot\alpha\leqslant\beta<(\gamma+1/10^n)\cdot\alpha.$$

对于给定的$\alpha,\beta$和$n$，这样的$\gamma$是唯一确定的. 我们把这样的$\gamma$和

$\gamma'=\gamma+1/10^n$分别叫做$\beta\div\alpha$的、精确到小数点以后$n$位的不足近似商和过剩近似商，并约定用以下的记号表示它们：

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n=\gamma,\quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'_n=\gamma'.$$

为了定义任意实数$b$除以任意非0实数$a$的商，可以先考察$a>0,b=1$的情形。只要对$a>0$的情形定义了$1/a$，就可以按以下方式定义任意实数$b$除以任意非0实数$a$的商：

$$\frac{b}{a}=\begin{cases}\dfrac{1}{|a|}\cdot|b|, & \text{如果}a\text{与}b\text{同号},\\[2ex] -\dfrac{1}{|a|}\cdot|b|, & \text{如果}a\text{与}b\text{异号}.\end{cases}$$

**定理3** 对任何正实数$a$，存在唯一的正实数$w$，使得对于满足条件

$$0<\alpha\leqslant a\leqslant\alpha'$$

的任何有尽小数$\alpha,\alpha'$和任意的自然数$m,n$都有

$$(1/\alpha')_m\leqslant w\leqslant(1/\alpha)'_n.$$

**定义** 我们把定理3中所述的唯一确定的正实数$w$叫做正实数$a$的倒数，并把它记为$1/a$。

在下面的证明中，我们将利用有尽小数乘法的以下性质：对于任何正的有尽小数$\beta,\gamma$和$\gamma'$，应有

$$\beta\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma'\Longleftrightarrow\gamma<\gamma';$$

$$\beta\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma'\Longleftrightarrow\gamma=\gamma';$$

$$\beta\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma'\Longleftrightarrow\gamma>\gamma'.$$

**定理3的证明** *存在性* 因为

$$\alpha'\cdot(1/\alpha')_m\leqslant1\leqslant\alpha\cdot(1/\alpha)'_n\leqslant\alpha'\cdot(1/\alpha)'_n,$$

所以有

$$(1/\alpha')_m\leqslant(1/\alpha)'_n,\quad \forall m,n\in\mathbf{N}.$$

由此容易看出：实数

$$w=\sup\left\{\left(\frac{1}{\alpha'}\right)_m \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha'\text{是有尽小数},\\ \alpha'\geqslant a,m\in\mathbf{N}.\end{array}\right\}$$

符合定理的要求。

唯一性　首先，选取$\sigma=1/10^k$和$M=10^l$，使得

$$0<\sigma<\alpha<M.$$

其次，设$\varepsilon$是任意一个正的有尽小数.根据引理3,存在正的有尽小数$\varepsilon'$和$\varepsilon''$，使得

$$\varepsilon'+10^{2(k+l)}\varepsilon''<\varepsilon.$$

这样的$\varepsilon'$和$\varepsilon''$使得

$$\begin{aligned}&\sigma^2\varepsilon'+M^2\varepsilon''\\&\qquad=\sigma^2(\varepsilon'+10^{2(k+l)}\varepsilon'')<\sigma^2\varepsilon.\end{aligned}$$

我们可以选取有尽小数$a,a'$和自然数$n$，满足以下条件：

$$0<\sigma<a\leqslant\alpha\leqslant a'<M,$$

$$a'-a<\sigma^2\varepsilon',\quad 1/10^{n-1}<\varepsilon''.$$

这样选取的$a,a'$和$n$应该使得

$$\begin{aligned}&\sigma^2\left\{\left(\frac{1}{\alpha}\right)'_n-\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n\right\}\\&\leqslant aa'\left\{\left(\frac{1}{a}\right)'_n-\left(\frac{1}{a'}\right)_n\right\}\\&=aa'\left\{\left(\left(\frac{1}{a}\right)_n+\frac{1}{10^n}\right)-\left(\left(\frac{1}{a'}\right)'_n-\frac{1}{10^n}\right)\right\}\\&=a'\left\{a\left(\frac{1}{a}\right)_n\right\}-a\left\{a'\left(\frac{1}{a'}\right)'_n\right\}+2aa'\frac{1}{10^n}\\&<a'-a+aa'\frac{1}{10^{n-1}}\\&<\sigma^2\varepsilon'+M^2\varepsilon''<\sigma^2\varepsilon.\end{aligned}$$

于是有

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)'_n-\left(\frac{1}{\alpha}\right)_n<\varepsilon.$$

因为这里的$\varepsilon$可以是任何正的有尽小数，所以符合定理要求的实

数$w$不能多于一个。这证明了唯一性。 □

## §4 实数系的基本性质综述

本节综述实数系的一些最基本的性质。这些性质将是我们以后讨论的基础。以下分三组介绍这些性质：运算性质，顺序性质和连续性质。

**运算性质**

在实数系$\mathbf{R}$中定义了加法运算"$+$"和乘法运算"$\cdot$"，使得对任意的$a\in\mathbf{R}$和$b\in\mathbf{R}$，有确定的$a+b\in\mathbf{R}$和确定的$a\cdot b\in\mathbf{R}$与之对应，并且以下的运算律成立：

($F_1$) 加法是交换的，即

$$a+b=b+a,\quad \forall a,b\in\mathbf{R};$$

($F_2$) 加法是结合的，即

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad \forall a,b,c\in\mathbf{R};$$

($F_3$) $0\in\mathbf{R}$对于加法起着特定的作用

$$0+a=a+0=a,\quad \forall a\in\mathbf{R};$$

($F_4$) 对每一个$a\in\mathbf{R}$都存在一个与它相反的数$-a\in\mathbf{R}$，使得

$$(-a)+a=a+(-a)=0;$$

($F_5$) 乘法是交换的，即

$$a\cdot b=b\cdot a,\quad \forall a,b\in\mathbf{R};$$

($F_6$) 乘法是结合的，即

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\quad \forall a,b,c\in\mathbf{R};$$

($F_7$) $1\in\mathbf{R}$对于乘法起着特定的作用

$$1\cdot a=a\cdot 1=a,\quad \forall a\in\mathbf{R};$$

($F_8$) 对每一个$a\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$，都存在一个倒数$a^{-1}\in\mathbf{R}$，使得

$$a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = 1;$$

($F_9$) 乘法对于加法是分配的，即

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, \quad \forall a,b,c\in \mathbb{R}.$$

**顺序性质**

在实数系R中定义了顺序关系“$<$”(在以下的陈述中也出现记号“$>$”。我们约定：“$a>b$”只是“$b<a$”的另一种写法，表示的是同一件事情)。顺序关系“$<$”具有以下一些性质：

($O_1$) 对任意的$a\in\mathbb{R}$与$b\in\mathbb{R}$，必有并且只有以下三种情形之一出现：

$$a<b,\ a=b \quad \text{或者} \quad a>b$$

(这一性质通常叫做“三歧性”)；

($O_2$) 关系“$<$”具有传递性

$$a<b,\ b<c \Rightarrow a<c;$$

($O_3$) 加以实数的运算保持顺序关系

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c;$$

($O_4$) 乘以正实数的运算保持顺序关系

$$a<b,\ c>0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c.$$

**连续性质**

在实数系R中，以下的确界原理成立：

(C) R的任何一个非空而有上界的子集合在R中有上确界.

我们对上面所列的性质作一些说明。

定义有加法与乘法运算并且符合运算律($F_1$)—($F_9$)的集合通常称为域。实数系是一个域。有理数系和复数系也都是域。

定义有顺序关系“$<$”并且符合($O_1$)—($O_4$)的要求的一个域被称为有序域。实数系是一个有序域。有理数系也是一个有序域。但复数系不是有序域。

确界原理(C)说明了实数系的连续性。因此我们说：实数系R是一个连续的有序域。

## §5 不 等 式

本节介绍常用的一些不等式。

**涉及绝对值的不等式**

实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{如果} a\geqslant 0, \\ -a, & \text{如果} a<0. \end{cases}$$

我们来考察不等式

$$|x|<a.$$

根据绝对值的定义，这不等式等价于

$$0\leqslant x<a, \text{或者 } x<0, -x<a,$$

即

$$-a<x<a.$$

我们得到：

$$|x|<a \Longleftrightarrow -a<x<a.$$

即：不等式 $|x|<a$ 的解的集合是开区间

$$(-a,a).$$

类似地可以证明

$$|y|\leqslant\beta \Longleftrightarrow -\beta\leqslant y\leqslant\beta.$$

即：不等式 $|y|\leqslant\beta$ 的解的集合是闭区间

$$[-\beta,\beta].$$

我们有显然的不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|, \quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

将这些不等式相加可得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

由此又得到重要的不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

运用这样的不等式，可以得到

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

同理可得

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|=|a-b|,$$

即

$$|a|-|b|\geqslant-|a-b|.$$

我们得到了

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|,$$

即

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

利用归纳法，可以把不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

推广到 $n$ 个实数的情形：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|$$
$$\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

伯努里(Bernoulli)不等式

设 $x\geqslant0$，则由二项式定理

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots+x^n$$

可以得到

$$(1+x)^n\geqslant1+nx.$$

这不等式实际上对任何 $x\geqslant-1$ 成立。请看下面的定理。

**定理** 以下的伯努里不等式成立：

$$(1+x)^n\geqslant1+nx,\quad\forall x\geqslant-1.$$

**证明** 我们采用数学归纳法。$n=1$时，上式显然以等式的形

式成立。假设已经证明了

$$(1+x)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)x,\quad \forall x\geqslant -1,$$

则

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=(1+x)^{n-1}(1+x)\\&\geqslant[1+(n-1)x](1+x)\\&=1+(n-1)x+x+(n-1)x^2\\&\geqslant 1+nx,\quad \forall x\geqslant -1.\end{aligned}$$

这证明了对一切自然数 $n$ 伯努里不等式成立。 □

**算术平均数与几何平均数不等式**

设 $x_1$ 和 $x_2$ 是非负实数。我们把 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 叫做这两个数的算术平均数，把 $\sqrt{x_1x_2}$ 叫做这两个数的几何平均数。以下的不等式显然成立：

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0.$$

由此得到

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}.$$

即：算术平均数大于或等于几何平均数。

对 $n$ 个非负实数，也有相应的结果：

**定理** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$，则以下的算术平均数与几何平均数不等式($AM$-$GM$ 不等式)成立：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

**证明** 我们利用数学归纳法。$n=1$ 的时候，上式显然(以等式形式)成立。假设对任意 $n-1$ 个非负实数，算术平均数与几何平均数不等式成立。我们来考虑 $n$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的情形。不妨设 $x_n$ 是这 $n$ 个数中最大的一个(我们总可以从小到大排列这 $n$ 个非负实数，于是最后一个数就是最大的一个)。记

$$A=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

则有

$$x_n\geqslant A=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n&=\left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n\\&=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n\\&=A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)+\cdots\\&\geqslant A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)\\&=A^n+A^{n-1}(x_n-A)\\&=A^{n-1}x_n\geqslant x_1\cdots x_{n-1}x_n.\end{aligned}$$

即

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.\qquad\square$$

### 涉及三角函数的不等式

几何学的讨论也是发现和证明不等式的一个重要途径。我们举以下的例子来说明这种方法。在数学理论的推导中，涉及角的度量时，通常采用弧度作为单位。

**定理** 对于用弧度表示的角 $x$，有以下不等式成立

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x,\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

**证明** 在单位圆 $O$ 中作圆心角 $x$，它的始边为 $OX$ 轴上的 $OA$，终边为 $OB$。用线段联结 $AB$。过 $A$ 点作 $OX$ 轴的垂线交 $OB$ 延长线于 $C$（图1-1）。

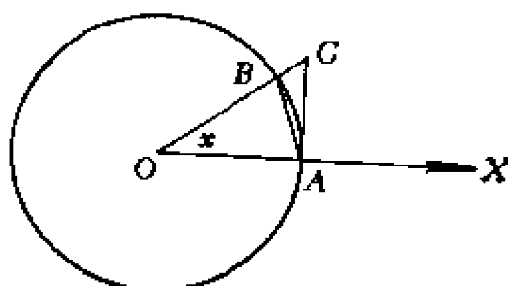



图 1-1

我们有

$$\triangle OAB\text{ 的面积}<\text{扇形 }OAB\text{ 的面积}<\triangle OAC\text{ 的面积},$$

即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x .$$

这样，我们证明了

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x, \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right). \qquad \square$$

**推论** 以下不等式成立

$$|\sin x|\leqslant|x|, \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

**证明** 我们有

$$|\sin x|=\sin x\leqslant x=|x|, \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

和

$$|\sin(-x)|=\sin x\leqslant x=|-x|, \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

综合以上两式就得到

$$|\sin x|\leqslant|x|, \quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

而当$|x|\geqslant\frac{\pi}{2}$时，又有

$$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\leqslant|x|.$$

于是，我们得到不等式

$$|\sin x|\leqslant|x|, \quad \forall x\in\mathbf{R}. \qquad \square$$

# 第二章　极　　限

## §1　有界序列与无穷小序列

从自然数集N到实数集R的一个映射

$$x: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R},$$

相当于用自然数编号的一串实数

$$x_1 = x(1), x_2 = x(2), \cdots, x_n = x(n), \cdots.$$

这样的一个映射，或者说这样的用自然数编号的一串实数$\{x_n\}$，称为是一个实数序列。

### 1.a　有界序列

**定义1**　设$\{x_n\}$是一个实数序列。

(1) 如果存在$M \in \mathbf{R}$使得

$$x_n \leqslant M, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

我们就说：序列$\{x_n\}$有上界，实数$M$是它的一个上界；

(2) 如果存在$m \in \mathbf{R}$使得

$$x_n \geqslant m, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

我们就说：序列$\{x_n\}$有下界，实数$m$是它的一个下界；

(3) 如果序列$\{x_n\}$有上界并且也有下界，我们就说这序列有界。

序列$\{x_n\}$有界的充分必要条件是：存在$K \in \mathbf{R}$使得

$$|x_n| \leqslant K, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

序列$\{x_n\}$有界这件事，可以用符号表述为

$$(\exists K \in \mathbf{R})(\forall n \in \mathbf{N})(|x_n| \leqslant K).$$

而“序列$\{x_n\}$无界”是上面陈述的否定，它可以用符号表述为

$$(\forall K\in\mathbf{R})(\exists n\in\mathbf{N})(|x_n|>K).$$

请注意，当我们对一个陈述加以否定时，应该把逻辑量词"∃换成"∀"，把"∀"换成"∃"，并且把最后的陈述换成原来陈述的否定。

**例1** 序列 $x_n=(-1)^n$ $(n=1,2,\cdots)$是有界的，因为

$$|x_n|\leqslant 1,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

**例2** 序列 $x_n=\frac{n+1}{n}(n=1,2,\cdots)$是有界的，因为

$$|x_n|=\left|\frac{n+1}{n}\right|\leqslant\left|\frac{n+n}{n}\right|=2,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

**例3** 序列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$是有界的，因为

$$\begin{aligned}0<x_n&=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}\\&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

**例4** 序列 $a_n=n$, $b_n=-2n$, $c_n=n+(-1)^n n$ 和 $d_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$ 都是无界的。

**例5** 考察序列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\qquad n=1,2,\cdots.$$

我们来证明这序列是无界的。事实上，对任意自然数$N$，只要取$n=2^{2N}$，就有

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{2N}}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{2^2}+4\frac{1}{2^3}+\cdots\\&\quad+2^{k-1}\frac{1}{2^k}+\cdots+2^{2N-1}\frac{1}{2^{2N}}\\&>\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{2N\text{项}}\\&=2N\frac{1}{2}=N.\end{aligned}$$

## 1.b 无穷小序列

考察序列$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$和$\{\gamma_n\}$，这里

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \qquad \beta_n = -\frac{1}{n}, \qquad \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

我们看到，随着 $n$ 的增大，$\alpha_n$ 不断减小而趋近于 0，$\beta_n$ 不断增加而趋近于 0，$\gamma_n$ 来回摆动但仍然趋近于 0。这几个序列都是无穷小序列的例子。

**定义2** 设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列。如果对任意实数 $\varepsilon>0$，都存在自然数 $N$，使得只要 $n>N$，就有

$$|x_n|<\varepsilon,$$

那么我们就称 $\{x_n\}$ 为无穷小序列。

用符号表示，"$\{x_n\}$ 是无穷小序列"这件事可以写成：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbf{N})(\forall n>N)(|x_n|<\varepsilon).$$

这就是说：只要我们取 $n$ 足够大，$|x_n|$ 可以小于任何预先指定的正数。"序列 $\{y_n\}$ 不是无穷小序列"这件事可以用符号表示成

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall N\in\mathbf{N})(\exists n>N)(|y_n|\geqslant\varepsilon).$$

**几何解释** 考察以 0 点为中心的开区间

$$(-\varepsilon,\varepsilon).$$

我们把这开区间叫做 0 点的 $\varepsilon$ 邻域。用几何的语言来描述，"$\{x_n\}$ 是无穷小序列"意味着：不论 0 点的邻域怎样小，序列 $\{x_n\}$ 从某一项之后的各项都要进入到这邻域之中。

**例6** $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 是无穷小序列。事实上，我们有

$$|x_n| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

对任何 $\varepsilon>0$，要使 $\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，只须 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$。我们可以取大于 $\dfrac{2}{\varepsilon}$ 的任意一个自然数作为 $N$。例如可取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$。对于这样选取的 $N\in\mathbf{N}$，只要 $n>N$，就有

$$|x_n|\leqslant 2/n<\varepsilon.$$

**例7** 设$a\in\mathrm{R}$，$|a|>1$，则

$$s_n=\frac{1}{a^n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

是无穷小序列。事实上

$$\left|\frac{1}{a^n}\right|=\frac{1}{|a|^n}$$

$$=\frac{1}{(1+(|a|-1))^n}<\frac{1}{n(|a|-1)}.$$

要使$\frac{1}{n(|a|-1)}<\varepsilon$，只须$n>\frac{1}{\varepsilon(|a|-1)}$。我们可以取大于$\frac{1}{\varepsilon(|a|-1)}$的任意自然数作为$N$，例如可取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon(|a|-1)}\right]+1$。于是，只要$n>N$，就有

$$|s_n|=\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{n(|a|-1)}<\varepsilon.$$

**例8** 设$a\in\mathrm{R}$，$|a|>1$，则

$$t_n=\frac{n}{a^n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

是无穷小序列。

事实上，对于$n\geqslant 2$，我们有

$$\left|\frac{n}{a^n}\right|=\frac{n}{|a|^n}=\frac{n}{(1+(|a|-1))^n}$$

$$<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(|a|-1)^2}$$

$$=\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}.$$

要使

$$\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}<\varepsilon,$$

只须

$$n>\frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2}+1.$$

我们可以取大于$\frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2}+1$的任意自然数作为$N$，例如可取

$N=\left[\frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2}\right]+2$. 对这样选取的$N\in\mathbf{N}$，只要$n>N$，就有

$$|t_n|<\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}<\varepsilon.$$

在上面各例中，我们采取逐步倒推的方式，从任意给定的$\varepsilon$出发，寻找无穷小序列定义所要求的$N$. 因为只需要指出这样的$N$存在，所以在倒推的过程中，允许适当地放宽不等式，以简化我们的讨论. 这种放宽不等式的办法，可以概括为以下简单的引理：

**引理** 设$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$是实数序列，并设存在$N_0\in\mathbf{N}$，使得

$$|\alpha_n|\leqslant\beta_n,\quad \forall n>N_0.$$

如果$\{\beta_n\}$是无穷小序列，那么$\{\alpha_n\}$也是无穷小序列.

**证明** 对任意的$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbf{N}$，使得$n>N_1$时$|\beta_n|<\varepsilon$. 我们取

$$N=\max\{N_0,N_1\}.$$

则当$n>N$时，就有

$$|\alpha_n|\leqslant\beta_n<\varepsilon.\quad\square$$

仔细检查上面几个例题，我们发现在证明过程中实际上都用了类似于这引理的推理方式. 在例7中，需要判断什么时候$\left|\frac{1}{a^n}\right|<\varepsilon$，我们放宽为判断什么时候$\frac{1}{n(|a|-1)}<\varepsilon$. 在例8中，代替不等式$\left|\frac{n}{a^n}\right|<\varepsilon$，我们考察较容易的不等式

$$\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}<\varepsilon.$$

**例9** 考察序列

$$a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

因为

$$0\leqslant a_n\leqslant\underbrace{\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n\text{项}}=\frac{1}{n},$$

所以$\{a_n\}$是无穷小序列。

### 1.c 有界序列与无穷小序列的性质

**引理** 如果$\{a_n\}$是无穷小序列，那么它也是有界序列。

**证明** 对于$\varepsilon=1$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$|a_n|<1.$$

记

$$K=\max\{|a_1|,\cdots,|a_N|,1\},$$

则显然有

$$|a_n|\leqslant K, \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \quad \square$$

**定理1** 关于有界序列与无穷小序列，有以下结果：

(1) 两个有界序列的和与乘积都是有界序列。即如果$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是有界序列，那么

$$\{x_n+y_n\} \text{ 与 } \{x_n y_n\}$$

都是有界序列；

(2) 两个无穷小序列$\{a_n\}$与$\{\beta_n\}$之和

$$\{a_n+\beta_n\}$$

也是无穷小序列；

(3) 无穷小序列$\{a_n\}$与有界序列$\{x_n\}$的乘积$\{a_n x_n\}$是无穷小序列；

(4) $\{\alpha_n\}$是无穷小序列$\Longleftrightarrow\{|\alpha_n|\}$是无穷小序列。

**证明** (1) 我们有

$$|x_n|\leqslant K,\quad \forall n\in\mathbf{N};\qquad |y_n|\leqslant L,\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

于是

$$|x_n+y_n|\leqslant|x_n|+|y_n|\leqslant K+L,\qquad \forall n\in\mathbf{N};$$

$$|x_n y_n|=|x_n||y_n|\leqslant KL,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$和 $N_2\in\mathbf{N}$，分别使得

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2,\qquad \forall n>N_1,$$

和

$$|\beta_n|<\varepsilon/2,\qquad \forall n>N_2.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $n>N$ 时，就有

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(3) 根据定义，存在 $K\in\mathbf{R}$使得

$$|x_n|\leqslant K,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

不妨设 $K>0$。对任意 $\varepsilon>0$，我们有 $\varepsilon/K>0$。因而存在 $N\in\mathbf{N}$，使得 $n>N$ 时，有

$$|\alpha_n|<\varepsilon/K.$$

这时就有

$$|\alpha_n x_n|=|\alpha_n||x_n|<\frac{\varepsilon}{K}K=\varepsilon.$$

(4) 我们有显然的关系

$$||\alpha_n||=|\alpha_n|.\qquad \square$$

**推论** 我们有：

(5) 两个无穷小序列$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$的乘积$\{\alpha_n\beta_n\}$也是无穷小序列；

(6) 实数 $c$ 与无穷小序列$\{\alpha_n\}$的乘积$\{c\alpha_n\}$也是无穷小序列；

(7) 有限个无穷小序列之和仍是无穷小序列，有限个无穷小序列之乘积也是无穷小序列。

**证明** (5) 无穷小序列$\{\beta_n\}$是有界序列。

(6) 常数 $c$ 可以视为有界序列：

$$x_n=c,\qquad n=1,2,\cdots.$$

(7) 利用数学归纳法就可证明。 □

**例10** 设 $b\in\mathbb{R}, b>1, k\in\mathbf{N}$. 则

$$x_n=\frac{n^k}{b^n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

是无穷小序列. 事实上，我们可以记

$$a=b^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{b}.$$

于是有

$$x_n=\left(\frac{n}{a^n}\right)^k.$$

这是 $k$ 个无穷小序列 $t_n=\frac{n}{a^n}$ 的乘积，因而也是无穷小序列.

**例11** 设 $c>0$, 则

$$y_n=\frac{c^n}{n!},\qquad n=1,2,\cdots,$$

是无穷小序列. 为证明这一事实，我们取定一个 $m\in\mathbf{N}$，使得 $m>c$. 显然有

$$\left|\frac{c^n}{n!}\right|=\frac{1}{m!}\cdot\frac{c^n}{(m+1)\cdots n}<\frac{1}{m!}\cdot\frac{c^n}{m^{n-m}}$$

$$=\frac{m^m}{m!}\left(\frac{c}{m}\right)^n,\qquad \forall n>m.$$

因为 $c/m<1$，由例 7 可知 $\left\{\left(\frac{c}{m}\right)^n\right\}$ 是无穷小序列，所以 $\{y_n\}$ 也是无穷小序列.

**例12** 设 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小序列，记

$$\beta_n=\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

则 $\{\beta_n\}$ 也是无穷小序列. 换句话说，以无穷小序列前 $n$ 项的算术

平均数作为通项的序列，也是一个无穷小序列。

**证明** 对任意的$\varepsilon>0$，存在$m\in\mathbf{N}$，使得只要$n>m$，就有

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2.$$

对这取定的$m$，又可取充分大的$p\in\mathbf{N}$，使得

$$\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_m|}{p}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记$N=\max\{m,p\}$，则当$n>N$时，就有

$$\begin{aligned}|\beta_n|&\leqslant\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_m|}{n}+\frac{|\alpha_{m+1}|+\cdots+|\alpha_n|}{n}\\&\leqslant\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_m|}{p}+\frac{|\alpha_{m+1}|+\cdots+|\alpha_n|}{n-m}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-m)\frac{\varepsilon}{2}}{n-m}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

**例13** 设$\{\alpha_n\}$是无穷小序列，并且

$$\alpha_n\geqslant 0,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

我们记

$$\gamma_n=\sqrt[n]{\alpha_1\cdots\alpha_n},\qquad n=1,2,\cdots,$$

则$\{\gamma_n\}$也是无穷小序列。

**证明** 我们有

$$0\leqslant\gamma_n\leqslant\beta_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N},$$

这里

$$\beta_n=\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},\qquad n=1,2,\cdots$$

是无穷小序列(见例12)。 □

**例14** 考察序列

$$x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n!}},\qquad n=1,2,\cdots.$$

因为

$$a_n = 1/n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

是无穷小序列，引用例13就可断定$\{z_n\}$也是一个无穷小序列。

在结束本节之前，我们对无穷小序列定义中的$\varepsilon$再说几句话。这定义中的$\varepsilon$，是可以任意选取的正数。我们用任意选取的$\varepsilon>0$来检验序列$\{u_n\}$，观察是否存在$N\in\mathbf{N}$，能使得

$$n>N \Longrightarrow |u_n|<\varepsilon.$$

其实，如果$\varepsilon$是可以任意选取的正数，那么$2\varepsilon$也是可以任意选取的正数。——对任意的$\varepsilon'>0$，我们总可以选取$\varepsilon=\varepsilon'/2$，使得$2\varepsilon=\varepsilon'$。更一般地，对于取定的$K>0$，如果$\varepsilon$是可以任意选取的正数，那么$K\varepsilon$也是可以任意选取的正数。因此，在有关无穷小序列的讨论中，对所涉及的$\varepsilon$，可以不必过分拘泥。例如，对于定理1中的(2)、(3)两项，可以按以下方式书写证明（实质上当然没有任何改变，但用这种方式写起来更为顺手）：

(2) 对任何$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbf{N}$和$N_2\in\mathbf{N}$，分别使得

$$n>N_1 \Rightarrow |\alpha_n|<\varepsilon$$

和

$$n>N_2 \Rightarrow |\beta_n|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则对$n>N$，就有

$$|\alpha_n+\beta_n| \leqslant |\alpha_n|+|\beta_n| < 2\varepsilon.$$

(3) 设$K>0$，使得

$$|x_n| \leqslant K, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得

$$n>N \Rightarrow |\alpha_n|<\varepsilon.$$

于是，只要$n>N$，就有

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| < K\varepsilon.$$

## §2 收敛序列

### 2.a 收敛序列的定义

数学中常常用一串已知的（或者容易求得的）数值去逼近欲

求的数值．例如，为了求得单位圆的面积$\pi$，人们用圆内接正$n$边形的面积$P_n(n\geqslant 3)$去逼近它，即以$P_n$作为$\pi$的近似值．随着$n$的增大，人们不断地改进$\pi$的近似值的精确程度．在这不断改进的过程中，逐渐产生了朴素的极限概念．公元三世纪，我国数学家刘徽在解释他的"割圆术"的时候说："割之弥细，所失弥少：割之又割，以至于不割，则与圆周合体而无所失矣"．这就是说，只要取$n$充分大，用$P_n$逼近$\pi$的误差可以任意小．$P_n$的极限就应该是$\pi$．

虽然朴素的极限概念产生很早，极限理论的精确阐述则是十八世纪以后的事．下面，我们就来介绍极限的确切含义．

**定义** 设$\{x_n\}$是实数序列，$a$是实数．如果对任意实数$\varepsilon>0$都存在自然数$N$，使得只要$n>N$，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

那么我们就说序列$\{x_n\}$收敛，它以$a$为极限（或者说序列$\{x_n\}$收敛于$a$），记为

$$\lim x_n=a \text{ 或者 } x_n\to a,$$

有时也写为

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a \text{ 或者 } x_n\to a \ (n\to+\infty).$$

不收敛的序列称为发散序列．

**注记** (1) 我们用$|x_n-a|$表示用$x_n$逼近$a$的误差．按照定义，所谓序列$\{x_n\}$以$a$为极限，就是说：只要我们取$n$充分大，就可使得逼近的误差任意小（小于任何预先给定的正数$\varepsilon$）．

(2) 用符号表示，$\lim x_n=a$的定义可以写成：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(|x_n-a|<\varepsilon).$$

而序列$\{y_n\}$不收敛于$b$这件事可以表示为：

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall N\in\mathbb{N})(\exists n>N)(|y_n-b|\geqslant\varepsilon).$$

**几何解释** 设$\varepsilon\in\mathbb{R}$，$\varepsilon>0$．我们把开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$叫做$a$点的$\varepsilon$邻域．极限定义中的不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad \forall n > N,$$

可以写成

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \qquad \forall n > N,$$

即

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \qquad \forall n > N.$$

因此，如果采用几何式的语言，极限的定义可以表述为：不论 $a$ 点的邻域怎样小，序列$\{x_n\}$以某一项之后的所有各项都要进入这邻域之中。

这一几何解释帮助我们形象地理解极限的含义，对很多情况能够提示解决问题的途径。例如，让我们来考虑这样的问题：一个序列$\{x_n\}$能否有两个不同的极限 $a$ 和 $b$？我们可作如下的分析：因为 $a \neq b$，不妨设 $a < b$，可取 $\varepsilon$ 充分小使得 $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ $\left(\text{这只须取 } \varepsilon \text{满足 } 0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}\right)$，于是 $a$ 的$\varepsilon$邻域与 $b$ 的$\varepsilon$邻域不相交(见图1-2)。如果序列$\{x_n\}$从某一项之后的各项全部进入 $a$ 的$\varepsilon$




图 1-2

邻域之中，那么从这一项之后的项就不可能再进入到$b$点的$\varepsilon$邻域之中，因而不可能以 $b$ 为极限。经过这样的分析，我们写出以下的关于极限唯一性的定理的证明。

**定理1** 如果序列$\{x_n\}$有极限，那么它的极限是唯一的。

**证明** 用反证法。假设序列$\{x_n\}$有极限 $a$ 和 $b$，$a < b$。我们取$\varepsilon \in \mathbf{R}$满足

$$0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}.$$

于是，存在$N_1 \in \mathbf{N}$，使得$n > N_1$时

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon;$$

又存在$N_2\in\mathbf{N}$，使得$n>N_2$时

$$b-\varepsilon<x_n<b+\varepsilon.$$

置$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$时，就有

$$b-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

这与$0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$矛盾。 □

我们再来分析如下的问题：设$\{x_n\},\{y_n\}$和$\{z_n\}$都是实数序列，它们满足不等式

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

如果$\{x_n\}$和$\{z_n\}$都是收敛序列，它们的极限都是 $a$：

$$\lim x_n=\lim z_n=a,$$

那么关于序列$\{y_n\}$的收敛性能有什么样的结论呢？我们来考察 $a$ 的任意一个$\varepsilon$邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$。从某一项之后，$x_n$和$z_n$都应落在 $a$ 的这一邻域之中，这时夹在$x_n$和$z_n$之间的$y_n$自然也必须落在这一邻域之中。从这一分析出发，我们得到以下定理的证明。

**定理2**（夹挤原理） 设$\{x_n\},\{y_n\}$和$\{z_n\}$ 都是实数序列，满足条件

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

如果

$$\lim x_n=\lim z_n=a,$$

那么$\{y_n\}$也是收敛序列，并且也有

$$\lim y_n=a.$$

**证明** 对任意$\varepsilon>0$，存在$N_1,N_2\in\mathbf{N}$，使得当$n>N_1$时，

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

当$n>N_2$时，

$$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon.$$

置$N=\max\{N_1,N_2\}$，则$n>N$时，就有

$$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon. \quad □$$

从定义可以看出：无穷小序列就是以 0 为极限的序列；而"序列$\{x_n\}$以 $a$ 为极限"这一陈述等价于说："$\{x_n-a\}$是无穷小序列"。从以上简单的观察，得到了很有用的结果：

**定理3** 设$\{x_n\}$是实数序列，$a$是实数。则以下三陈述等价：

(1) 序列$\{x_n\}$以 $a$ 为极限；

(2) $\{x_n - a\}$是无穷小序列；

(3) 存在无穷小序列$\{\alpha_n\}$使得

$$x_n = a + \alpha_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

**证明** (1) ⇒ (2)： 由定义即可看出。

(2) ⇒ (3)： 设 $\alpha_n = x_n - a$，则$\{\alpha_n\}$是无穷小序列，并且 $x_n = a + \alpha_n$，$n = 1, 2, \cdots$。

(3) ⇒ (1)： 存在$N \in \mathbf{N}$，使得$n > N$时

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

这时

$$|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon. \quad \square$$

**例1** 试证$\lim \frac{n}{n+1} = 1$。

**证明** 对任意的$\varepsilon > 0$，要使

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

只须

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

取大于$\frac{1}{\varepsilon} - 1$的任意自然数作为$N$（例如取$N = [1/\varepsilon]$），则当$n > N$时，就有

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \quad \square$$

**例2** 求证$\lim \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4} = \frac{1}{3}$。

**证明** 我们有

$$\left|\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4} - \frac{1}{3}\right| = \frac{5n - 2}{3(3n^2 + 2n + 4)}$$

$$< \frac{5n}{9n^2} < \frac{1}{n}.$$

只须取大于$1/\varepsilon$的任何自然数作为$N$（例如取$N=[1/\varepsilon]+1$），则当$n>N$时，就有

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon. \quad \square$$

**例3** 设$a>1$，求证$\lim\sqrt[n]{a}=1$。

**证明** 因为$a>1$，所以$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}>1$。令

$$\alpha_n=a^{1/n}-1, \quad n=1,2,\cdots,$$

则$\alpha_n>0$。我们来证明$\{\alpha_n\}$是无穷小序列。事实上，由

$$a=(1+\alpha_n)^n>1+n\alpha_n$$

可得

$$\alpha_n<\frac{a-1}{n}.$$

这证明了$\{\alpha_n\}$是无穷小序列。 $\square$

**例4** 求证$\lim\sqrt[n]{n}=1$。

**证明** 置$\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$，则$\alpha_n\geqslant 0$。我们有

$$\begin{aligned}n&=(1+\alpha_n)^n\\&=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots\\&\geqslant\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2.\end{aligned}$$

由此可得

$$0\leqslant\alpha_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \forall n\geqslant 2.$$

要使

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon,$$

只须

$$n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1.$$

取$N=[2/\varepsilon^2]+2$，则当$n>N$时，就有

$$0\leqslant\alpha_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon. \quad \square$$

**例 5** 求证 $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)=1/2$。

**证明** 我们有

$$\sqrt{n^2+n}-n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\left|\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$$

$$<\frac{1}{2(2\sqrt{n})^2}=\frac{1}{8n}. \quad \square$$

**例 6** 已知 $\lim x_n=a$，求证

$$\lim\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

**证明** 设 $\alpha_n=x_n-a$，$n=1,2,\cdots$。则 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小序列。我们有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

由 § 1 中例12可知 $\left\{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right\}$ 是无穷小序列，因而

$$\lim\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a. \quad \square$$

### 2.b 收敛序列的性质

**定理 4** 收敛序列 $\{x_n\}$ 是有界的。

**证明** 设 $\lim x_n=a$，则对于 $\varepsilon=1>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$-|a|-1\leqslant a-1<x_n<a+1\leqslant|a|+1.$$

即

$$|x_n|<|a|+1.$$

记$K=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,|a|+1\}$，则有

$$|x_n|\leqslant K,\quad \forall n\in\mathbf{N}.\quad \Box$$

**定理 5** (1) 设$\lim x_n=a$，则$\lim|x_n|=|a|$。

(2) 设$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$\lim(x_n\pm y_n)=a\pm b.$$

(3) 设$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$\lim(x_n y_n)=ab.$$

(4) 设$x_n\neq 0$ ($n=1,2,\cdots$)，$\lim x_n=a\neq 0$，则

$$\lim\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}.$$

**证明** (1) $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$。

(2) 我们有

$$|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|$$

对任意$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbf{N}$和$N_2\in\mathbf{N}$，分别使得

$$当 n>N_1时，|x_n-a|<\varepsilon/2,$$

和

$$当 n>N_2时，|y_n-b|<\varepsilon/2.$$

记$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，就有

$$\begin{aligned}&|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|\\&\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

(3) 因为收敛序列是有界的，所以存在$K\in\mathbb{R}$使得

$$|y_n|\leqslant K,\quad n=1,2,\cdots.$$

不妨设$K>0$。又可取$L\in\mathbb{R}$使得

$$L>|a|.$$

于是，我们有

$$|x_n y_n-ab|=|(x_n-a)y_n+a(y_n-b)|$$

$$\leqslant |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|$$
$$\leqslant K|x_n - a| + L|y_n - b|.$$

对任意$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbf{N}$和$N_2\in\mathbf{N}$分别使得

$$当n>N_1时，|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

和

$$当n>N_2时，|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

置$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，就有

$$|x_n y_n - ab| \leqslant K|x_n - a| + L|y_n - b|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(4) 因为$\lim x_n = a$，所以对于$|a|/2>0$，存在$N_0\in\mathbf{N}$，使得当$n>N_0$时，

$$|x_n - a| < |a|/2.$$

这时

$$|x_n| = |a-(a-x_n)| \geqslant |a| - |a-x_n| > |a|/2,$$

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a-x_n|}{|x_n||a|} \leqslant \frac{2}{|a|^2}|x_n - a|.$$

对任意$\varepsilon>0$，存在$N_1\in\mathbf{N}$，使得当$n>N_1$时，

$$|x_n - a| < \frac{|a|^2}{2}\varepsilon.$$

置$N=\max\{N_0,N_1\}$，则当$n>N$时，就有

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leqslant \frac{2}{|a|^2}|x_n - a| < \varepsilon. \quad \square$$

**推论** (5) 设$\lim x_n = a, c\in\mathbb{R}$，则

$$\lim(cx_n) = ca.$$

(6) 设$x_n\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$，$\lim x_n = a\neq 0$，$\lim y_n = b$，则

$$\lim\frac{y_n}{x_n} = \frac{b}{a}.$$

**注记** 定理 5 及其推论中的(1)—(6)可以形式地写成以下公式：

(1) $\lim|x_n| = |\lim x_n|$；

(2) $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$；

(3) $\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$；

(4) $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim x_n}$，

(5) $\lim(cx_n) = c\lim x_n$；

(6) $\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim y_n}{\lim x_n}$。

但在运用时一定要注意上面这些公式成立的条件。——条件的确切陈述见定理 5 及其推论，概括说来就是：这些公式等号右边的式子要有意义！

**例 7** 求证对于$0<b\leqslant 1$，也有

$$\lim\sqrt[n]{b} = 1。$$

**证明** $b=1$的情形是显然的。只须考虑 $0<b<1$ 的情形。在例 3 中我们已经知道：对于$a>1$有

$$\lim\sqrt[n]{a} = 1。$$

对于$0<b<1$，记$a=\frac{1}{b}$，则$a>1$，并且$\sqrt[n]{b}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$。于是

$$\lim\sqrt[n]{b} = \lim\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$= \frac{1}{\lim\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{1} = 1。 \quad \square$$

**例 8** 求$\lim\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}$，这里$c\geqslant 0$。

**解** 先来看$c=0$的情形，这时

$$\lim\sqrt[n]{0+\frac{1}{n}} = \lim\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1。$$

再来看$c>0$的情形，这时我们有

$$\sqrt[n]{c}<\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{c+1},$$

因而 $\lim\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}=1$。综合两种情形，我们得到

$$\lim\sqrt[n]{c+\frac{1}{n}}=1,\qquad \forall c\geqslant 0.$$

**例 9** 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}\quad(|q|<1).$$

**解** 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\frac{1}{1-q}.$$

**例10** 设$\{a_n\}$是实数序列，$a_n>0$（$\forall n$），$\lim a_n=A>0$。求证

$$\lim\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A.$$

**证明** 由不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

和

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$$

可得

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

我们记

$$x_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)},$$

$$y_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$z_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

因为

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N},$$

$$\lim x_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)}=A,$$

$$\lim z_n=A,$$

所以有

$$\lim y_n=A. \qquad \square$$

在有关极限的一些证明中，常常用到涉及绝对值的不等式和加减辅助项的技巧。例如在极限的加法法则与乘法法则的证明中，我们用到以下关系

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|,$$

$$|x_ny_n-ab|=|x_ny_n-ay_n+ay_n-ab|$$
$$\leqslant|x_n-a||y_n|+|a||y_n-b|.$$

若引用定理3，通过无穷小序列来表示收敛序列，则往往可以使证明更加平易显然。例如，序列极限的加法法则与乘法法则可以这样来证明：

设$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则

$$x_n=a+\alpha_n,\qquad y_n=b+\beta_n,$$

这里的$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$都是无穷小序列。于是

$$x_n+y_n=a+b+\alpha_n+\beta_n,$$

$$x_ny_n=ab+a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n.$$

因为$\{\alpha_n+\beta_n\}$和$\{a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n\}$都是无穷小序列，所以

$$\lim(x_n + y_n) = a + b,$$

$$\lim(x_n y_n) = ab.$$

在讨论中引入无穷小序列，常常可使复杂的问题简单化。我们再举两个例子。

**例11** 设$\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$。若记

$$u_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

则有

$$\lim u_n = ab.$$

**证明** 我们有

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n,$$

这里的$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$是无穷小序列。于是

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} \\ &= ab + \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} b + a \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} \\ &\quad + \frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}. \end{aligned}$$

无穷小序列也是有界序列，可设

$$|\beta_n| \leqslant L, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因为

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant \frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{n} \cdot L,$$

所以

$$\left\{\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right\}$$

是无穷小序列。又因为

$$\left\{\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} b\right\}, \qquad \left\{a \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n}\right\}$$

也都是无穷小序列，所以

$$\lim u_n = ab. \quad \square$$

**例12** 设 $\lim x_n = a$。求证

$$\lim \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

**证明** 我们有

$$x_n = a + \alpha_n,$$

这里$\{\alpha_n\}$是无穷小序列。于是

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} \\
&= \frac{(a+\alpha_1) + 2(a+\alpha_2) + \cdots + n(a+\alpha_n)}{n^2} \\
&= \frac{n+1}{2n}a + \frac{\frac{1}{n}\alpha_1 + \frac{2}{n}\alpha_2 + \cdots + \frac{n}{n}\alpha_n}{n}.
\end{aligned}$$

因为

$$\left| \frac{\frac{1}{n}\alpha_1 + \frac{2}{n}\alpha_2 + \cdots + \frac{n}{n}\alpha_n}{n} \right| \leqslant \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|}{n},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} \\
&= \lim \frac{n+1}{2n} a + \lim \frac{\frac{1}{n}\alpha_1 + \frac{2}{n}\alpha_2 + \cdots + \frac{n}{n}\alpha_n}{n} \\
&= \frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.c 收敛序列与不等式

**定理 6** 如果 $\lim x_n < \lim y_n$（这就是说：如果 $\lim x_n = a$，$\lim y_n = b$，$a < b$），那么存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $n > N$ 时有

$$x_n < y_n.$$

**证明** 对于 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}>0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$ 和 $N_2\in\mathbf{N}$，分别使得

$$\text{当 } n>N_1 \text{ 时，} a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

和

$$\text{当 } n>N_2 \text{ 时，} b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon.$$

置 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $n>N$ 时就有

$$x_n<a+\varepsilon=b-\varepsilon<y_n. \quad \square$$

**注记** 定理 6 的几种常遇到的特殊情形分述如下：

(1) 设 $x_n\equiv a$ 是常数列，这时定理 6 成为：如果 $\lim y_n>a$，那么存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$y_n>a;$$

(2) 设 $y_n\equiv b$ 是常数列，这时定理 6 成为：如果 $\lim x_n<b$，那么存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$x_n<b;$$

(3) 综合(1)和(2)，我们得到：如果

$$a<\lim z_n<b,$$

那么存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$a<z_n<b.$$

**定理7** 如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是收敛序列，并且满足条件

$$x_n\leqslant y_n,\quad \forall n>N_0,$$

那么

$$\lim x_n\leqslant\lim y_n.$$

**证明** 用反证法。如果 $\lim x_n>\lim y_n$，那么根据定理 6 存在 $N_1\in\mathbf{N}$，使得 $n>N_1$ 时

$$x_n>y_n.$$

取 $n>\max\{N_0,N_1\}$就得到矛盾。 $\square$

**注记** 即使有

$$x_n<y_n,\quad \forall n\in\mathbf{N},$$

也不能保证 $\lim x_n < \lim y_n$。例如，设 $x_n=\frac{1}{2n}$，$y_n=\frac{1}{n}$，则显然有

$$x_n < y_n, \quad n=1,2,\cdots,$$

但

$$\lim x_n = \lim y_n = 0。$$

例13 设给定自然数 $k \geqslant 2$。试对充分大的 $n$ 判别以下三式的大小顺序：

$$n^k, \quad k^n, \quad n!。$$

解 因为 $\lim \frac{n^k}{k^n}=0<1$（参看§1的例10），所以对充分大的 $n$ 应有

$$\frac{n^k}{k^n}<1, \quad n^k<k^n。$$

又因为 $\lim \frac{k^n}{n!}=0<1$（参看§1的例11），所以对充分大的 $n$ 应有

$$\frac{k^n}{n!}<1, \quad k^n<n!。$$

这样，对充分大的 $n$ 应有：

$$n^k<k^n<n!。$$

例14 设 $A>0$，$a \neq 0$。问当 $n$ 充分大的时候

$$An^2+Bn+C \quad 与 \quad \frac{an^2+bn+c}{An^2+Bn+C}$$

各有怎样的符号？

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left(A+B\frac{1}{n}+C\frac{1}{n^2}\right)=A>0,$$

所以对充分大的 $n$ 有

$$A+B\frac{1}{n}+C\frac{1}{n^2}>0,$$

$$An^2+Bn+C$$
$$=n^2\left(A+B\frac{1}{n}+C\frac{1}{n^2}\right)>0.$$

又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{an^2+bn+c}{An^2+Bn+C}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{a+b\frac{1}{n}+c\frac{1}{n^2}}{A+B\frac{1}{n}+C\frac{1}{n^2}}=\frac{a}{A},$$

所以当 $n$ 充分大的时候，$\frac{an^2+bn+c}{An^2+Bn+C}$ 与 $\frac{a}{A}$ 同号，因而与 $a$ 同号。

## §3 收 敛 原 理

按照定义，序列$\{x_n\}$称为是收敛的，如果存在一个实数 $a$，使得

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(|x_n-a|<\varepsilon).$$

但是，我们事先怎样来判断能否有这样的实数 $a$ 存在呢？换句话说，怎样来识别一个序列是否收敛呢？本节就来讨论这个问题。

### 3.a 单调收敛原理

**定义** (1) 若实数序列$\{x_n\}$满足

$$x_n\leqslant x_{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

则称这序列是递增的或者单调上升的，记为

$$\{x_n\}\uparrow.$$

(2) 若实数序列$\{y_n\}$满足

$$y_n\geqslant y_{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

则称这序列是递减的或者单调下降的，记为

$$\{y_n\}\downarrow.$$

(3) 单调上升的序列和单调下降的序列统称为单调序列.

**注记** 如果(1)中的不等式总是严格地成立，即

$$x_n < x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

那么我们就说序列$\{x_n\}$是严格递增的或者严格单调上升的. 如果(2)中的不等式总是严格地成立，即

$$y_n > y_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

那么我们就说序列$\{y_n\}$是严格递减的或者严格单调下降的.

**定理1** 递增序列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是它有上界.

**证明** 必要性. 收敛序列是有界的.

充分性. 设序列$\{x_n\}$有上界，则存在上确界

$$a = \sup\{x_n\}.$$

对任意$\varepsilon > 0$，显然$a - \varepsilon < a$，因而存在$x_N$使得

$$a - \varepsilon < x_N \leqslant a.$$

于是当$n > N$时，就有

$$a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant a.$$

这证明了

$$\lim x_n = a = \sup\{x_n\}. \quad \square$$

**推论** 递减序列$\{y_n\}$收敛的充分必要条件是它有下界.

**证明** 令$x_n = -y_n$，$n = 1, 2, \cdots$，就可以把这情形转化为定理1中的情形(直接证明也很容易). $\square$

**注记** (1) 我们看到：递增有界序列$\{x_n\}$的极限即它的上确界

$$\lim x_n = \sup\{x_n\}.$$

同样可以证明：递减有界序列$\{y_n\}$的极限即它的下确界

$$\lim y_n = \inf\{y_n\}.$$

(2) 因为一个序列的收敛性及其极限值都只与这序列的尾部(即从某一项之后的项)有关，所以定理1及其推论中的单调性条件可以削弱为"从某一项之后单调"，即

$$x_n \leqslant x_{n+1}, \quad \forall n > N,$$

及

$$y_n \geqslant y_{n+1}, \quad \forall n > N.$$

**例1** 设 $a>0$，求极限 $\lim\frac{a^n}{n!}$.

**解** 记 $x_n=\frac{a^n}{n!}$，$n=1,2,\cdots$. 显然有

$$x_n>0, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

对于充分大的 $n$ 有

$$\frac{a}{n+1}<1.$$

这时就有

$$x_n=\frac{a^n}{n!}>\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{a}{n+1}=x_{n+1}.$$

由单调收敛原理可知：序列 $\{x_n\}$ 有极限. 记这极限为 $x$. 在以下等式中取极限：

$$x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n,$$

我们得到

$$x=0\cdot x=0.$$

这就是说

$$\lim\frac{a^n}{n!}=0.$$

**例2** 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$，
$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$（$n$ 重根号），$\cdots$. 试求 $\lim x_n$.

**解** 序列 $\{x_n\}$ 是递增的：

$$x_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ (n+1\text{重根号})$$
$$>\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+0}}}\ (n\text{ 重根号})$$
$$=x_n, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

我们用归纳法证明序列 $\{x_n\}$ 有上界 2. 首先，显然有 $x_1=\sqrt{2}<2$. 其次，如果 $x_n<2$，那么 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$. 这证明了

$$x_n<2, \quad \forall n\in \mathbf{N}.$$

根据单调收敛原理可设

$$\lim x_n = a.$$

从等式

$$x_{n+1}^2 - x_n - 2 = 0$$

取极限得

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

解此方程得 $a=2$ 或 $a=-1$。但显然应该有 $a\geqslant 0$，所以

$$\lim x_n = a = 2.$$

**例3** 设 $a>0, x_0>0$。序列$\{x_n\}$由以下递推公式定义：

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n=1,2,\cdots.$$

试证

$$\lim x_n = \sqrt{a}.$$

**证明** 我们有

$$t+\frac{1}{t}\geqslant 2, \quad \forall t>0.$$

（这是算术平均数与几何平均数不等式的一种特殊情形。直接证明也很容易。）由此可得

$$x_n = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{a}, \quad \forall n\in \mathbf{N}.$$

由此又可得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1, \quad \forall n\in \mathbf{N},$$

也就是

$$x_{n+1}\leqslant x_n, \quad \forall n\in \mathbf{N}.$$

序列$\{x_n\}$递减而有下界，可设

$$\lim x_n = x.$$

显然有

$$x\geqslant\sqrt{a}>0.$$

序列$\{x_n\}$满足递推公式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

在这公式中让 $n\to+\infty$ 取极限就得到

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right),$$

即

$$x^2=a.$$

但已知 $x>0$，所以 $x=\sqrt{a}$。我们得到：

$$\lim x_n=x=\sqrt{a}. \quad \square$$

例 3 提供了一种通过迭代近似求算术平方根的计算方法。

**例4** 我们来考察序列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

仿照§1 例 3 中的作法，可以将 $x_n$ 表示为

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

在 $x_{n+1}$ 的类似表示式中，前面 $n+1$ 项的每一项都比 $x_n$ 表示式中相应的项大。不仅如此，$x_{n+1}$ 的表示式还比 $x_n$ 的表示式多一个正项。通过这样的观察，我们得知

$$x_n<x_{n+1},\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

在§1 的例 3 中，我们已经证明了序列 $\{x_n\}$ 的有界性：

$$0\leqslant x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}<1+\frac{1}{1-1/2}=3.$$

序列$\{x_n\}$递增而且有界，因而必定收敛。人们约定用字母 $e$ 表示这序列的极限值：

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

数 $e$ 是数学中最重要的常数之一，它是一个无理数，其最初几位数字为

$$2.718281828459045\cdots.$$

在数学的理论研究与应用中，以 $e$ 为底的对数起着重要的作用。这种对数称为自然对数。因而数 $e$ 被称为自然对数的底。正实数 $x$ 的自然对数通常记为 $\ln x$ 或者 $\log x$，即

$$\ln x = \log x = \log_e x.$$

### 3.b 闭区间套原理与波尔查诺-维尔斯特拉斯定理

如果一列闭区间$\{[a_n, b_n]\}$满足条件

(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim(b_n - a_n) = 0$,

那么我们就说这列闭区间形成一个闭区间套。

从单调收敛原理出发，我们将推导关于两个"相向"单调的序列的收敛原理。这后一原理可以用几何式的语言陈述如下：

如果$\{[a_n, b_n]\}$形成一个闭区间套，那么存在唯一的实数 $c$，属于所有这些闭区间$[a_n, b_n]$。

人们把这一结论叫做"闭区间套原理"，它在数学分析的许多证明中起重要作用。下面，我们以"相向"单调序列的形式，陈述并证明这一原理。读者应该能认出：这样的表述与"闭区间套"式的几何表述说的是一回事。

**定理2(闭区间套原理)** 如果实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足条件

(1) $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$, $\forall n > 1$,

(2) $\lim(b_n - a_n) = 0$,

那么

(i) 序列$\{a_n\}$与序列$\{b_n\}$收敛于相同的极限值：

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

(ii) $c$ 是满足以下条件的唯一实数：

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**证明** (i) 由条件(1)可得

$$a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1.$$

我们看到：序列$\{a_n\}$递增而有上界 $b_1$。同样可以证明序列$\{b_n\}$递减而有下界 $a_1$。根据单调收敛原理，$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是收敛序列。由条件(2)可得

$$\lim a_n - \lim b_n = \lim(b_n - a_n) = 0.$$

这证明了序列$\{a_n\}$与序列$\{b_n\}$的极限相等：

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

(ii) 因为

$$c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\},$$

所以显然有

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

如果实数$c'$也满足条件

$$a_n \leqslant c' \leqslant b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

那么在上式中让 $n \to +\infty$取极限就得到

$$c' = \lim a_n = \lim b_n = c.$$

这证明了满足所述条件的实数 $c$ 是唯一的。 □

**注记** 闭区间套原理的各条件对于保证结论成立都是十分重要的。以几何式的陈述为例，我们说明以下事项，请读者予以注意。

(1) 如果一列闭区间不是一个套在另一个之中的，那么这列闭区间就有可能不含公共点。闭区间序列$\{[n, n+1/n]\}$就是这样的例子。

(2) 如果一列闭区间一个套在另一个之中，但这列闭区间的长度不收缩于 0，那么属于这列闭区间的公共点就不止一个。例如闭区间序列$\{[-1-1/n, 1+1/n]\}$的公共点就形成一个闭区间

$[-1,1]$。

(3) 如果把闭区间套换成了"开区间套"

$$\{(a_n,b_n)\}$$

(仍要求区间的长度收缩于0)，那么仍存在

$$c=\lim a_n=\lim b_n,$$

但 $c$ 可以不属于各开区间 $(a_n,b_n)$。例如开区间套 $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$ 就是这种情形。

**定义** 设 $\{x_n\}$ 是实数序列，而

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$$

是一串严格递增的自然数，则

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},x_{n_{k+1}},\cdots$$

也形成一个实数序列。我们把这序列 $\{x_{n_k}\}$ 叫做序列 $\{x_n\}$ 的子序列(或者部分序列)。请注意，子序列 $\{x_{n_k}\}$ 的序号是最下面的标号 $k$。

随着递增自然数串 $\{n_k\}$ 的不同选择，我们得到序列 $\{x_n\}$ 的不同的子序列 $\{x_{n_k}\}$。但如果序列 $\{x_n\}$ 本身是收敛的，那么它的所有的子序列都收敛于同一极限。

**定理3** 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，则它的任何子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也都收敛于同一极限 $a$。

**证明** 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

当 $k>N$ 时就有 $n_k\geq k>N$，因而这时有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon. \qquad \square$$

即使序列 $\{x_n\}$ 本身不收敛，仍然有可能它的某个子序列 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛的。例如序列

$$x_n=(-1)^n,\quad n=1,2,\cdots,$$

本身并不收敛，但它的子序列 $\{x_{2k}\}$ 却收敛于1。这方面的一个

十分普遍的结果是著名的波尔查诺-维尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理：任意有界序列$\{x_n\}$都具有收敛的子序列。我们来分析这一定理的证明思路。假如$\{x_n\}$有一子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于$c$，那么在$c$点的任意小的邻域内都应含有$\{x_{n_k}\}$的无穷多项，因而也含有序列$\{x_n\}$的无穷多项。以下将看到，证明这一定理的关键在于：寻找这样一个点$c$，在该点的任意邻近都聚集着序列$\{x_n\}$的无穷多项。我们将用对分区间法(又称波尔查诺方法)来搜寻这样一个点。

**定理4**(Bolzano-Weierstrass) 设$\{x_n\}$是有界序列，则它具有收敛的子序列.

**证明** 序列$\{x_n\}$有界，因而可设

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

用中点$\frac{a+b}{2}$把闭区间$[a,b]$对分成两个闭子区间

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

在这两个闭子区间中，至少有一个含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，我们把这一闭子区间记为

$$[a_1, b_1].$$

再把闭区间$[a_1,b_1]$对分成两个闭子区间

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right].$$

在这两个闭子区间中，又至少有一个含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，我们把这一闭子区间记为

$$[a_2, b_2].$$

一般地，如果已经求得闭区间$[a_k,b_k]$，它含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，那么就再把这闭区间对分为两个闭子区间

$$\left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right].$$

在这两个闭子区间中，至少有一个含有序列$\{x_n\}$的无穷多项，记这一闭子区间为

$$[a_{k+1},b_{k+1}].$$

用上述方式，我们得到一串闭区间

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots,$$

其中第$k$个闭区间$[a_k,b_k]$的长度为

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}.$$

根据闭区间套原理，可以断定存在一个实数$c$，满足

$$c\in[a_k,b_k],\quad \forall k\in\mathbf{N}.$$

我们来证明序列$\{x_n\}$有一个子序列收敛于$c$。首先，因为$\{x_n\}$有无穷多项在$[a_1,b_1]$之中，我们可以选取其中某一项，把它记为$x_{n_1}$。然后，因为$\{x_n\}$有无穷多项在$[a_2,b_2]$之中，我们可以选取其中在$x_{n_1}$之后的某一项，把它记为$x_{n_2}$。继续这样做下去。一般地，在$x_{n_k}$选定之后，因为$\{x_n\}$有无穷多项在$[a_{k+1},b_{k+1}]$之中，我们可以选取其中在$x_{n_k}$之后的某一项，把它记为$x_{n_{k+1}}$。用这种方式，我们得到$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k}\}$，它满足

$$x_{n_k}\in[a_k,b_k],\quad \forall k\in\mathbf{N}.$$

因为

$$|x_{n_k}-c|\leqslant b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k},\quad \forall k\in\mathbf{N},$$

所以

$$\lim x_{n_k}=c. \quad \square$$

### 3.c 柯西收敛原理

如果序列$\{x_n\}$收敛于$a$，那么这序列中序号充分大的两项$x_m$和$x_n$都接近于$a$，因而这两项本身也就彼此接近。更确切地说，对任意$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$m,n>N$时，有

$$|x_m-a|<\varepsilon/2,\quad |x_n-a|<\varepsilon/2$$

这时就有

$$
\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - a) - (x_n - a)| \\
&\leqslant |x_m - a| + |x_n - a| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

**定义** 如果序列$\{x_n\}$满足条件：对任意 $\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$m,n>N$时，就有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

那么我们就称这序列为*基本序列*（或者*柯西序列*）。

用符号表示，基本序列的条件可以写成：

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbf{N})(\forall m,n>N)(|x_m - x_n|<\varepsilon).$$

从上面的讨论可知：收敛序列必定是基本序列。我们将要证明的一个更为重要的事实是：任何基本序列也必定是收敛序列。——这就是著名的*柯西收敛原理*（通常就简单地称为*收敛原理*）。

**引理** 基本序列$\{x_n\}$是有界的。

**证明** 对于 $\varepsilon=1$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要是 $m,n>N$，就有

$$|x_m - x_n| < 1.$$

于是，对于 $n>N$，我们有

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|.$$

若记

$$K = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\},$$

则有

$$|x_n| \leqslant K, \quad \forall n\in\mathbf{N}. \quad \square$$

波尔查诺和柯西首先指出以下重要的原理。

**定理5（收敛原理）** 序列$\{x_n\}$收敛的必要充分条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $m,n>N$ 时，就有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

换句话说：

序列$\{x_n\}$收敛$\Longleftrightarrow$序列$\{x_n\}$是基本序列。

**证明** 必要性部分的证明已见于上面的叙述。这里证明充分性。因为基本序列是有界的，引用波尔查诺-维尔斯特拉斯定理，可以断定存在序列$\{x_n\}$的收敛子序列$\{x_{n_k}\}$，设

$$x_{n_k} \to a \quad (k \to +\infty).$$

对任意$\varepsilon > 0$，存在$N \in \mathbf{N}$，使得当$m, n > N$时，就有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon/2.$$

又，存在$N_1 \in \mathbf{N}$，使得$k > N_1$时有

$$|a - x_{n_k}| < \varepsilon/2.$$

以下取定一个$k > \max\{N, N_1\}$。对于任意的$n > N$有

$$|a - x_n| \leqslant |a - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

这证明了

$$\lim x_n = a. \qquad \square$$

在收敛原理的陈述中，$m$和$n$是任意两个大于$N$的自然数。我们可以认为$m > n$，于是$m$可以写成

$$m = n + p.$$

这样，收敛原理可以陈述为以下形式（这种形式有时更便于运用）：

序列$\{x_n\}$收敛的必要充分条件是：对任意$\varepsilon > 0$，存在$N \in \mathbf{N}$，使得对于任意$n > N$和$p \in \mathbf{N}$，都有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

**例5** 序列$x_n = (-1)^n (n = 1, 2, \cdots)$不收敛。事实上，不论$k$多么大，总有

$$|x_{2k} - x_{2k-1}| = 2.$$

**例6** 考察序列

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

在§1的例5中，我们已经证明这序列是无界的，因而它不可能收

敛。这里，我们用收敛原理再一次验证这一判断。事实上，不论 $n$ 多么大，总有

$$|x_{2n}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

因而序列$\{x_n\}$不可能收敛。

**例7** 设 $q\in\mathbb{R},|q|<1$,

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=1+q+\cdots+q^{n-1}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

试证序列$\{x_n\}$收敛。

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|q|^n+\cdots+|q|^{n+p-1}\\&=|q|^n(1+\cdots+|q|^{p-1})\\&=|q|^n\frac{1-|q|^p}{1-|q|}\leqslant\frac{|q|^n}{1-|q|}.\end{aligned}$$

我们已经知道 $\lim|q|^n=0$（参看§1中的例7）。因而，对任意$\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得 $n>N$ 时有

$$|q|^n<(1-|q|)\varepsilon.$$

这时就有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.\quad\square$$

**例8** 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. 试证序列$\{x_n\}$收敛。

**证明** 我们有

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

对任意 $\varepsilon>0$，可取 $N=[1/\varepsilon]+1$，则对任意的 $n>N$ 和 $p\in\mathbf{N}$ 都有

$$|x_{n+p}-x_n|<1/n<\varepsilon. \qquad \square$$

## §4 无 穷 大

在发散序列之中，仍有一类序列具明显的变化趋势，这就是无穷大序列。本节讨论这一类序列。

### 4.a 无穷极限

考察序列

$$u_n=n, \quad n=1,2,\cdots,$$
$$v_n=n^2-(-1)^n n, \quad n=1,2,\cdots,$$
$$w_n=1+1/2+\cdots+1/n, \quad n=1,2,\cdots.$$

这些序列虽然不收敛，但却有一定的变化趋势，即对充分大的 $n$，序列的项可以大于任意大的正数。这是无穷大序列的一种情形。

关于一般的无穷大序列，我们有以下定义。

**定义** (1) 设 $\{x_n\}$ 是实数序列。如果对任意正实数 $E$，存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$x_n>E,$$

那么我们就说序列 $\{x_n\}$ 发散于 $+\infty$，记为

$$\lim x_n=+\infty.$$

(2) 设 $\{y_n\}$ 是实数序列。如果对任意正实数 $E$，存在自然数 $N$，使得 $n>N$ 时，就有

$$y_n < -E,$$

那么我们就说序列$\{y_n\}$发散于$-\infty$，记为

$$\lim y_n = -\infty.$$

(3) 设$\{z_n\}$是实数序列。如果序列$\{|z_n|\}$发散于$+\infty$，即$\lim |z_n| = +\infty$，那么我们就称$\{z_n\}$为无穷大序列，记为

$$\lim z_n = \infty.$$

显然(1)和(2)中的情形都是无穷大序列的特例.

**几何解释** 我们引入记号

$$(E, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > E\},$$

$$(-\infty, -E) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -E\}.$$

用几何的语言，$\lim x_n = +\infty$这一事实可以陈述如下：对任意$E > 0$，序列$\{x_n\}$从某一项之后的所有各项都进入$(E, +\infty)$之中。类似地可以作出$\lim y_n = -\infty$或$\lim z_n = \infty$的几何解释.

**注记** 具有无穷极限的序列，与具有有穷极限的序列比较，在性质上有很大的不同. 对两种情形必须加以区别. 所以当序列具有有穷极限$a$时，我们说它收敛于$a$，而当序列具有无穷极限的时候，我们说它发散于$+\infty$，$-\infty$或$\infty$.

我们扩充记号$\sup E$和$\inf F$的使用范围，约定：

(1) 若集合$E \subset \mathbb{R}$无上界，则记

$$\sup E = +\infty;$$

(2) 若集合$F \subset \mathbb{R}$无下界，则记

$$\inf F = -\infty.$$

在作了上述约定之后，有关单调序列极限的定理可扩充如下。

**定理1** 单调序列必定具有(有穷的或无穷的)极限. 更具体地说，就是：

(1) 递增序列$\{x_n\}$有极限，

$$\lim x_n = \sup\{x_n\};$$

(2) 递减序列$\{y_n\}$有极限，

$$\lim y_n = \inf\{y_n\}.$$

**证明** (1) 如果$\{x_n\}$有上界，那么$\{x_n\}$收敛，并且

$$\lim x_n = \sup\{x_n\} < +\infty.$$

如果$\{x_n\}$无上界，那么对任意 $E>0$，存在 $x_N$，满足

$$x_N > E.$$

于是当 $n>N$ 时，就有

$$x_n \geqslant x_N > E.$$

这证明了

$$\lim x_n = +\infty = \sup\{x_n\}.$$

(2) 可仿照(1)的情形给出证明。 □

与有穷极限的情形类似，对于定号的无穷极限，也有所谓"夹挤原理"。

**定理2** 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是实数序列，满足条件

$$x_n \leqslant y_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

则有：

(1) 如果 $\lim x_n = +\infty$，那么 $\lim y_n = +\infty$；

(2) 如果 $\lim y_n = -\infty$，那么 $\lim x_n = -\infty$。

**证明** (1) 对任意 $E>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，$x_n>E$，这时就有

$$y_n \geqslant x_n > E.$$

(2) 可仿照(1)的情形给予证明。 □

以下定理也与有穷极限的相应结果类似。

**定理3** 如果 $\lim x_n = +\infty$(或 $-\infty$，或$\infty$)，那么对于$\{x_n\}$的任意子序列$\{x_{n_k}\}$也有

$$\lim x_{n_k} = +\infty(\text{或} -\infty, \text{或}\infty).$$

**证明** 留给读者作为练习。 □

关于无穷大序列与无穷小序列的关系，我们有

**定理4** 设 $x_n\neq 0$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则

$\{x_n\}$是无穷大序列$\Longleftrightarrow\{1/x_n\}$是无穷小序列。

**证明** 留给读者作为练习。 □

### 4.b 扩充的实数系

我们给实数系$\mathbb{R}$添加两个符号$-\infty$和$+\infty$，这样就得到了*扩充的实数系*

$$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

我们在$\overline{\mathbb{R}}$中保留$\mathbb{R}$中元素的顺序关系，并且补充定义涉及$+\infty$和$-\infty$的顺序关系如下：

$$-\infty<x<+\infty,\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

无论是有穷极限或者是定号的无穷极限，一个序列的极限都不能多于一个。换句话说，对于扩充后的情形，极限的唯一性仍然保持。

**定理5** 实数序列$\{x_n\}$至多只能有一个极限，即至多只能有一个$c\in\overline{\mathbb{R}}$，使得

$$\lim x_n=c.$$

**证明** 如果$\{x_n\}$收敛于$c\in\mathbb{R}$，那么它是有界的，因而不能有无穷极限。如果$\{x_n\}$发散于$+\infty$，那么$\{x_n\}$无界，因而不能有有穷极限，并且从定义可以看出它也不能发散于$-\infty$。对于$\{x_n\}$发散于$-\infty$的情形，可类似地进行讨论。 □

对于有穷极限的情形，我们曾证明以下的运算法则：

$$\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n;$$

$$\lim(x_ny_n)=\lim x_n\cdot\lim y_n;$$

$$\lim\frac{y_n}{x_n}=\frac{\lim y_n}{\lim x_n}\quad(x_n\neq0,\lim x_n\neq0).$$

上列每一个公式成立的条件是该式等号右边的各极限存在。

我们希望将上述运算法则尽可能地加以推广，使之能适用于出现无穷极限的某些情形。为此，在$\overline{\mathbb{R}}$中规定以下一些运算：

(1) 如果 $x\in\mathbb{R}$，那么

$$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty,$$
$$x-(\pm\infty)=\mp\infty;$$

(2) 如果 $x\in\mathbb{R}$，$x>0$，那么

$$x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\pm\infty;$$

如果 $y\in\mathbb{R}$，$y<0$，那么

$$y\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot y=\mp\infty;$$

(3) 如果 $x\in\mathbb{R}$，那么

$$\frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0;$$

(4)
$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,$$
$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty,\quad (-\infty)-(+\infty)=-\infty,$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,\quad (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,$$
$$(-\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty.$$

注意，在$\overline{\mathbb{R}}$中，对于 $(+\infty)-(+\infty)$，$(+\infty)+(-\infty)$，$(-\infty)+(+\infty)$，$0\cdot(\pm\infty)$，$+\infty/+\infty$，$-\infty/+\infty$，$+\infty/-\infty$，$-\infty/-\infty$等，都没有作定义。

在作了有关规定之后，我们可以验证：以下极限的运算法则对于允许出现无穷极限的情形也仍然成立，只要这些公式的右端有意义：

$$\lim(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n,$$
$$\lim(x_ny_n)=\lim x_n\cdot\lim y_n,$$
$$\lim\frac{y_n}{x_n}=\frac{\lim y_n}{\lim x_n}.$$

我们将这些公式的验证留给读者作为练习。

## 附录　斯笃兹（Stolz）定理

如果 $\lim x_n=\infty,\lim y_n=\infty$，那么对序列$\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$的极限状况，不能利用极限的运算法则得出一般性的结论，必须作具体的分析

讨论。人们把这样的情形叫做∞/∞未定型或者∞/∞未定式。先请看几个简单的例子。

**例1** 若 $x_n = n^2$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

**例2** 若 $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{2}.$$

**例3** 若 $x_n = n, y_n = n^2, n = 1, 2, \cdots$, 则有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = +\infty.$$

**例4** 若 $x_n = n$, $y_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则序列$\{y_n/x_n$无极限。

未定型的极限状况，有时比较难判定。斯笃兹定理给我们提供了处理某些未定型极限的有效方法。为证明这定理，先要作一些准备。

在§1的例12中，曾经讨论过如下形状的序列变换(算术平均变换)：

$$\beta_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

在那里，我们证明了：如果$\{\alpha_n\}$是无穷小序列，那么$\{\beta_n\}$也是无穷小序列。下面，我们讨论更一般的一种序列变换。

**定义** 设给定了一个由非负实数排成的无穷三角形数表(无穷三角阵)

$$\begin{array}{llll} t_{11} & & & \\ t_{21}, & t_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{n1}, & t_{n2}, & \cdots, & t_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

如果这数表满足条件

(1) $\sum_{k=1}^{n} t_{nk}=1$, $\quad \forall n \in \mathbf{N}$,

(2) 对任意给定的 $k$ 都有

$$\lim_{n \to +\infty} t_{nk}=0,$$

那么我们就把这样的数表$\{t_{nk}\}$叫做托布利兹(Toeplitz)数表或者托布利兹阵，并把序列变换

$$\beta_n=\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k, \qquad n=1,2,\cdots,$$

叫做托布利兹变换.

前面提到的算术平均变换是托布利兹变换的一种特殊情形，它所对应的托布利兹数表是

$$t_{nk}=1/n,$$

$$n=1,2,\cdots, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

**引理1** 设$\{t_{nk}\}$是任意一个托布利兹数表，$\{a_n\}$是任意一个无穷小序列，并设

$$\beta_n=\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k, \qquad n=1,2,\cdots,$$

则有

$$\lim \beta_n=0.$$

**证明** 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $m \in \mathbf{N}$，使得只要 $k>m$，就有

$$|a_k|<\varepsilon/2.$$

对这取定的 $m$，又可取 $p \in \mathbf{N}$ 充分大，使得 $n>p$ 时，有

$$t_{n1}|a_1|+\cdots+t_{nm}|a_m|<\varepsilon/2.$$

我们记

$$N=\max\{m,p\}.$$

于是，对于 $n>N$，就有

$$\begin{aligned}|\beta_n| &\leqslant t_{n1}|a_1|+\cdots+t_{nm}|a_m| \\ &\quad+t_{n(m+1)}|a_{m+1}|+\cdots+t_{nn}|a_n| \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\left(t_{n(m+1)}+\cdots+t_{nn}\right)\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

**引理2** 设$\{t_{nk}\}$是一个托布利兹数表，$\{u_n\}$是收敛于$a$的一个实数序列，

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} u_k, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

则有

$$\lim v_n = a.$$

**证明** 我们有

$$u_n = a + \alpha_n,$$

这里$\{\alpha_n\}$是无穷小序列。于是

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk}(a + \alpha_k) \\ &= a\sum_{k=1}^{n} t_{nk} + \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k \\ &= a + \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k. \end{aligned}$$

由引理1可知

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} t_{nk}\alpha_k \right\}$$

是无穷小序列。因而有

$$\lim v_n = a. \qquad \square$$

**斯笃兹定理** 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是实数序列，$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$，并且

$$\lim x_n = +\infty.$$

如果存在有穷极限

$$\lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a,$$

那么也就一定有

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = a.$$

**证明** 为书写方便，我们记

$$x_0 = y_0 = 0.$$

考察托布利兹数表

$$t_{nk} = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n},$$

$$n = 1, 2, \cdots, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

用这数表对序列

$$u_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

作变换就得到

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} t_{nk} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_n} \cdot \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ &= \frac{1}{x_n} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \frac{y_n}{x_n}, \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

我们有

$$\lim u_n = a.$$

利用引理 2 就得到

$$\lim v_n = a,$$

即

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = a. \qquad \square$$

**例5** 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足条件

(i) $a_n > 0$, $a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$,

(ii) $\lim \frac{b_n}{a_n} = l$,

则有

$$\lim \frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_1 + \cdots + a_n} = \lim \frac{b_n}{a_n} = l.$$

**例6** 考察序列

$$c_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

利用斯笃兹定理，我们得到

$$\lim c_n = \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$

$$= \lim \frac{n^p}{(p+1)n^p - \cdots}$$

$$= \frac{1}{p+1}.$$

关于更一般的未定型极限，我们将在第八章§1中作进一步的讨论。

## §5 函数的极限

在预篇中我们看到，求切线、求瞬时速度等许多实际问题都归结为求极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

这类极限的更一般的形式是 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$，其中 $F(x)$ 是一定的函数。

一般说来，在讨论极限 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ 的时候，我们只要求 $F(x)$ 在 $x_0$ 点附近除这点之外的地方有定义，并不要求 $F(x)$ 在 $x_0$ 点有定义。这样才能适用于较广泛的情形——包括我们上面所说的求切线、求瞬时速度等问题的情形。为了叙述方便，对于 $x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\eta \in \mathbb{R}$，$\eta > 0$，我们把

$$U(x_0, \eta) = (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \eta\}$$

称为 $x_0$ 点的 $\eta$ 邻域，而把

$$\check{U}(x_0, \eta) = (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \setminus \{x_0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \eta\}$$

称为 $x_0$ 点的去心 $\eta$ 邻域。 在讨论函数的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ 的时候，我们一般只要求函数 $F(x)$ 在 $x_0$ 点的某个去心邻域上有定义。此外，对于 $H \in \mathbb{R}$，$H > 0$，我们还把

$$\check{U}(+\infty, H) = (H, +\infty)$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > H\}$$

称为 $+\infty$ 的去心 $H$ 邻域，类似地把

$$\check{U}(-\infty, H) = (-\infty, -H)$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -H\}$$

称为 $-\infty$ 的去心 $H$ 邻域。

关于函数的极限，我们将介绍两种定义方式。第一种是海因(Heine)提出的序列式定义；第二种是柯西(Cauchy)提出的 $\varepsilon - \delta$ 式定义(包括 $\varepsilon - \Delta$，$E - \delta$ 和 $E - \Delta$ 等形式的定义)。前一种方式能够统一地处理各种极限问题，在某些情况下使用起来颇为方便；后一种方式有十分清晰的几何解释，应用尤为普遍。当然，这两种定义是完全等价的.希望读者能够熟练地掌握其中每一种，并且能够在应用时视实际情况的需要灵活地选用最适宜的一种。

### 5.a 函数极限的序列式定义

为了叙述方便作如下约定：对于 $a \in \overline{\mathbb{R}}$，我们用 $\check{U}(a)$ 表示 $a$ 的某个去心邻域——当 $a$ 是有穷实数时，$\check{U}(a)$ 的形式为 $\check{U}(a, \eta)$；当 $a = \pm\infty$ 时，$\check{U}(a)$ 的形式为 $\check{U}(\pm\infty, H)$。

**定义 I** 设 $a, A \in \overline{\mathbb{R}}$，并设函数 $f(x)$ 在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义。如果对于任何满足条件 $x_n \to a$ 的序列 $\{x_n\} \subset \check{U}(a)$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $A$ 为极限，那么我们就说当

$x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

**注记** 在上面定义中，$a$ 和 $A$ 都可以是有穷实数或者 $\pm\infty$，配合起来计有九种情形，如下表所示。请读者分别对每一种情形具体地研究极限的含义。

| | $A$ 有穷 | $A = +\infty$ | $A = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a$ 有穷 | | | |
| $a = +\infty$ | | | |
| $a = -\infty$ | | | |

我们还可以用类似的方式定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

即：设函数 $f(x)$ 对于 $|x| > H$ 有定义。如果对于任何满足条件 $|x_n| > H$，$x_n \to \infty$ 的序列 $\{x_n\}$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $A$ 为极限，那么我们就说当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

又，如果

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty \quad (\lim_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty),$$

那么就记

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad (\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty).$$

**例1** 考察极限 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$.

我们有不等式

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

对任何满足条件 $x_n \neq 0$，$x_n \to 0$ 的序列 $\{x_n\}$ 都有

$$\sin x_n \to 0.$$

因而
$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

例2　考察更一般的极限 $\lim\limits_{x\to a}\sin x$，这里 $a\in\mathbf{R}$.

我们有

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin a|&=\left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|.\end{aligned}$$

对任何满足条件 $x_n\neq a$，$x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}$ 都有

$$\sin x_n\to\sin a.$$

这就是说 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

例3　考察极限 $\lim\limits_{x\to a}\cos x$.

我们有

$$\begin{aligned}|\cos x-\cos a|&=\left|2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|.\end{aligned}$$

由此很容易证明

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a.$$

例4　考察极限 $\lim\limits_{x\to a}|x|$.

利用不等式

$$||x|-|a||\leqslant|x-a|,$$

容易证明

$$\lim_{x\to a}|x|=|a|.$$

例5　设 $a\in\mathbf{R}$，$a>0$. 试考察极限

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}.$$

我们取$\eta\in(0,a)$，考察$\check{U}(a,\eta)$中的收敛于$a$的任意序列$\{x_n\}$。因为

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}|x_n-a|,$$

所以 $\lim\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。这证明了

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$

在上面几个例子中，$f(x)$在$a$点有定义，并且$\lim\limits_{x\to a}f(x)$恰好就等于$f(a)$，这是极限的一种情形。象这样的情形(即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$的情形)，我们说函数$f(x)$在$a$点连续。连续性是数学分析最重要的概念之一。本书将在下一章中对连续性问题作深入的讨论。这里需要提醒读者，函数的极限决不仅止于连续的情形。请看下面的例子。

**例6** 考察极限$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.这里的函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处没有定义。利用不等式

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|,\quad\forall x\neq 0,$$

很容易证明

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

**例7** 考察极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$。这里的函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0$处没有定义。从不等式

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x,\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

可得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

因为 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数，上式对于 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 也成立，所以

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\quad \forall x\in \check{U}\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

对任何满足条件 $x_n\to 0$ 的序列 $\{x_n\}\subset \check{U}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，我们有

$$\cos x_n<\frac{\sin x_n}{x_n}<1$$

和

$$\lim \cos x_n=1\ (参看例3),$$

所以

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

这证明了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

**例8** 考察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

我们有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|},\quad \forall x\neq 0.$$

对任何满足条件 $x_n\neq 0, x_n\to\infty$ 的序列 $\{x_n\}$，都有

$$\lim\frac{\sin x_n}{x_n}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

利用关于序列极限已有的结果，可以轻而易举地证明关于函数极限的一些相应的结果。

**定理1** 函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 是唯一的。

**证明** 对任意取定的满足条件 $x_n \neq a$, $x_n \to a$ 的序列 $\{x_n\}$, 相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 的极限至多只能有一个。 □

**定理 2**(夹挤原理) 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $a$ 的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义，并且满足不等式

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \quad \forall x \in \check{U}(a).$$

如果

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A,$$

那么

$$\lim_{x \to a} g(x) = A.$$

**证明** 对任何满足条件 $x_n \to a$ 的序列 $\{x_n\} \subset \check{U}(a)$, 我们有

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$$

和

$$\lim f(x_n) = \lim h(x_n) = A,$$

因而

$$\lim g(x_n) = A. \quad \square$$

**定理 3** 关于函数的极限，有以下的运算法则：

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x);$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}.$$

以上每一公式成立的条件是该式右端有意义。

**证明** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义，并且

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B.$$

如果 $A+B$ 有意义，那么对于任何满足条件

$$x_n \to a, \quad \{x_n\} \subset \check{U}(a)$$

的序列 $\{x_n\}$ 都有

$$\lim(f(x_n)+g(x_n))=\lim f(x_n)+\lim g(x_n)$$
$$=A+B.$$

这证明了

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$

其他公式可仿此证明。 □

以下关于复合函数求极限的定理很有用。

**定理4** 设函数 $g$ 在 $b$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(b)$ 上有定义，$\lim_{y\to b}g(y)=c$. 又设函数 $f$ 在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义，$f$ 把 $\check{U}(a)$ 中的点映到 $\check{U}(b)$ 之中（用记号表示就是：$f(\check{U}(a))\subset\check{U}(b)$）并且 $\lim_{x\to a}f(x)=b$. 则有

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=c.$$

**证明** 对任何满足条件 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a)$，我们有 $\{f(x_n)\}\subset\check{U}(b)$ 和 $f(x_n)\to b$，因而

$$\lim g(f(x_n))=c.$$

这证明了

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=c.$$ □

**注记** 通常把定理 4 的结论形式地写成

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{y\to b}g(y),$$

并把这式子说成是：在极限式 $\lim_{x\to a}g(f(x))$ 中作变元替换 $y=f(x)$。这样的写法和说法用起来很方便，但应检查所要求的条件是否得到满足（按定理 4 检查）。

**例9** 我们把常数 0 叫做零多项式。不是常数 0 的多项式叫做非零多项式。利用定理 3 的结果，我们得到多项式函数与有理分式函数求极限的法则如下：

(1) 设 $P(x)$ 是任意多项式，$a\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$$

(2) 设 $P(x)$ 是任意多项式，$Q(x)$ 是非零多项式，$a\in\mathbf{R}$，$P(a)$ 和 $Q(a)$ 不都是 0，则

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}.$$

(3) 设 $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$，

$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$，$a_0\neq 0$，$b\neq 0$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{如果 } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } m=n,\\ 0, & \text{如果 } m<n.\end{cases}$$

事实上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{m-n}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_m}{x^m}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_n}{x^n}}\right)$$

$$=\begin{cases}+\infty, & \text{如果 } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } m=n,\\ 0, & \text{如果 } m<n.\end{cases}$$

同样可证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{如果 } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } m=n,\\ 0, & \text{如果 } m<n.\end{cases}$$

**例10** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

**解** 令 $y=\sqrt{1+x}$，则 $x=y^2-1$，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}.$$

**例11** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$.

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

**例12** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$和$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

**解**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

## 5.b 函数极限的$\varepsilon$-$\delta$式定义

**定义Ⅱ**：设$a, A\in\mathbb{R}$，并设函数$f(x)$在$a$点的某个去心邻域$\check{U}(a,\eta)$上有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$0<|x-a|<\delta$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么我们就说：$x\to a$时函数$f(x)$的极限是$A$，记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

**几何解释** 用几何的语言，上述定义可陈述如下：对于$A$的任

何 $\varepsilon$ 邻域 $U(A,\varepsilon)$，存在 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域 $\check{U}(a,\delta)$，使得只要 $x$ 进入 $\check{U}(a,\delta)$，相应的函数值 $f(x)$ 就进入 $U(A,\varepsilon)$：

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in\check{U}(a,\delta))(f(x)\in U(A,\varepsilon)).$$

**例13** 设 $a\in\mathbb{R}, a>0$。试用 $\varepsilon$–$\delta$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$。

**证明** 我们有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|.$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{a,\sqrt{a}\,\varepsilon\}$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon. \qquad \square$$

**例14** 试用 $\varepsilon$–$\delta$ 式定义证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

**证明** 对于 $x\in(0,\pi/2)$，我们有

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x,$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

即

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

因为 $\sin x/x$ 和 $x^2/2$ 都是偶函数，显然上式对于 $x\in(-\pi/2,0)$ 也成立，所以

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2},\qquad \forall x\in\check{U}\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

对任意 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\min\{\pi/2,\sqrt{2\varepsilon}\}$，只要 $0<|x-0|=|x|<\delta$，就有

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{x^2}{2}<\varepsilon. \qquad \square$$

**定理5** 设$a,A\in\mathbb{R}$，并设函数$f(x)$在$a$的某个去心邻域$\check{U}(a,\eta)$上有定义。则关于极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

的两个定义(定义Ⅰ和定义Ⅱ$_1$)彼此等价.

**证明** 先设定义Ⅰ的条件得到满足，我们来证明这时定义Ⅱ$_1$的条件也得到满足(用反证法)。假设不是这样，那么存在$\varepsilon>0$，对于不论怎样小的$\delta>0$，都有$x'\in\check{U}(a,\eta)$使得

$$0<|x'-a|<\delta,\qquad |f(x')-A|\geqslant\varepsilon.$$

特别地，对于任意$n\in\mathbf{N}$都存在$x_n\in\check{U}(a,\eta)$使得

$$0<|x_n-a|<1/n,\qquad |f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon.$$

但这时序列$\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$，它收敛于$a$，而相应的函数值序列$\{f(x_n)\}$不能收敛于$A$。这一矛盾说明了：当定义Ⅰ的条件得到满足时，定义Ⅱ$_1$的条件也一定得到满足。

我们再来证明：当定义Ⅱ$_1$的条件得到满足时，定义Ⅰ的条件也一定得到满足。设对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$0<|x-a|<\delta$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则对于任何满足条件$x_n\to a$的序列$\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得$n>N$时有

$$0<|x_n-a|<\delta,$$

这时就有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon.$$

这样，我们又证明了：当定义Ⅱ$_1$的条件得到满足时，定义Ⅰ的条件也一定得到满足。至此，我们证明了对所述的情形定义Ⅰ与定义Ⅱ$_1$的等价性。 □

从$\varepsilon$-$\delta$定义出发，也很容易证明有关函数极限的运算法则。

**引理** 设$a,A\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$。则存在$\eta>0$，使得函数$f$在$\check{U}(a,\eta)$上有界。

**证明** 对于$\varepsilon=1>0$，存在$\eta>0$，使得对于$x\in\check{U}(a,\eta)$有

$$|f(x)-A|<1.$$

这时就有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(x)-A|+|A|\\&<1+|A|.\end{aligned}$$ □

**引理** 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，这里$a,A\in\mathbb{R}$，$A\neq0$。则存在$\eta>0$，使得对于$x\in\check{U}(a,\eta)$有

$$|f(x)|>|A|/2.$$

**证明** 对于$\varepsilon=|A|/2>0$，存在$\eta>0$，使得对于$x\in\check{U}(a,\eta)$有

$$|f(x)-A|<|A|/2.$$

这时就有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\geqslant|A|-|f(x)-A|\\&>|A|-|A|/2=|A|/2.\end{aligned}$$ □

**定理3′** 设$a,A,B\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to a}1/f(x)=1/A\quad(A\neq0).$$

**证明** 我们有不等式

$$\begin{aligned}&|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\\&\quad\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|.\end{aligned}$$

对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta_1,\delta_2>0$，使得

$$0<|x-a|<\delta_1\text{时，}|f(x)-A|<\varepsilon/2,$$

$$0<|x-a|<\delta_2\text{时，}|g(x)-B|<\varepsilon/2.$$

置$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对于

$$0<|x-a|<\delta,$$

就有

$$
\begin{aligned}
&|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\\
&\quad\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|\\
&\quad<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这证明了第一个公式。

其他两个公式的证明可仿此作出。请读者自行补足证明的细节。我们这里只写出所用到的不等式：存在 $\eta>0$，使得对于 $x\in\check{U}(a,\eta)$ 有

$$
\begin{aligned}
&|f(x)g(x)-AB|\\
&\quad=|f(x)g(x)-Ag(x)+Ag(x)-AB|\\
&\quad\leqslant|f(x)-A||g(x)|+|A||g(x)-B|\\
&\quad\leqslant K|f(x)-A|+L|g(x)-B|\\
&\qquad\qquad(K=|B|+1,\ L=|A|+1)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{A}\right|\\
&\quad=\frac{|A-f(x)|}{|f(x)A|}\leqslant\frac{2}{|A|^2}|A-f(x)|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

在证明极限的以下一些性质的时候，采用 $\varepsilon$-$\delta$ 式定义比较便利。

**定理6** 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$，则存在 $\delta>0$，使得对于 $x\in\check{U}(a,\delta)$ 有

$$f(x)<g(x).$$

**证明** 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，$A<B$。则对于 $\varepsilon=(B-A)/2>0$，存在 $\delta_1,\delta_2>0$，使得

$$
\begin{aligned}
&0<|x-a|<\delta_1\text{ 时，}A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,\\
&0<|x-a|<\delta_2\text{ 时，}B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

记 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对于 $x\in\check{U}(a,\delta)$ 就有

$$f(x)<A+\varepsilon=B-\varepsilon<g(x). \qquad \square$$

**注记** 定理 6 的几种常常遇到的特殊情形如下：

(1) 设 $f(x)\equiv A$ 是常函数，这时定理成为：如果$\lim\limits_{x\to a} g(x)>A$，那么存在 $\delta>0$，使得对于 $x\in\check{U}(a,\delta)$有

$$g(x)>A;$$

(2) 设 $g(x)\equiv B$ 是常函数，这时定理成为：如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)<B$，那么存在 $\delta>0$，使得对于 $x\in\check{U}(a,\delta)$有

$$f(x)<B;$$

(3) 综合(1)和(2)，我们得到：如果

$$A<\lim_{x\to a} h(x)<B,$$

那么存在 $\delta>0$，使得对于 $x\in\check{U}(a,\delta)$有

$$A<h(x)<B.$$

**推论** 如果在 $a$ 的去心邻域 $\check{U}(a,\eta)$中有

$$f(x)\leqslant g(x),$$

并且存在极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \quad \lim_{x\to a} g(x)=B,$$

那么就有

$$A\leqslant B.$$

**定理7**(关于函数极限的收敛原理) 设函数 $f(x)$在 $\check{U}(a,\eta)$上有定义。则使得有穷极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $x$ 和 $x'$ 适合

$$0<|x-a|<\delta, \quad 0<|x'-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

**证明** 必要性 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\in\mathbb{R}$。则对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon/2.$$

于是，只要

$$0<|x-a|<\delta, \quad 0<|x'-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-f(x')|\leqslant|f(x)-A|+|f(x')-A|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

充分性　设对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|x-a|<\delta$，$0<|x'-a|<\delta$，就有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$。我们来证明这时一定存在有穷极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$。设序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$ 满足条件 $x_n\to a$，则存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $n>N$ 时有

$$0<|x_n-a|<\delta.$$

于是，当 $m,n>N$ 时，就有

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon.$$

根据序列的收敛原理可以断定：$\{f(x_n)\}$ 收敛。我们证明了：任何满足条件 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$ 都使得相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛。据此又可断定：所有这样的序列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛于同一极限 $A$。我们用反证法证明这后一论断。假设存在序列 $\{x'_n\}$ 和 $\{x''_n\}$，满足条件

$$\{x'_n\},\{x''_n\}\subset\check{U}(a,\eta),$$
$$x'_n\to a,\qquad x''_n\to a,$$
$$\lim f(x'_n)=A',\qquad \lim f(x''_n)=A'',\qquad A'\neq A'',$$

那么我们可以定义一个序列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_n=\begin{cases}x'_k, & \text{如果 } n=2k-1,\\ x''_k, & \text{如果 } n=2k.\end{cases}$$

这序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$ 满足条件 $x_n\to a$，但 $\{f(x_n)\}$ 不收敛，与上面已证明的结果矛盾。这样，我们证明了，任何满足条件 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset\check{U}(a,\eta)$ 都使得相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于同一值 $A$。这就是说

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.\qquad\Box$$

在定义 I 中，包括了：$a\in\mathbb{R}$，$a=+\infty$，$a=-\infty$ 或 $a=\infty$ 与 $A\in\mathbb{R}$，$A=+\infty$，$A=-\infty$ 或 $A=\infty$ 等各种情形（$a$ 与 $A$ 相配合总共

有十六种情形)。而定义Ⅱ$_1$只涉及其中$a\in\mathbb{R},A\in\mathbb{R}$这一种情形。但其他所有的情形都可采取类似的方式加以处理。我们这里举例加以介绍，不再一一详述。

**定义Ⅱ$_2$**($a=+\infty,A\in\mathbb{R}$的情形)　设函数$f(x)$对于$x>H$有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\Delta>0$，使得只要$x>\Delta$就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么我们就说：当$x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限是$A$，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

**定义Ⅱ$_3$**($a\in\mathbb{R},A=+\infty$的情形)　设函数$f(x)$在$a$点的去心邻域$\check{U}(a,\eta)$上有定义。如果对任意$E>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$0<|x-a|<\delta,$$

就有

$$f(x)>E,$$

那么我们就说：当$x\to a$时函数$f(x)$的极限是$+\infty$，记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty.$$

**定义Ⅱ$_4$**($a=+\infty,A=+\infty$的情形)　设函数$f(x)$对于$x>H$有定义。如果对任意$E>0$，存在$\Delta>0$，使得只要$x>\Delta$，就有

$$f(x)>E,$$

那么我们就说：当$x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限是$+\infty$，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

其他情形的第二种定义也都可以仿照这些格式写出。

对所有这些情形，第二种定义与第一种定义的相应情形的等价性，都可以仿照定理5予以证明。

收敛原理可适用于判断函数趋于有穷极限的一切情形。例如，$x\to+\infty$时函数$f(x)$趋于有穷极限的充分必要条件是：对任意$\varepsilon>0$，存在$\Delta>0$，使得只要$x,x'>\Delta$，就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

对所有这些情形，收敛原理的陈述和证明都可仿照定理7作出。

## §6 单侧极限

在上一节中，我们要求函数 $f$ 在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a,\eta)$ 上有定义，在此条件下讨论了 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 的极限。常常有这样的情形：函数 $f$ 只在 $a$ 点的单侧（左侧或右侧）有定义，或者我们需要分别研究函数 $f$ 在 $a$ 点每一侧的状态。对这些情形，需要引入单侧极限的概念。我们仍有序列式和 $\varepsilon$-$\delta$（或$E$-$\delta$）式两种定义方式。

**定义**（序列方式） 设 $a\in\mathbb{R}$，$A\in\overline{\mathbb{R}}$，并设函数$f(x)$在$(a-\eta,a)$有定义。如果对任意满足条件$x_n\to a$的序列$\{x_n\}\subset(a-\eta,a)$，相应的函数值序列$\{f(x_n)\}$都以$A$为极限，那么我们就说：$x\to a-$时函数$f(x)$的极限为$A$，记为

$$\lim_{x\to a-}f(x)=A.$$

（有些文献采用记号 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A$。）

**定义**（$\varepsilon$-$\delta$方式） 设$a,A\in\mathbb{R}$，并设函数 $f(x)$在$(a-\eta,a)$有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$a-\delta<x<a,$$

就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么我们就说：$x\to a-$时函数$f(x)$的极限为$A$，记为

$$\lim_{x\to a-}f(x)=A.$$

**定义**（$E$-$\delta$方式） 设$a\in\mathbb{R}$，并设函数 $f(x)$在$(a-\eta,a)$有定义。如果对任意$E>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$a-\delta<x<a,$$

就有

$$f(x)>E,$$

那么我们就说当$x\to a-$时函数$f(x)$的极限为$+\infty$，记为

$$\lim_{x\to a-} f(x)=+\infty.$$

以上涉及的都是左侧极限。对右侧极限

$$\lim_{x\to a+} f(x),$$

可以用类似的方式予以讨论。关于单侧极限与双侧极限的关系，有以下结果：

**定理1** 设$a\in\mathbb{R}$，并设函数$f(x)$在$a$点的去心邻域$\check{U}(a,\eta)$上有定义。则极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在的充分必要条件是两个单侧极限存在并且相等：

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=A.$$

当这条件满足时，我们有

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

**证明** 我们只对有穷极限的情形写出证明。无穷极限情形的讨论留给读者作为练习。

*必要性* 设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$x\in\check{U}(a,\delta)$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

于是，不论对于$x\in(a-\delta,a)$，或者对于$x\in(a,a+\delta)$，都应有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

*充分性* 设$\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$。则对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1,\delta_2>0$，使得

$$x\in(a-\delta_1,a)\text{时，}|f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$x\in(a,a+\delta_2)\text{时，}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

我们取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$。于是，只要

$$x \in \check{U}(a,\delta),$$

就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon. \quad \square$$

与上面的讨论类似，我们也可以将极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

拆成两个“单侧极限”加以考察. 为了便于叙述，我们约定记

$$\check{U}(\infty,H)=(-\infty,-H)\cup(H,+\infty)$$
$$=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|>H\},$$

并把这集合叫做∞的去心邻域.

**定理1′** 设函数$f(x)$在$\check{U}(\infty,H)$上有定义，则极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是两个“单侧极限”存在并且相等：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

当这条件满足时，我们有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

**证明** 可仿照定理1的证明写出. $\square$

**定义** 设函数$f$在集合$S\subset\mathbf{R}$有定义.

(1) 如果对任何$x_1,x_2\in S$，$x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

那么我们就说函数$f$在集合$S$上是递增的或者单调上升的.

(2) 如果对任何$x_1,x_2\in S$，$x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2),$$

那么我们就说函数$f$在集合$S$上是递减的或者单调下降的.

(3) 单调上升函数与单调下降函数统称为单调函数.

**注记** 如果对于任何$x_1,x_2\in S$，$x_1<x_2$，都有严格的不等式

$$f(x_1)<f(x_2),$$

那么我们就说函数 $f$ 在集合 $S$ 上是严格递增的或者严格单调上升的。类似地可以定义什么叫做严格递减或者严格单调下降。

单调函数的单侧极限总是存在的。

**定理2** (1) 设函数$f(x)$在开区间$(a-\eta,a)$上递增（递减），则

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\sup_{x\in(a-\eta,a)}f(x)\quad(\inf_{x\in(a-\eta,a)}f(x)).$$

(2) 设函数$f(x)$在开区间$(a,a+\eta)$上递增（递减），则

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\inf_{x\in(a,a+\eta)}f(x)\quad(\sup_{x\in(a,a+\eta)}f(x)).$$

**证明** 我们仅对函数$f(x)$在开区间$(a-\eta,a)$上递增这一情形给出证明。其他情形的证明留给读者作为练习。

如果

$$\sup_{x\in(a-\eta,a)}f(x)=+\infty,$$

那么对任意$E>0$，存在$x_E\in(a-\eta,a)$，使得

$$f(x_E)>E.$$

记$\delta=a-x_E$，则对于

$$a>x>a-\delta=x_E$$

就有

$$f(x)\geqslant f(x_E)>E.$$

这证明了

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\sup_{x\in(a-\eta,a)}f(x)=+\infty.$$

如果

$$\sup_{x\in(a-\eta,a)}f(x)=A<+\infty,$$

那么对任何 $\varepsilon>0$，有 $A-\varepsilon<A$。根据上确界的定义，存在 $x_\varepsilon\in(a-\eta,a)$，使得

$$A-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leqslant A.$$

记$\delta=a-x_\varepsilon$，则对于$x\in(a-\delta,a)$有

$$a>x>a-\delta=x_\varepsilon,$$

$$A\geqslant f(x)\geqslant f(x_\varepsilon)>A-\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\sup_{x\in(a-\eta,a)}f(x)=A. \qquad \square$$

# 第三章 连续函数

## §1 连续与间断

许多物理量都是随着时间而连续变化的，例如自由落体的高度或者冷却中的固体的温度等等。通常我们说“量$q(t)$随着时间$t$的变化而连续变化”，其确切含义是什么呢？那就是说，量$q(t)$在变化过程中不会突然跳跃，只要时间$t$的改变非常小，相应的量$q(t)$的改变也应该非常小。用极限的语言来表述就是

$$\lim_{t\to t_0} q(t) = q(t_0).$$

一般地，设函数$f(x)$在$x_0$点邻近有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

那么我们就说函数$f$在$x_0$点连续。比照极限定义的两种方式，连续性的定义可以分别陈述为以下两种形式：

**定义Ⅰ** 设函数$f(x)$在$x_0$点的邻域$U(x_0,\eta)$上有定义。如果对任何满足条件$x_n\to x_0$的序列$\{x_n\}\subset U(x_0,\eta)$，都有

$$\lim f(x_n) = f(x_0),$$

那么我们就说函数$f$在$x_0$点连续，或者说$x_0$点是函数$f$的连续点。

**定义Ⅱ** 设函数$f$在$x_0$点的邻域$U(x_0,\eta)$上有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数$f$在$x_0$点连续，或者说$x_0$点是函数$f$的连续点。

仿照第二章§5中的做法，很容易证明以上两种定义方式的

等价性。

**例1** 常值函数$f(x)=c$在每一点$x_0$处都是连续的。这是因为对任何$x$和$x_0$都有

$$|f(x)-f(x_0)|=0.$$

**例2** 设$P(x)$和$Q(x)$是多项式。在第二章§5中，我们证明了

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\quad (Q(x_0)\neq 0).$$

因而多项式函数$P(x)$在任意$x_0\in\mathbf{R}$处连续；有理分式函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$在任何使得$Q(x_0)\neq 0$的$x_0$点处连续。

**例3** 在第二章§5中，我们还证明了

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$$

由此容易得到

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0\quad\left(x_0\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x_0\quad (x_0\neq l\pi).$$

因而基本三角函数在它们有定义的地方都是连续的。

以下一些结果很容易从关于极限的相应结果导出。

**定理1** 设函数$f$在$x_0$点连续，则存在$\delta>0$，使得函数$f$在$U(x_0,\delta)$上有界。

**定理2** 设函数$f(x)$和$g(x)$在$x_0$点连续，则

(1) $f(x)\pm g(x)$在$x_0$处连续；

(2) $f(x)\cdot g(x)$在$x_0$处连续；

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}$在使得$g(x_0)\neq 0$的$x_0$处连续。

**注记** 因为常值函数$f(x)\equiv c$在任意$x_0$点连续，所以从(2)

可以得到：

(4) $cg(x)$在$x_0$点连续。

**定理3** 设函数$f(x)$在$x_0$点连续，则函数$|f(x)|$也在$x_0$点连续。

**证明** 我们有

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|. \quad \square$$

**定理4** 设函数$f(x)$和$g(x)$在$x_0$点连续．如果$f(x_0)<g(x_0)$，那么存在$\delta>0$，使得对于$x\in U(x_0,\delta)$有

$$f(x)<g(x).$$

**注记** 这定理的以下特殊情形常常遇到：

(1) 设$f(x)\equiv A$是常值函数．这时定理4成为：如果$g(x)$在$x_0$点连续，$g(x_0)>A$，那么存在$\delta>0$，使得对于$x\in U(x_0,\delta)$有

$$g(x)>A.$$

(2) 设$g(x)\equiv B$是常值函数．这时定理4成为：如果$f(x)$在$x_0$点连续，$f(x_0)<B$，那么存在$\delta>0$，使得对于$x\in U(x_0,\delta)$有

$$f(x)<B.$$

(3) 综合(1)和(2)的结果，我们得到：如果$h(x)$在$x_0$点连续，$A<h(x_0)<B$，那么存在$\delta>0$，使得对于$x\in U(x_0,\delta)$有

$$A<h(x)<B.$$

以下结果当然也可以从极限的有关定理导出，但由于其特别重要性，我们再一次写出证明（这一次用$\varepsilon$-$\delta$方式）。

**定理5**(复合函数的连续性) 设函数$f(x)$在$x_0$点连续，函数$g(y)$在$y_0=f(x_0)$点连续，那么复合函数$g\circ f(x)=g(f(x))$在$x_0$点连续。

**证明** 对任意$\varepsilon>0$，存在$\sigma>0$，使得只要$|y-y_0|<\sigma$，就有

$$|g(y)-g(y_0)|<\varepsilon.$$

对这$\sigma>0$，又存在$\delta>0$，使得只要$|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-y_0|=|f(x)-f(x_0)|<\sigma.$$

于是，当$|x-x_0|<\delta$时，就有

$$|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)| = |g(f(x))-g(f(x_0))|$$
$$= |g(f(x))-g(y_0)| < \varepsilon. \qquad \square$$

有时候，我们只关心函数$f(x)$在$x_0$点的某一侧(左侧或右侧)的变化，或者需要分别考察函数$f(x)$在$x_0$点各侧的变化。与这些情形相适应，有单侧连续性的概念。

**定义** 设函数$f(x)$在$(x_0-\eta, x_0]$上有定义。如果
$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0),$$
那么我们就说函数$f$在$x_0$点左侧连续。

类似地可以定义右侧连续。

我们引入记号：
$$f(x_0-)=\lim_{x\to x_0-} f(x), \qquad f(x_0+)=\lim_{x\to x_0+} f(x).$$
于是，函数$f$在$x_0$点左侧连续的定义可以写成：
$$f(x_0-)=f(x_0);$$
而函数$f$在$x_0$点右侧连续的定义可以写成：
$$f(x_0+)=f(x_0).$$
我们知道，极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是两个单侧极限存在并且相等，即
$$f(x_0-)=f(x_0+).$$
当这条件满足时就有
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0-)=f(x_0-).$$
因而，函数$f$在$x_0$点连续的定义可以写成
$$f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0).$$
从这些讨论，我们得到：

**定理6 设函数$f(x)$在$U(x_0,\eta)$上有定义，则$f(x)$在$x_0$点连续的充分必要条件是它在这点左侧连续并且右侧连续。**

现在，设函数$f(x)$在$U(x_0,\eta)$有定义但在$x_0$点不连续。依上面的讨论，这时必出现以下两种情形之一。

情形1 函数$f(x)$在$x_0$点的两个单侧极限$f(x_0-)$和$f(x_0+)$都

存在，但

$$f(x_0-)\neq f(x_0+)$$

或者

$$f(x_0-)=f(x_0+)\neq f(x_0);$$

情形2　函数$f(x)$在$x_0$点的至少一个单侧极限不存在。

**定义**　设函数$f(x)$在$U(x_0,\eta)$上有定义，在$x_0$点不连续。如果出现上述情形1，那么我们就说$x_0$点是函数$f$的第一类间断点；如果出现上述情形2，那么我们就说$x_0$点是函数$f$的第二类间断点。

**例4**　考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 0, & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

我们看到：任何$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$都是$f$的连续点，而$x=0$是$f$的第一类间断点。对这一例的情形，因为

$$f(0-)=f(0+)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以只要将函数$f$在$x=0$处的值改变为1就能得到一个处处连续的函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 1, & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

因而我们说$x=0$是函数$f$的可去间断点。

**例5**　考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 0, & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

我们看到：$x=0$是函数$f$的第二类间断点，而其他点都是函数$f$的连续点。

**例6**　考察狄里克莱（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x \text{ 是有理数,}\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 是无理数.}\end{cases}$$

我们看到：任何$x\in\mathbb{R}$都是函数$D$的第二类间断点.

**例7** 考察黎曼(Riemann)函数

$$R(x)=\begin{cases}1/q, & \text{如果}x\text{是既约分数}p/q, q>0,\\ 0, & \text{如果}x\text{是无理数.}\end{cases}$$

我们来证明：对任意$a\in\mathbb{R}$都有

$$R(a-)=R(a+)=0.$$

设$k$是离$a$最近的整数，则$a\in(k-1,k+1)$. 对任意给定的$\varepsilon>0$，可以选取$N\in\mathbf{N}$，使得

$$1/N<\varepsilon.$$

在区间$(k-1,k+1)$中，满足条件$0<q\leqslant N$的既约分数$p/q$只有有限多个，设其中离$a$最近而又不等于$a$的一个是$b$. 我们记

$$\delta=|b-a|.$$

于是，只要

$$0<|x-a|<\delta,$$

就有

$$|R(x)|<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to a}R(x)=0,$$

也就是

$$R(a-)=R(a+)=0.$$

我们看到：所有的无理点都是黎曼函数$R$的连续点；所有的有理点都是这函数的第一类间断点.

## §2 闭区间上连续函数的重要性质

在上一节中，我们讨论了函数$f$在其连续点$x_0$邻近的局部性

质．例如，当$f(x_0)>0$时，我们能断定在$x_0$点邻近有$f(x)>0$。如果函数 $f$ 在一个闭区间$[a,b]$的每一点都连续(在左端点 $a$ 右侧连续，在右端点$b$左侧连续)，那么这函数在整个闭区间上能具有怎样的整体性质呢？本节将讨论这一重要问题。

**定义** 如果函数 $f$ 在闭区间$[a,b]$上有定义，在每一点$x\in(a,b)$连续，在$a$点右侧连续，在$b$点左侧连续，那么我们就说函数 $f$ 在闭区间$[a,b]$连续。

在以下的讨论中，我们将用到涉及闭区间$[a,b]$的一个简单的事实：

**引理** 设$\{x_n\}\subset[a,b]$，$x_n\to x_0$，则$x_0\in[a,b]$。

**证明** 从$a\leqslant x_n\leqslant b$，$n=1,2,\cdots$，可以得到

$$a\leqslant\lim x_n=x_0\leqslant b. \qquad \square$$

### 2.a 介值定理

考察$OXY$坐标系中的一段连续曲线。如果这段曲线的一端在$x$轴的下方，另一端在$x$轴的上方，那么它一定在中间的某一点与 $x$ 轴相交。这一事实既很直观，又非常有用（例如我们可以利用这一事实寻找方程的实根）。下面，我们就来证明这一重要事实。

**定理1** 设函数$f$在闭区间$[a,b]$连续。如果$f(a)$与$f(b)$异号：

$$f(a)f(b)<0,$$

那么必定存在一点$c\in(a,b)$，使得

$$f(c)=0.$$

**证明** 不妨设$f(a)<0<f(b)$(相反的情形可类似地讨论)．考察闭区间$[a,b]$的中点$\frac{a+b}{2}$。若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则可取$c=\frac{a+b}{2}$。

若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq0$，则它必与$f(a)$或$f(b)$之一异号。这就是说，在两个闭子区间

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

之中，必定有一个使得$f$在其两端点异号.记这闭子区间为$[a_1, b_1]$，则$[a_1, b_1]$满足条件：

$$[a, b] \supset [a_1, b_1],$$

$$0 < b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

$$f(a_1) < 0 < f(b_1).$$

我们可以用$[a_1, b_1]$代替$[a, b]$，重复上面的讨论。一般地，假设已作出一串闭区间$[a_1, b_1]$，…，$[a_k, b_k]$，满足条件：

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_k, b_k],$$

$$0 < b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

$$f(a_k) < 0 < f(b_k),$$

我们再来考察闭区间$[a_k, b_k]$的中点$\frac{a_k+b_k}{2}$.若$f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)=0$，则可取$c=\frac{a_k+b_k}{2}$.若$f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \neq 0$，则在两个闭子区间

$$\left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]$$

之中，必有一个使得$f$在其两端点异号，我们记这闭子区间为$[a_{k+1}, b_{k+1}]$。

按照上述程序做下去，可能出现两种情形：或者得到一个$c=\frac{a_m+b_m}{2}$使得$f(c)=0$；或者得到一个闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$，满足

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

$$f(a_n)<0<f(b_n).$$

闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$收缩到唯一的一点

$$c=\lim a_n=\lim b_n\in[a,b],$$

因为函数 $f$ 在闭区间$[a,b]$上连续，所以

$$f(c)=\lim f(a_n)=\lim f(b_n).$$

从不等式

$$f(a_n)<0<f(b_n)$$

可以得到

$$f(c)=\lim f(a_n)\leqslant 0\leqslant \lim f(b_n)=f(c),$$

于是只能有

$$f(c)=0. \qquad \square$$

**例1** 设函数 $f$ 在闭区间$[a,b]$连续并且满足$f([a,b])\subset[a,b]$(这就是说：$f(x)\in[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$)。试证明存在$c\in[a,b]$，使得

$$f(c)=c.$$

(这样的点 $c$ 称为是 $f$ 的一个不动点．本例说明：把$[a,b]$映入到$[a,b]$之中的连续函数必定有不动点。——这是著名的Brouwer不动点定理的一个特殊情形。)

**证明** 记$g(x)=f(x)-x$，则函数$g(x)$在闭区间$[a,b]$连续。由条件

$$a\leqslant f(x)\leqslant b, \qquad \forall x\in[a,b],$$

可知

$$f(a)\geqslant a, \qquad f(b)\leqslant b,$$

即

$$g(a)\geqslant 0, \qquad g(b)\leqslant 0.$$

如果$g(a)=0$（或者$g(b)=0$），那么$c=a$（或者$c=b$）就满足要求：

$$g(c)=0, \qquad f(c)=c.$$

如果$g(a)>0>g(b)$，那么（根据定理1）存在$c\in(a,b)$，使得

$$g(c)=0,\qquad f(c)=c. \qquad \square$$

定理 1 不但在理论上很重要，而且还为我们提供了求方程的根的一种近似方法——对分区间法。

**例 2** 考察方程 $x^3-2x-5=0$。我们记

$$f(x)=x^3-2x-5.$$

因为

$$f(2)=-1<0<f(3)=16,$$

所以方程 $f(x)=0$ 在 $(2,3)$ 中有一个根。我们用对分区间法求这根的近似值，得到如下的结果：

| 判别 $f(a_k)<0<f(b_k)$ | 确定根的范围 $(a_k,b_k)$ |
|---|---|
| $f(2)<0<f(3)$ | $(2,3)$ |
| $f(2)<0<f(2.5)$ | $(2,2.5)$ |
| $f(2)<0<f(2.25)$ | $(2,2.25)$ |
| $f(2)<0<f(2.125)$ | $(2,2.125)$ |
| $f(2.0625)<0<f(2.125)$ | $(2.0625,2.125)$ |
| $f(2.09375)<0<f(2.125)$ | $(2.09375,2.125)$ |
| $f(2.09375)<0<f(2.109375)$ | $(2.09375,2.109375)$ |

我们取根的近似值

$$\bar{c}=\frac{2.09375+2.109375}{2}=2.1015625.$$

误差的界为

$$|\bar{c}-c|\leqslant\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}=0.007515.$$

以下的介值定理是定理 1 的推广。

**定理 2**（介值定理） 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续。如果在这闭区间的两端点的函数值 $f(a)=\alpha$ 与 $f(b)=\beta$ 不相等，那么在这两点之间函数 $f$ 能够取得介于 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的任意值 $\gamma$。这就是说，如果 $f(a)<\gamma<f(b)$（或者 $f(a)>\gamma>f(b)$），那么存在 $c\in(a,$

$b)$，使得

$$f(c)=\gamma.$$

**证明** 考察函数 $g(x)=f(x)-\gamma$。显然函数$g$在闭区间$[a,b]$连续，并且在这闭区间的两端点取异号的值．由定理 1 可知：存在$c\in(a,b)$，使得$g(c)=0$，即

$$f(c)=\gamma. \qquad \square$$

### 2.b 最大值与最小值定理

如果函数 $f$ 在$x_0$点连续，那么它在这点邻近是有界的．这是一个局部性质．对于在闭区间连续的函数，我们来讨论相应的整体性质．

**定理 3** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界．

**证明** 用反证法．假设 $f$ 在$[a,b]$上无界．考察$[a,b]$的两个闭子区间

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \text{ 和 } \left[\frac{a+b}{2},b\right],$$

可以断定 $f$ 至少在一个闭子区间上无界，我们记这闭子区间为$[a_1,b_1]$．然后以$[a_1,b_1]$代替$[a,b]$，重复上面的讨论，又可得到闭子区间$[a_2,b_2]$，函数 $f$ 在这闭子区间上无界．继续这样的手续，我们得到一串闭区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

满足条件

(1) $0<b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$,

(2) 函数 $f$ 在$[a_n,b_n]$上无界．

闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$收缩于唯一的一点

$$c=\lim a_n=\lim b_n\in[a,b].$$

因为函数 $f$ 在 $c$ 点连续，所以存在$\eta>0$使得 $f$在$U(c,\eta)$上是有界的：

$$|f(x)|\leqslant K,\quad \forall x\in U(c,\eta).$$

又可取 $m$ 充分大，使得

$$|a_m-c|<\eta,\quad |b_m-c|<\eta.$$

这时就有

$$[a_m,b_m]\subset U(c,\eta),$$

因而有

$$|f(x)|\leqslant K,\quad \forall x\in[a_m,b_m].$$

但这与闭子区间 $[a_m,b_m]$ 的选取方式矛盾（按照我们的选取方式，函数 $f$ 应在闭子区间 $[a_m,b_m]$ 上无界）。这一矛盾说明：所作的反证法假设不能成立。函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上应该是有界的。 □

如果函数 $f$ 在开区间 $(a,b)$ 连续，那么关于 $f$ 在 $(a,b)$ 上是否有界不能得出任何一般性的结论。请看下面的例子。

**例 3** 函数 $f(x)=1/x$ 在开区间 $(0,1)$ 连续，但它在这开区间上无界。

**例 4** 函数 $g(x)=\sin x/x$ 在开区间 $(0,1)$ 连续，它在这开区间上是有界的：

$$|g(x)|\leqslant 1,\quad \forall x\in(0,1).$$

**定理 4**（最大值与最小值定理） 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\quad m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

则存在 $x',x''\in[a,b]$，使得

$$f(x')=M,\quad f(x'')=m.$$

**证明** 由定理 3 可知

$$-\infty<m\leqslant M<+\infty.$$

根据上确界的定义可以断定：对任意 $n\in\mathbf{N}$，必定存在 $x_n\in[a,b]$，使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M.$$

从有界序列 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 之中，可以选取收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$，设

$$x_{n_k}\to x'\in[a,b].$$

由函数 $f$ 在 $x'$ 点的连续性可得

$$f(x_{n_k}) \to f(x').$$

但我们有

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M.$$

在上面不等式中让 $k \to +\infty$ 取极限即得

$$f(x') = \lim f(x_{n_k}) = M.$$

关于最小值的论断可仿此作出证明. □

### 2.c 一致连续性

设 $E \subset \mathbb{R}$，函数 $f$ 在 $E$ 的每一点连续，$x_0$ 是 $E$ 的任意一个点。按照连续性的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

请注意，对于给定的 $\varepsilon > 0$，在不同的点 $x_0$ 处，相应的 $\delta$ 不一定相同。我们提出这样的问题：对于任意的 $\varepsilon > 0$，是否存在适用于一切 $x_0 \in E$ 的 $\delta > 0$，使得只要

$$x, x_0 \in E, \quad |x - x_0| < \delta,$$

就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon?$$

如果不对集合 $E$ 加以限制，这问题的答案是不一定的。请看下面两个例子：

**例 5** 考察 $E = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ 的情形。对任意 $x, x_0 \in \mathbb{R}$ 有

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|.$$

因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在适用于一切 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的 $\delta = \varepsilon > 0$，使得只要

$$x, x_0 \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta,$$

就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**例 6** 考察$E=\mathbb{R}$，$g(x)=x^2$的情形。对于给定的$\varepsilon>0$，不论$\delta$是怎样小的一个正数，总存在这样一点

$$x_0=\frac{2\varepsilon}{\delta}$$

和邻近$x_0$的另一点

$$x_1=\frac{2\varepsilon}{\delta}+\frac{\delta}{2},$$

使得

$$|x_1-x_0|=\delta/2<\delta,$$

$$|g(x_1)-g(x_0)|=(x_1+x_0)(x_1-x_0)$$

$$>\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}+\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)\frac{\delta}{2}=2\varepsilon.$$

这就是说，不存在适用于所有的$x_0$的$\delta>0$。

如果 $E=[a,b]$是一个闭区间，那么对前述问题的回答就是肯定的了。本段就来证明这一重要事实。先介绍必要的术语。

**定义** 设$E$是$\mathbb{R}$的一个子集，函数$f$在$E$上有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$x_1,x_2\in E,\quad |x_1-x_2|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数$f$在集合$E$上是一致连续的。

**定理 5（一致连续性定理）** 如果函数$f$在闭区间$I=[a,b]$连续，那么它在$I$上是一致连续的。

**证明** 用反证法。假设函数$f$在闭区间$I$上连续而不一致连续，那么至少存在一个$\varepsilon>0$，使得不论$\delta>0$怎样小，总有$x'$，$x''\in I$，满足条件

$$|x'-x''|<\delta,\quad |f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon.$$

对这样的$\varepsilon$和$\delta=1/n$ $(n=1,2,\cdots)$ 存在$x'_n,x''_n\in I$，满足

$$|x'_n-x''_n|<1/n,\quad |f(x'_n)-f(x''_n)|\geq\varepsilon.$$

因为$\{x'_n\}\subset I$是有界序列，它具有收敛的子序列$\{x'_{n_k}\}$：

$$x'_{n_k} \to x_0 \in I.$$

因为

$$|x_0 - x''_{n_k}| \leqslant |x_0 - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x''_{n_k}|$$
$$< |x_0 - x'_{n_k}| + 1/n_k,$$

所以又有

$$x''_{n_k} \to x_0.$$

又因为函数 $f$ 在$x_0$点连续，所以

$$\lim f(x'_{n_k}) = \lim f(x''_{n_k}) = f(x_0).$$

但这与

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon$$

相矛盾。这一矛盾说明函数 $f$ 在 $I$ 上必须是一致连续的。 □

## 附录 一致连续性的序列式描述

为了帮助读者从另一角度认识一致连续性，我们陈述并证明以下定理。

**定理 6** 设$E$是R的一个子集，函数 $f$ 在$E$上有定义。则 $f$ 在$E$上一致连续的充分必要条件是：对任何满足条件

$$\lim(x_n - y_n) = 0$$

的序列$\{x_n\} \subset E$和$\{y_n\} \subset E$，都有

$$\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

**证明** *必要性* 设 $f$ 在$E$上一致连续。则对任何$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得只要

$$x, y \in E, \quad |x - y| < \delta,$$

就有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

如果$\{x_n\} \subset E$和$\{y_n\} \subset E$满足条件

$$\lim(x_n - y_n) = 0,$$

那么存在$N \in \mathbb{N}$，使得$n > N$时有

$$|x_n - y_n| < \delta,$$

这时也就有

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

我们证明了

$$\lim(f(x_n)-f(y_n))=0.$$

充分性　用反证法。假设 $f$ 在 $E$ 上不一致连续。则对某个 $\varepsilon>0$，不论 $\delta=1/n$ 取得怎样小，总存在 $x_n, y_n\in E$，使得

$$|x_n-y_n|<1/n,\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon.$$

序列 $\{x_n\}\subset E$ 和 $\{y_n\}\subset E$ 满足条件

$$\lim(x_n-y_n)=0.$$

但序列 $\{f(x_n)-f(y_n)\}$ 却不能收敛于 0 。这与所给的条件矛盾。

□

利用定理 6 来揭示某些函数的不一致连续性是很方便的。请看下面的例子。

**例 7**　函数 $f(x)=1/x$ 在半开半闭的区间 $(0,1]$ 上是连续的，但却不一致连续。事实上，存在序列

$$\left\{\frac{1}{2n}\right\},\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset(0,1],$$

使得

$$\lim\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=0,$$

但却有

$$\lim\left(f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right)=+\infty.$$

例 7 说明：在定理 5 中，闭区间的要求是不可少的。

## § 3　单调函数，反函数

我们把闭区间 $[a,b]$，开区间 $(a,b)$，$(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$，半开区间 $[a,b)$，$(a,b]$，$(-\infty,b]$，$[a,+\infty)$，以及

退化的闭区间（即单点集$\{a\}=[a,a]$）等，统称为区间。以下引理指出所有这些类型的区间的共同特征。

**引理** 集合$J\subset\mathbb{R}$是一个区间的充分必要条件为：对于任意两个实数$\alpha,\beta\in J$，介于$\alpha$和$\beta$之间的任何实数$\gamma$也一定属于$J$。

**证明** 条件的必要性是显然的。我们来证明这条件也是充分的。记

$$A=\inf J,\qquad B=\sup J,$$

则显然有

$$J\subset[A,B].$$

按照确界的定义，对于任意$\gamma\in(A,B)$，存在$\alpha\in J$和$\beta\in J$，使得

$$A\leqslant\alpha<\gamma<\beta\leqslant B,$$

因而$\gamma\in J$。这证明了

$$(A,B)\subset J.$$

再来考察$A,B$两点。视$A,B$是否属于$J$，必有以下几种情形之一成立：

$$J=[A,B],\qquad J=[A,B),$$
$$J=(A,B]，或者\ J=(A,B).\qquad\square$$

利用这一引理，可以给介值定理一个很好的几何式的陈述：

**定理1** 如果函数$f$在区间$I$上连续，那么

$$J=f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$$

也是一个区间。

定理1的逆命题一般说来并不成立。

**例1** 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & 如果\ x\neq0,\\ 0, & 如果\ x=0.\end{cases}$$

我们看到函数$f$把区间$I=[-\eta,\eta]\ (\eta>0)$映成区间$J=[-1,1]$，但$f$并不连续。

但是，对于一类比较特殊的函数——单调函数，定理1的逆

命题是成立的。

**定理2** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上单调。则 $f$ 在 $I$ 连续的充分必要条件为：$f(I)$ 也是一个区间。

**证明** 必要性部分即定理1。这里证明条件的充分性。设 $f$ 在 $I$ 上递增并且 $f(I)$ 是一个区间。我们来证明 $f$ 在 $I$ 连续（用反证法）。假设 $f$ 在 $x_0\in I$ 不连续，那么至少出现以下两种情形之一：或者 $f(x_0-)<f(x_0)$，或者 $f(x_0)<f(x_0+)$。对这两种情形，我们分别用 $(\lambda,\rho)$ 表示 $(f(x_0-),f(x_0))$ 或者 $(f(x_0),f(x_0+))$。于是，在开区间 $(\lambda,\rho)$ 的两侧都有集合 $f(I)$ 中的点，但由于函数 $f$ 的单调性，任何 $\gamma\in(\lambda,\rho)$ 都不在集合 $f(I)$ 之中，因而 $f(I)$ 不能是一个区间。这一矛盾说明 $f$ 必须在 $I$ 的每一点连续。 □

设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，则 $J=f(I)$ 也是一个区间。如果函数 $f$ 在区间 $I$ 上还是严格单调的，那么 $f$ 是从 $I$ 到 $J=f(I)$ 的一一对应。这时，对任意 $y\in J=f(I)$，恰好只有一个 $x\in I$ 能使得 $f(x)=y$。我们定义一个函数 $g$ 如下：对任意 $y\in J$，函数值 $g(y)$ 规定为由关系 $f(x)=y$ 所决定的唯一的 $x\in I$。这样定义的函数 $g$ 称为是函数 $f$ 的反函数，记为

$$g=f^{-1}.$$

我们看到，函数 $f$ 及其反函数 $g=f^{-1}$ 满足如下关系：

$$g(y)=x\Longleftrightarrow f(x)=y.$$

**定理3** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上严格单调并且连续，则它的反函数 $g=f^{-1}$ 在区间 $J=f(I)$ 上严格单调并且连续。

**证明** 我们对函数 $f$ 在区间 $I$ 上严格递增并且连续的情形给出证明（函数 $f$ 在区间 $I$ 上严格递减并且连续的情形可类似地讨论）。对于任意的 $y_1,y_2\in J$，$y_1<y_2$，我们来比较 $x_1=g(y_1)$ 与 $x_2=g(y_2)$ 的大小。首先，不能有 $x_1=x_2$，否则将有 $y_1=f(x_1)=f(x_2)=y_2$；其次，也不能有 $x_1>x_2$，否则将有 $y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$。因而，只能有 $x_1<x_2$，即 $g(y_1)<g(y_2)$。这样，我们证明了函数 $g$ 在区间 $J$ 上严格递增。又因为 $g(J)=I$ 是一个区间，所

以 $g$ 在 $J$ 连续。 □

**例2** 函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $I=[-\pi/2,\pi/2]$ 上严格递增并且连续，$J=f(I)=[-1,1]$。因而反函数 $g(y)\doteq \arcsin y$（即 $\sin^{-1}y$）在 $J$ 上有定义并且连续。$g$ 的取值范围为 $[-\pi/2,\pi/2]$。

**例3** 函数 $\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上严格递减并且连续，它把区间 $[0,\pi]$ 映成 $[-1,1]$。因而其反函数 $\arccos y$（即 $\cos^{-1}y$）在区间 $[-1,1]$ 上有定义并且连续。$\arccos y$ 的取值范围为 $[0,\pi]$。

**例4** 函数 $\mathrm{tg}\,x$ 在区间 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上严格递增并且连续，它把 $(-\pi/2,\pi/2)$ 映成 $(-\infty,+\infty)$。因而这函数的反函数 $\mathrm{arc\,tg}\,y$（即 $\mathrm{tg}^{-1}y$）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义并且连续。$\mathrm{arc\,tg}\,y$ 的取值范围为 $(-\pi/2,\pi/2)$。

**例5**（算术根的存在唯一性问题） 非负实数 $a$ 的非负的 $n$ 次方根称为算术根。这样的算术根是存在而且唯一的，我们用记号

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

表示它。事实上，函数 $y=x^n$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上严格递增并且连续，它将区间 $[0,+\infty)$ 映成区间 $[0,+\infty)$。因而，对任意 $a\in[0,+\infty)$，存在唯一的 $\alpha\in[0,+\infty)$ 使得

$$\alpha^n=a.$$

这 $\alpha$ 即为 $a$ 的 $n$ 次算术根。

从上面的讨论，我们看到：对任意的 $n\in\mathbb{N}$，函数 $y=x^n$ 的反函数 $x=y^{\frac{1}{n}}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有定义，严格递增并且连续。我们还注意到：如果 $y>1$，那么 $y^{\frac{1}{n}}>1$。

## §4 指数函数与对数函数，初等函数连续性问题小结

有了算术根的定义之后，就可以进一步定义分数次方幂。

设 $a\in\mathbb{R}, a\geqslant 0, m, n\in\mathbf{N}$. 我们把 $a$ 的 $m/n$ 次方幂定义为：

$$a^{m/n}=(a^{1/n})^m,$$

这里

$$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}.$$

对于 $a>0$的情形， $a$ 的 $-m/n$ 次方幂定义为：

$$a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}},$$

而 $a$ 的 0 次方幂定义为：

$$a^0=1.$$

这样，当 $a>0$时，对任意的有理数 $q$，方幂 $a^q$ 都有定义。

**定理1** 对于 $a\in\mathbb{R}, a>0$，$p, q\in\mathbf{Q}$，我们有：

(1) $a^{p+q}=a^p\cdot a^q$；

(2) $a>1, p<q\Rightarrow a^p<a^q$，

$a<1, p<q\Rightarrow a^p>a^q$。

**证明** 借助于通分手续，我们可以写

$$p=k/n, \quad q=l/n,$$

这里 $n\in\mathbf{N}$，$k, l\in\mathbf{Z}$。

(1)
$$\begin{aligned}a^{p+q}&=a^{\frac{k+l}{n}}=(a^{1/n})^{k+l}\\&=(a^{1/n})^k\cdot(a^{1/n})^l=a^p\cdot a^q.\end{aligned}$$

(2) 设 $a>1, p=k/n<q=l/n$，则 $a^{1/n}>1, k<l$。于是

$$a^p=(a^{1/n})^k<(a^{1/n})^l=a^q.$$

设 $a<1, p=k/n<q=l/n$，则 $a^{1/n}<1, k<l$。于是

$$a^p=(a^{1/n})^k>(a^{1/n})^l=a^q. \qquad \square$$

我们将通过极限手续定义正数的无理指数方幂。为此，需要用到以下两个引理。

**引理1** 设 $a\in\mathbb{R}, a>1$；$p, q\in\mathbf{Q}$，$|p-q|<1$，则有

$$|a^p-a^q|\leqslant a^q(a-1)|p-q|.$$

**证明** 因为有

$$|a^p - a^q| = a^q|a^{p-q} - 1|,$$

所以只须证明

$$|a^{p-q} - 1| \leqslant (a-1)|p-q|.$$

下面，我们来证明：

$$|a^r - 1| \leqslant (a-1)|r|,$$

$$\forall r \in \mathbf{Q}, \quad |r| < 1.$$

*情形*1 $r = 0$。对这情形结论显然成立。

*情形*2 $r = m/n \in (0,1)$。对这情形，利用关于几何平均数与算术平均数的不等式可得

$$a^r = (a^m)^{1/n} = (a^m \cdot 1^{n-m})^{1/n}$$

$$\leqslant \frac{ma + n - m}{n} = \frac{m}{n}(a-1) + 1$$

$$= (a-1)r + 1,$$

$$0 < a^r - 1 \leqslant (a-1)r.$$

*情形*3 $r = -s \in (-1, 0)$。对这情形，我们有

$$|a^r - 1| = |a^{-s} - 1| = 1 - a^{-s}$$

$$= \frac{a^s - 1}{a^s} < a^s - 1$$

$$\leqslant (a-1)s = (a-1)|r|.$$

综合以上几种情形，我们看到：对任意的 $r \in \mathbf{Q}$，$|r| < 1$，都有

$$|a^r - 1| \leqslant (a-1)|r|. \quad \square$$

**引理2** 设 $a \in \mathbb{R}, a > 0, x \in \mathbb{R}$，则有：

(1) 如果 $\{p_n\} \subset \mathbf{Q}$，$p_n \to x$，那么 $\{a^{p_n}\}$ 收敛；

(2) 如果 $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbf{Q}, p_n \to x, q_n \to x$，那么

$$\lim a^{p_n} = \lim a^{q_n}.$$

**证明** 先对 $a > 1$ 的情形给出证明.

(1) 收敛序列$\{p_n\}$是有界的，可设对于 $M\in\mathbf{N}$有

$$p_n\leqslant M,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

收敛序列$\{p_n\}$又是基本序列，对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得 $m,n>N$ 时有

$$|p_m-p_n|<\varepsilon.$$

于是，$m,n>N$ 时就有

$$\begin{aligned}|a^{p_m}-a^{p_n}|&\leqslant a^{p_n}(a-1)|p_m-p_n|\\&\leqslant a^M(a-1)\varepsilon.\end{aligned}$$

我们证明了$\{a^{p_n}\}$是基本序列，也就证明了这序列的收敛性。

(2) 收敛序列是有界的，可设对于$M\in\mathbf{N}$有

$$q_n\leqslant M,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

又因为 $\lim(p_n-q_n)=0$，可设 $n>N$ 时

$$|p_n-q_n|<\varepsilon<1.$$

于是，$n>N$ 时就有

$$\begin{aligned}|a^{p_n}-a^{q_n}|&\leqslant a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n|\\&\leqslant a^M(a-1)\varepsilon.\end{aligned}$$

我们证明了

$$\lim(a^{p_n}-a^{q_n})=0.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\lim a^{p_n}&=\lim(a^{p_n}-a^{q_n})+\lim a^{q_n}\\&=\lim a^{q_n}.\end{aligned}$$

再来考察$0<a\leqslant1$的情形。如果 $a=1$，那么$\{a^{p_n}\}$和$\{a^{q_n}\}$都是常数序列$1,1,1,\cdots$，因而结论 (1) 和(2)当然成立。如果$0<a<1$，那么$1/a>1$。因为

$$a^{p_n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{p_n}},\qquad a^{q_n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}},$$

所以结论(1)和(2)也仍然成立。 □

根据这引理，我们给出以下定义。

**定义** 设$a\in\mathbb{R},a>0$，$x$是无理数。

我们定义

$$a^x=\lim a^{q_n},$$

这里$\{q_n\}$是收敛于$x$的任意有理数序列。

**注记** 如果$x\in\mathbb{Q},\{q_n\}\subset\mathbb{Q},q_n\to x$，那么仍有

$$a^x=\lim a^{q_n}.$$

这是因为我们可以把$x$视为常数序列

$$p_n=x,\qquad n=1,2,\cdots,$$

于是由引理2可得

$$a^x=\lim a^{p_n}=\lim a^{q_n}.$$

**定理2** 对于$a\in\mathbb{R},a>0$和$x,y\in\mathbb{R}$，我们有

(1) $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$;

(2) $a>1,x<y\Rightarrow a^x<a^y$,

$a<1,x<y\Rightarrow a^x>a^y$.

**证明** (1) 设$\{p_n\},\{q_n\}$是有理数序列，$p_n\to x,q_n\to y$，则$p_n+q_n\to x+y$。于是

$$\begin{aligned}a^{x+y}&=\lim a^{p_n+q_n}\\&=\lim(a^{p_n}\cdot a^{q_n})\\&=\lim a^{p_n}\cdot\lim a^{q_n}\\&=a^x\cdot a^y.\end{aligned}$$

(2) 我们对$a>1$的情形给出证明($a<1$的情形可类似地讨论)。设$\{p_n\},\{q_n\}$是有理数序列，$p_n\to x$，$q_n\to y$。因为$x<y$，所以对充分大的$n$就有

$$p_n<q_n,$$

于是

$$a^{p_n}<a^{q_n},$$

$$a^x=\lim a^{p_n}\leqslant\lim a^{q_n}=a^y.$$

为了得到严格的不等式，我们在$x$与$y$之间插入两个有理数$r$和

$s$:

$$x<r<s<y, \quad r,s\in\mathbb{Q}.$$

于是

$$a^x\leqslant a^r<a^s\leqslant a^y.$$

这样，我们证明了

$$a>1, x<y\Rightarrow a^x<a^y. \quad \square$$

**引理3** 设 $a\in\mathbb{R}, a>1$，$x,y\in\mathbb{R}$，$|x-y|<1$。则有

$$|a^x-a^y|\leqslant a^y(a-1)|x-y|.$$

**证明** 设$\{p_n\},\{q_n\}$是有理数序列，$p_n\to x$，$q_n\to y$。则对充分大的 $n$ 有

$$|p_n-q_n|<1.$$

于是有

$$|a^{p_n}-a^{q_n}|\leqslant a^{q_n}(a-1)|p_n-q_n|.$$

在上式中让 $n\to+\infty$取极限就得到

$$|a^x-a^y|\leqslant a^y(a-1)|x-y|. \quad \square$$

**定理3** 设 $a\in\mathbb{R}, a>1$。则指数函数 $a^x$ 在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上有定义，严格递增并且连续。

**证明** 只剩下关于连续性的结论尚待证明。设 $x_0\in\mathbb{R}, \{x_n\}\subset\mathbb{R}, x_n\to x_0$。则对充分大的 $n$ 有

$$|x_n-x_0|<1.$$

于是有

$$|a^{x_n}-a^{x_0}|\leqslant a^{x_0}(a-1)|x_n-x_0|.$$

由此得知函数 $a^x$ 在 $x_0$ 点连续。 $\square$

**推论** 设$a\in\mathbb{R}, 0<a<1$。则指数函数$a^x$在$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$有定义，严格递减并且连续。

**证明** 我们有

$$a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}, \quad \frac{1}{a}>1.$$

利用定理3就得到本推论。 $\square$

**引理4** 设$a\in\mathbb{R}, a>1$。则有

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$,

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$。

**证明** (1) 我们有不等式

$$a^n=(1+(a-1))^n\geqslant 1+n(a-1),\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

对任何$E>0$，可取$\Delta=\frac{E}{a-1}+1$，则当$x>\Delta$时，就有

$$a^x\geqslant a^{[x]}\geqslant 1+[x](a-1)$$

$$>1+\frac{E}{a-1}(a-1)>E.$$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{a^{-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0. \qquad \square$$

设$a\in\mathbb{R}, a>1$。我们看到：严格递增的连续函数$y=a^x$把区间$(-\infty,+\infty)$一对一地映成区间$(0,+\infty)$。因而对任意的$y\in(0,+\infty)$，存在唯一的$x\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$a^x=y.$$

我们把这样由$y$唯一确定的$x$称为以$a$为底$y$的对数，记为

$$x=\log_a y.$$

作为指数函数$y=a^x$的反函数，对数函数$x=\log_a y$是连续的。我们把这一事实写成以下定理。

**定理4** 设$a\in\mathbb{R}, a>1$，则

(1) 对数函数$x=\log_a y$在区间$(0,+\infty)$上有定义，严格递增并且连续；

(2) $\lim\limits_{y\to+\infty}\log_a y=+\infty$，$\lim\limits_{y\to0+}\log_a y=-\infty$。

**证明** 结论(1)可以从关于反函数的一般定理(§3的定理3)

得出。结论(2)的证明如下：对 任 意 $E>0$，可取 $\Delta=a^E>0$，于是对于 $y>\Delta$，就有

$$\log_a y>\log_a\Delta=E.$$

这证明了

$$\lim_{y\to+\infty}\log_a y=+\infty.$$

由此又可得到

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0+}\log_a y&=\lim_{y\to 0+}\left(-\log_a\left(\frac{1}{y}\right)\right)\\&=\lim_{z\to+\infty}(-\log_a z)\\&=-\infty.\end{aligned}$$ □

在数学的理论研究和应用中，常常采用数 $e$ 作为指数函数或者对数函数的底。这里数 $e$ 定义为

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

以 $e$ 为底的对数称为自然对数，记为

$$\ln y=\log_e y,\quad \forall y>0.$$

我们已经看到：多项式函数，有理分式函数，三角函数，反三角函数，指数函数，对数函数等函数在它们有定义的范围内都是连续的。这些函数称为*基本初等函数*。由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的函数称为*初等函数*。于是，我们有：

**定理5** 初等函数在其有定义的范围内都是连续的。

**例1** 考察幂函数 $y=x^\mu(x>0,\mu\in\mathbf{R})$的连续性。我们可以把它视为复合函数：

$$y=x^\mu=e^{\mu\ln x}.$$

由指数函数和对数函数的连续性可知：幂函数在它有定义的范围内是连续的。

**例2** 考察函数 $f(x)=u(x)^{v(x)}$，这里 $u(x)$和 $v(x)$都是连续函数，$u(x)>0$。我们把这函数改写为：

$$f(x)=e^{v(x)\ln u(x)},$$

由此可看出它的连续性.

## §5 无穷小量(无穷大量)的比较，几个重要的极限

**定义1** 设函数$\alpha(x)$在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$上有定义. 如果

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,$$

那么我们就说 $\alpha(x)$是 $x\to a$ 时的无穷小量.

设 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$都是 $x\to a$ 时的无穷小 量，$\alpha(x)\neq 0$. 关于比值

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$

的极限，可以有各种各样的情形. 请看下面的 例 子(在这些例子里，我们考察$x\to 0$时的无穷小量).

**例1** $\alpha(x)=x,\beta(x)=x^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

**例2** $\alpha(x)=x^2,\beta(x)=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

**例3** $\alpha(x)=x,\beta(x)=\sin x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

**例4** $\alpha(x)=x,\quad \beta(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\text{不存在，但}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\text{有界.}$$

**例5** $\alpha(x)=x^2,\beta(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$不存在，并且$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$无界。

**定义2** 设函数 $A(x)$在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$上有定义。如果

$$\lim_{x\to a}A(x)=\infty,$$

那么我们就说 $A(x)$是 $x\to a$ 时的无穷大量。

设 $A(x)$和 $B(x)$都是 $x\to a$时的无穷大量，$A(x)\neq 0$。关于比值$\frac{B(x)}{A(x)}$的极限，也有各种各样的情形.读者可以仿照上面的例1—例5，作出相应的例子来。

为了便于比较无穷小量(无穷大量)，我们引入适当的记号。

**定义3** 设函数 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$在 $a$ 点的某个去心邻域 $\check{U}(a)$上有定义，并设在 $\check{U}(a)$上 $\varphi(x)\neq 0$. 我们分别用记号"$O$"，"$o$"与"$\sim$"表示比值$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$在 $a$ 点邻近的几种状况：

(1) $\psi(x)=O(\varphi(x))$ 表示$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$是 $x\to a$ 时的有界变量$\left(即\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right.$在 $a$ 点的某个去心邻域上是有界的$\Big)$；

(2) $\psi(x)=o(\varphi(x))$ 表示 $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量$\left(即\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=0\right)$；

(3) $\psi(x)\sim\varphi(x)$表示

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1.$$

$O$，$o$和$\sim$这些记号都是相对于一定的极限过程而言的。使用时通常要附以记号$(x\to a)$，以说明所涉及的极限过程。例如：

$$\sin x=o(x)\quad(x\to\infty),$$
$$\sin x\sim x\quad(x\to 0).$$

我们特别指出：记号

$$\psi(x)=O(1)\quad(x\to a)$$

表示 $\psi(x)$ 在 $a$ 点的某个去心邻域上有界；而记号

$$\omega(x)=o(1)\quad(x\to a)$$

表示

$$\lim_{x\to a}\omega(x)=0。$$

设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是无穷小量（无穷大量）。如果 $\psi(x)=o(\varphi(x))$，那么我们就说 $\psi(x)$ 是比 $\varphi(x)$ 更高阶的无穷小（更低阶的无穷大）。如果 $\psi(x)\sim\varphi(x)$，那么我们就说 $\psi(x)$ 是与 $\varphi(x)$ 等价的无穷小（等价的无穷大）。

**例6** 设 $f(x)=(x-a)^m$，$g(x)=(x-a)^n$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}0, & \text{如果 } m<n,\\ 1, & \text{如果 } m=n,\\ \infty, & \text{如果 } m>n。\end{cases}$$

这说明：$k$ 越大时，$(x-a)^k$ 的无穷小的阶就越高。

**例7** 设 $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^m}$，$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^n}$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{如果 } m<n,\\ 1, & \text{如果 } m=n。\\ 0, & \text{如果 } m>n。\end{cases}$$

这说明：$k$ 越大时，$\dfrac{1}{(x-a)^k}$ 的无穷大的阶就越高。

**例8** 设 $f(x)=x^m$，$g(x)=x^n$，则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\infty, & \text{如果 } m<n,\\ 1, & \text{如果 } m=n,\\ 0, & \text{如果 } m>n。\end{cases}$$

这说明：对于极限过程 $x\to\infty$，$k$ 越大时，$x^k$ 的无穷大的阶就越高。

例9 设 $f(x)=a^x\ (a>1)$，$g(x)=x^\mu\ (\mu>0)$。

我们指出：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

因而指数函数 $a^x$ 的无穷大的阶比任何幂函数 $x^\mu$ 高。为了说明这一事实，我们先来看 $\mu=k\in\mathbb{N}$ 的情形。已经知道(第二章§1的例10)

$$\lim\frac{n^k}{a^n}=0.$$

由此易得

$$\lim\frac{(n+1)^k}{a^n}=\lim\frac{n^k}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k=0.$$

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $n>N$ 时有

$$0<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

取 $\Delta=N+1$，则 $x>\Delta$ 时就有

$$0<\frac{x^k}{a^x}\leqslant\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

对于一般的 $\mu>0$，我们可以取 $k\in\mathbb{N}$，$k\geqslant\mu$。于是，对于 $x\geqslant1$ 有

$$0<\frac{x^\mu}{a^x}\leqslant\frac{x^k}{a^x}.$$

因而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

例10 设 $f(x)=x^\nu\ (\nu>0)$，$g(x)=\log_a x\ (a>1)$。我们指出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\nu}=0.$$

这说明对数函数$\log_a x$是比任何幂函数$x^{\nu}$更低阶的无穷大量。事实上，令$y=\log_a x$，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^{\nu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{(a^{\nu})^{y}}=0.$$

我们对符号$O$,$o$的用法作一点说明。记号$O(\varphi(x))$(或者$o(\varphi(x))$)不是表示一个具体的量，而是表示量的一种类型。式子$\psi(x)=O(\varphi(x))$表示$\psi(x)$是属于$O(\varphi(x))$这种类型的一个量。式中的等号“=”应该当作属于符号“$\in$”来理解。而式子$O(\varphi(x))=\psi(x)$就没有明确的意义。因此，涉及符号$O$或$o$的“等式”，不能象通常的等式那样将其左右两边交换。

**定理1** 设$\varphi(x)$和$\psi(x)$在$a$点的某个去心邻域$\check{U}(a)$上有定义，$\varphi(x)\neq 0$。则有

$$\psi(x)\sim\varphi(x)\Longleftrightarrow\psi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x)).$$

**证明** 我们有：

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1\Longleftrightarrow\lim_{x\to a}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-1\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{\varphi(x)}=0$$

$$\Longleftrightarrow\psi(x)-\varphi(x)=o(\varphi(x))$$

$$\Longleftrightarrow\psi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x)).\quad\square$$

关于$O$和$o$，有以下关系：

**定理2** 设$\varphi(x)$在$a$点的某一去心邻域上有定义并且不等于0，则有

(1) $o(\varphi(x))=O(\varphi(x))$;

(2) $O(\varphi(x))+O(\varphi(x))=O(\varphi(x))$;

(3) $o(\varphi(x))+o(\varphi(x))=o(\varphi(x))$;

(4) $o(\varphi(x))O(1)=o(\varphi(x))$,

$o(1)O(\varphi(x))=o(\varphi(x))$.

证明　只要弄清楚各式的含义，证明就是显然的了。

结论(1)说：一个 $o(\varphi(x))$ 型的量必定也是 $O(\varphi(x))$ 型的量，即如果 $\psi(x)=o(\varphi(x))$，那么 $\psi(x)=O(\varphi(x))$。这是因为：如果 $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是无穷小量，那么它也必定是有界变量。

结论(2)说：如果 $f(x)=O(\varphi(x))$，$g(x)=O(\varphi(x))$，那么 $f(x)+g(x)=O(\varphi(x))$。这就是说：如果 $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ 和 $\frac{g(x)}{\varphi(x)}$ 都是有界变量，那么 $\frac{f(x)+g(x)}{\varphi(x)}$ 也是有界变量。

结论(3)的说明与结论(2)类似。

结论(4)依据的是这样的事实：无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量。 □

以下几个极限是分析中经常遇到的，希望读者熟记。

Ⅰ. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

这一事实的证明已见于第二章§5的例7。

Ⅱ. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

我们来证明Ⅱ。首先，根据定义有

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

由此可得

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e.$$

于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得 $n>N$ 时有

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon.$$

取 $\Delta=N+1$，则当 $x>\Delta$ 时就有$[x]>N$，

因而有

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

由此又可得到

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

我们证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

因而有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Ⅱ的另一种表述为

Ⅱ′.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e.}$$

利用对数函数的连续性，我们得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}$$
$$=\ln e=1.$$

类似地有

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha}=\log_b e=\frac{1}{\ln b}.$$

这样，我们证明了：

Ⅲ.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\ln b}.}$$

由此又可得到

Ⅳ.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1.}$$

事实上，令 $\beta=e^{\alpha}-1$，我们得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=1.$$

类似地有

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{b^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln b.}$$

最后，我们有

Ⅴ.
$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu.}$$

事实上

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+\alpha)}-1}{\alpha}$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+\alpha)}-1}{\mu\ln(1+\alpha)}\cdot\frac{\mu\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$
$$=\mu.$$

从上面的讨论，我们得到涉及某些初等函数的量阶的一些公式。这些公式在求某些极限时很有用处。

**定理3** 对于极限过程 $x \to 0$，我们有：

(1) $\sin x = x + o(x)$，$\operatorname{tg} x = x + o(x)$；

(2) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$；

(3) $e^x = 1 + x + o(x)$；

(4) $\ln(1+x) = x + o(x)$；

(5) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x)$。

**证明** (1) 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1.$$

(2) 从关系式

$$\frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{-\frac{1}{2}x^2} = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2}x^2} = 1.$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x} = 1. \qquad \square$$

下面的定理说明，在求乘积或商的极限的时候，可以将任何一个因式用它的等价因式来替换。

**定理4** 如果 $x\to a$ 时 $\psi(x)\sim\varphi(x)$，那么就有

(1) $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)f(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)f(x)}{g(x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\psi(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)g(x)}$.

这里，我们设所有的函数在 $a$ 点的某个去心邻域上有定义，作为分母的函数在这个去心邻域上不为 0，并设各式右端的极限存在。

**证明** 结论(1)的证明是这样的：

$$\lim_{x\to a}\psi(x)f(x)=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right)\cdot(\varphi(x)f(x))\right]$$
$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)f(x).$$

结论(2)与结论(3)的证明可仿此作出。 □

我们知道：$x\to0$时有

$$\sin x\sim x,\quad \operatorname{tg}x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$
$$\ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^\mu-1\sim\mu x.$$

利用这些结果与定理 4，我们很容易求出以下各例中的极限。

**例11** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta x}{\alpha x}=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

**例12** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$.

**例13** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$.

**例14** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

# 第　二　篇

## 微积分的基本概念及其应用

# 第四章　导　　数

在预篇中，我们已经看到，切线和速度等问题的讨论，都归结到以下形式的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

本章就来系统地研究这样的极限。

## §1　导数与微分的概念

### 1.a　导数的定义

**定义**　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点邻近有定义．如果存在有穷极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

那么我们就说函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导(derivable)，并且把上述极限值称为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的导数(derivative)，记为 $f'(x_0)$。

**几何解释**　在预篇里，我们已经看到：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率应该等于极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

这就是导数的几何意义．

**注记**　因为讨论的是当 $x\to x_0$ 时的极限，所以引入记号 $h=x-x_0$ 比较方便．于是 $x=x_0+h$，我们可以把导数的定义写成：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

这里的 $h$ 称为自变量的增量。请注意，增量 $h=x-x_0$ 可正可负，负的增量即减少的量。也许把 $h$ 叫做"改变量"更为合适。相应于自变量的增量 $h$，我们把 $f(x_0+h)-f(x_0)$ 称为函数 $f$ 的增量（或差分）。人们还习惯于用符号 $\Delta x$ 表示自变量 $x$ 的增量：$\Delta x=x-x_0$，用符号 $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的相应增量。采用这样的记号，导数的定义又可写成

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

与此相应，关于函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点的导数，除了采用上面介绍的拉格朗日(Lagrange)的记号 $f'(x_0)$ 而外，还常常采用莱布尼兹(Leibnitz)的记号

$$\frac{df(x_0)}{dx}\quad\left(\text{或}\ \frac{dy}{dx}\right).$$

后一记号提示我们导数是差商 $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\left(\text{或}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ 的极限。也正是由于这一原因，人们还把导数叫做微商。

讨论导数的时候，先要确定一个"基点" $x_0$，然后考察自变量与函数在这点邻近的变化（考察从 $x_0$ 点起始的增量）。在许多问题中，一定范围内的每一点都可当作基点来考虑。这时人们往往直接用记号 $x$ 表示基点（以这样的记号代替不怎么方便的记号 $x_0$）。对这种情形，用增量方式来写导数的定义更显得方便：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

对这一情形，如果采取直接的形式，那么导数的定义就要写成

$$f'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

### 1.b 求导数的例子

**例1** 试求常值函数 $f(x)\equiv C$的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{C-C}{h}=0,$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

**例2** 设 $m\in\mathbf{N}$，试求函数 $f(x)=x^m$的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^m-x^m}{h}$$

$$=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h+\cdots+h^{m-1},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=mx^{m-1}.$$

**例3** 设$m\in\mathbf{N}$，试求函数 $f(x)=x^{-m}(x\neq 0)$的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^m}-\frac{1}{x^m}\right]$$

$$=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{(x+h)^{m-1}}+\frac{1}{(x+h)^{m-2}x}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{(x+h)x}\left[\frac{1}{(x+h)^{m-1}}+\frac{1}{(x+h)^{m-2}x}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right],$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=-\frac{m}{x^{m+1}}=-mx^{-m-1}.$$

**例4** 求幂函数 $f(x)=x^{\mu}(x>0)$的导数($\mu\in\mathbb{Z}$的情形已见于例1,2,3。这里讨论 $\mu\in\mathbb{R}$的一般的情形)。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}$$

$$=x^{\mu}\ \frac{(1+h/x)^{\mu}-1}{h}=x^{\mu-1}\frac{(1+h/x)^{\mu}-1}{h/x},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=x^{\mu-1}\lim_{h\to 0}\frac{(1+h/x)^{\mu}-1}{h/x}=\mu x^{\mu-1}.$$

特别地，对于 $\mu=1/2$ 和 $\mu=-1/2$，我们有

$$(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=(x^{-1/2})'=-\frac{1}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

**例5** 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos x.$$

**例6** 求函数 $f(x)=\cos x$的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\sin x.$$

**例7** 求函数 $f(x)=e^x$和$g(x)=a^x\ (a>0)$的导数。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\frac{e^h-1}{h},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^x.$$

类似地可以证明

$$g'(x)=a^x\ln a.$$

以 $e$ 为底的指数函数 $f(x)=e^x$ 具有一个极好的性质:

$$f'(x)=f(x).$$

这一事实在数学理论和自然科学的研究中有极其重要的应用。

**例8** 求函数 $f(x)=\ln x$ 和 $g(x)=\log_a x$的导数$(x>0)$。

**解** 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\frac{\ln(1+h/x)}{h}=\frac{1}{x}\frac{\ln(1+h/x)}{h/x},$$

因而

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}.$$

同样可证

$$g'(x)=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

通过以上各例，我们求出一些重要的初等函数的导数。所得结果列表如下：

导 数 表

| 函 数 | 导 数 | 备 注 |
| --- | --- | --- |
| $C$ | $0$ | |
| $x^m$ | $mx^{m-1}$ | $m$是自然数 |
| $x^{-m}$ | $-mx^{-m-1}$ | $m$是自然数，$x\neq 0$ |
| $x^\mu$ | $\mu x^{\mu-1}$ | $\mu$是实数，$x>0$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $a^x$ | $a^x\ln a$ | $a>0$ |
| $\ln x$ | $1/x$ | $x>0$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x}\log_a e$ | $a>0, x>0$ |

利用关于极限运算已有的结果，立即可得以下简单的法则。

**定理1** 设函数$f$和$g$在$x$点可导，$c\in\mathbb{R}$，则$f+g$和$cf$也在$x$点可导，并且

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x);$$

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

这样，对于上表中各函数经过有限次相加或乘以常数的运算所得的一切函数，我们也能求出其导数。例如，对于多项式函数

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,$$

我们求得：

$$f'(x)=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}.$$

在下一节中，利用那里证明的更多的求导法则，我们能够求出更

多的函数的导数。

**例9** 应用导数的概念，我们来证明旋转抛物面的光学性质。抛物线 $y=\frac{1}{2p}x^2$ 绕它的对称轴 $x=0$ 旋转所成的曲面就是旋转抛物面。放在焦点 $F(0,p/2)$ 处的光源所发出的光，经过旋转抛物面各点反射之后就成为平行光束。人们利用这一性质制造需要发射平行光的灯具，例如：探照灯，汽车的前灯等(见图4-1)。

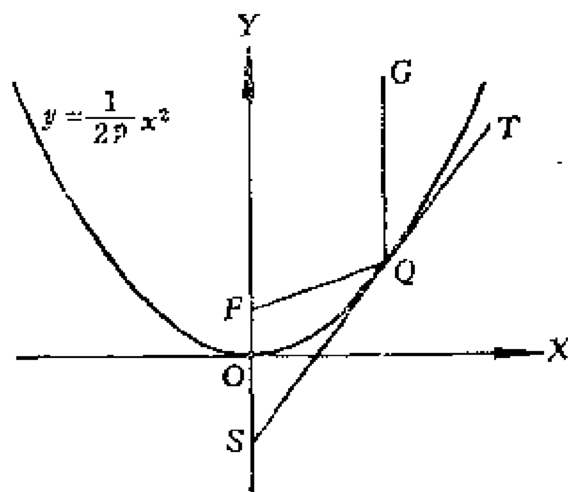



图 4-1

我们来证明上述性质。设 $Q(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y=\frac{1}{2p}x^2$ 上的任意一点$\left(因而 y_0=\frac{1}{2p}x_0^2\right)$。抛物线在这点的切线为

$$y=y_0+\frac{x_0}{p}(x-x_0),$$

这切线与对称轴 $x=0$ 相交于点 $S(x_1,y_1)$：

$$x_1=0,\quad y_1=y_0-\frac{x_0^2}{p}=-\frac{x_0^2}{2p}.$$

为了证明从光源 $F$ 发出的光线，经过旋转抛物面反射之后，反射光线 $QG$ 平行于对称轴 $x=0$，只须指出

$$\angle FQS=\angle FSQ=\angle GQT.$$

事实上，我们有

$$FS = \frac{p}{2} + \frac{x_0^2}{2p},$$

$$FQ = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + \left(\frac{x_0^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x_0^4}{4p^2} + \frac{x_0^2}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{x_0^2}{2p} + \frac{p}{2},$$

所以 $$FS = FQ.$$

这完成了证明。

### 1.c 单侧导数，不可导的例子

**定义(单侧导数)** 设函数 $f$ 在 $(x-\eta, x]$ 有定义。如果存在有穷的左侧极限

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

那么我们就说函数 $f$ 在 $x$ 点左侧可导，并且把上述左侧极限称为函数 $f$ 在 $x$ 点的左导数，记为

$$f'_{-}(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

类似地可以定义函数 $f$ 在 $x$ 点的右侧可导性以及右导数

$$f'_{+}(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

我们知道，极限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

存在的充分必要条件是两个单侧极限都存在并且相等。由此得出以下定理：

**定理2** 设函数 $f$ 在 $x$ 点邻近有定义。则 $f$ 在 $x$ 点可导的充

分必要条件是它在这点的两个单侧导数都存在并且相等：

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

当这条件满足时就有

$$f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x).$$

我们来看两个导数不存在的例子。

例10 考察函数$f(x)=|x|$在$x=0$处是否可导(见图4-2)。

解 我们看到

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & \text{如果 } h>0,\\ -1, & \text{如果 } h<0,\end{cases}$$

于是

$$f'_-(0)=-1,\quad f'_+(0)=+1.$$

因而函数$f$在$x=0$处的导数不存在。容易看出，在$x\neq 0$的地方，函数$f$的导数总是存在的：

$$f'(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}x>0,\\ -1, & \text{如果}x<0.\end{cases}$$

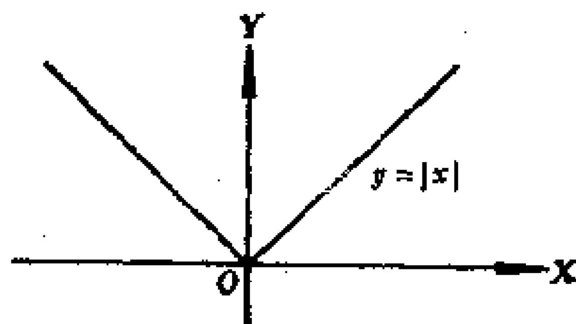



图 4-2

例11 考察函数$g(x)$在$x=0$处是否可导，这里

$$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 0, & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

解 我们有

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\sin\frac{1}{h}.$$

因为当$h \to 0$时上式没有极限，所以函数 $g$ 在$x=0$处不可导．还可以证明函数 $g$ 在$x=0$处没有任何一个单侧导数。

### 1.d 可微性，微分

与函数在一点的可导性紧密联系着的一个概念是可微性。本段就来解释这一概念。

在例 2 中，为了考察函数$p(x)=x^m$在 $x$ 点的可导性，我们将函数的增量

$$p(x+h)-p(x)$$

按 $h$ 的方幂展开：

$$p(x+h)-p(x)$$
$$=mx^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2+\cdots+h^m.$$

其实，为了考察可导性，并不需要了解 $h$ 的高次项的具体的形式，仅仅需要这样的信息：它们是一些高于一次的项，即

$$p(x+h)-p(x)=mx^{m-1}h+o(h),$$

由此可得

$$\frac{p(x+h)-p(x)}{h}=mx^{m-1}+\frac{o(h)}{h},$$

让$h \to 0$即得到

$$p'(x)=mx^{m-1}.$$

**定义** 设函数$f(x)$在 $x$ 点邻近有定义，如果

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h),$$

其中 $A$ 与 $h$ 无关(可以依赖于 $x$)，那么我们就说函数 $f$ 在 $x$ 点可微。

**定理3** 函数 $f$ 在 $x$ 点可导的充分必要条件是它在这点可微。

**证明** 充分性．如果

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h),$$

那么

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+\frac{o(h)}{h},$$

因而$f(x)$在$x$点可导：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A.$$

必要性．如果存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

那么当$h\to 0$时

$$\alpha(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\to 0,$$

并且有

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\alpha(h)h.$$

这就是说

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h). \qquad \square$$

**注记** (1) 由于这定理的缘故，人们把可导和可微这两个术语当做同义词来使用．求导数的方法又称为微分法．

(2) 在定理的证明过程中，我们看到：从表示式

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h),$$

可以断定

$$A=f'(x).$$

由此可知：上述表示式中$h$的系数$A$是唯一确定的．

**定理4** 设函数$f(x)$在$x_0$点可微(可导)，那么它在这点连续．

**证明** 我们有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h),$$

因而

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0). \qquad \square$$

**注记** 定理4之逆并不成立．如例10和例11中的函数都在

$x=0$处连续，但在该点不可导。

设函数 $f$ 在$x_0$点可导(可微)，则有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h).$$

采用记号 $\Delta x=h, \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，又可将上式写成

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

这样，我们把函数的增量 $\Delta y$ 表示为两项之和，前一项是自变量增量 $\Delta x$ 的一次式(线性式)，后一项是比 $\Delta x$ 高阶的无穷小量。在 $OXY$ 坐标系中，作出曲线 $y=f(x)$以及这曲线在 $x_0$ 点的切线(其斜率为 $f'(x_0)$)。我们看到，对于给定的自变量增量 $\Delta x$，量 $f'(x_0)\Delta x$ 正好是切线函数的增量(见图4-3)。

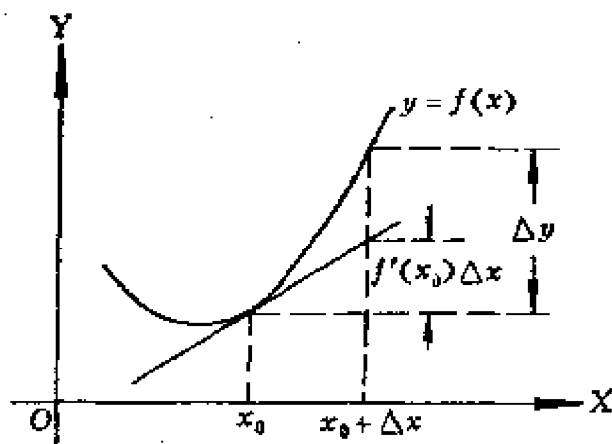



图 4-3

当我们用式子定义一个量的时候，采用记号“:=”是很方便的。例如

$$f(x):=x^2+2$$

表示$f(x)$用式子$x^2+2$来定义。记号“:=”读做“定义为”。

**定义** 设函数$y=f(x)$在$x_0$点可微。我们引入记号

$$\mathrm{d}x:=\Delta x,$$

$$\mathrm{d}y:=f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x,$$

并把$\mathrm{d}y$叫做函数$y=f(x)$在$x_0$点的微分。

**注记** 关于微分的意义，从上面的讨论我们已经得知：

(1) 从几何的角度来看，微分$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$正好是切线函数的增量。

(2) 从代数的角度来看，微分$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$是增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的线性主部，$\mathrm{d}y$与$\Delta y$仅仅相差一个高阶的无穷小量$o(\Delta x)$，因而当$\Delta x$充分小时，可以用$\mathrm{d}y$作为$\Delta y$的近似值。这一事实是微分的许多实际应用的基础。

(3) 原来，我们引入$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$作为导数的记号。有了微分的概念之后，又可以把记号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$解释为$\mathrm{d}y$与$\mathrm{d}x$之商：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x_0).$$

## §2 求导法则，高阶导数

本节的重点是求导数的方法。

按照定义，导数表示为一个极限。但直接根据定义去求这一极限，并不总是一件容易的事，有时候甚至很难办到。好在人们已经发展了一整套行之有效的求导法则。利用这些法则，我们能轻而易举地求出许多函数的导数——包括所有的初等函数的导数。

### 2.a 和、差、积、商的求导法则

**定理1** 设函数$u$和$v$在$x_0$点可导，则以下各式在$x=x_0$处成立：

(1) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

(这里要求$v(x)\neq0$)。

**证明** 结论(1)已见于上一节中，其证明是显然的。这里只验证结论(2)和(3)。

(2) 记 $f(x)=u(x)v(x)$，则有

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x) \\
&= (u(x+h)-u(x))v(x+h) \\
&\quad + u(x)(v(x+h)-v(x)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h) \\
&\quad + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h},
\end{aligned}
$$

因而有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= u'(x)v(x)+u(x)v'(x).
\end{aligned}
$$

(3) 记 $g(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$，则有

$$
\begin{aligned}
g(x+h)-g(x) &= \frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)} \\
&= \frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{(u(x+h)-u(x))v(x)}{v(x+h)v(x)} \\
&\quad - \frac{u(x)(v(x+h)-v(x))}{v(x+h)v(x)},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)}{v(x+h)v(x)}
$$

$$
-\frac{u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)},
$$

因而有

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

**注记** 在(3)中取 $u(x)\equiv 1$ 就得到

$$
\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.
$$

公式(3)的这一情形经常被用到，所以我们特别提出来，请读者加以注意.

**定理1′** 设函数 $u$ 和 $v$ 都在 $x$ 点可微，则有

(1) $d(u(x)\pm v(x)) = du(x)\pm dv(x)$;

(2) $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x)$;

(3) $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{(v(x))^2}$

(这里要求 $v(x)\neq 0$).

**证明** 将定理1中各式两边都乘以 $dx$，就得到本定理中相应的式子. $\square$

**例1** 求函数 $f(x)=e^x\sin x$ 的导数.

**解** 我们有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' \\
&= e^x\sin x + e^x\cos x \\
&= e^x(\sin x+\cos x).
\end{aligned}
$$

**例2** 求函数 $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的导数.

**解** 我们有

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\quad\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad(x\neq k\pi).$$

**例3** 求函数 $e^{-x}$ 的导数。

**解** 我们有

$$(e^{-x})'=\left(\frac{1}{e^x}\right)'=-\frac{e^x}{(e^x)^2}=-e^{-x}.$$

**例4** 函数 $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 和 $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 分别被称为双曲余弦和双曲正弦。它们有许多性质在形式上与三角函数很相似，例如：

$$\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x,\quad \operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,$$

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,\quad \operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$

这些性质都可以用定义直接验证。容易求出双曲余弦与双曲正弦的导数：

$$(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\quad(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x.$$

## 2.b 复合函数的求导．微分表示的不变性

很多函数可以看作是由更简单的函数复合而成的．例如函数 $\sin x^2$ 可以看作是由函数 $y=x^2$ 和函数 $u=\sin y$ 复合而成的，而函数 $e^{\cos x}$ 可以看作是由函数 $y=\cos x$ 和函数 $u=e^y$ 复合而成的．本段就来讨论复合函数的求导法则．

设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，函数 $u=g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 点可导．那么，关于复合函数 $u=g\circ f(x)$ 在 $x_0$ 点的可导性，我们能得出怎样的结论呢？分析这问题的途径自然是考察这复合函数的差商．记 $\varphi(x)=g\circ f(x)$，我们有

$$(2.1)\qquad \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$

$$=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

由此似乎就能得出这样的结论：函数 $\varphi(x)=g\circ f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，并且 $\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$．这分析的基本思路是对的，但有一个漏洞，那就是：在 $x\to x_0$ 的过程中，虽然 $x\neq x_0$，也仍可能对某些 $x$ 有 $f(x)=f(x_0)$．请看下面的例子．

**例4** 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{如果}x\neq 0,\\ 0, & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

我们看到，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

但在 0 点的任意邻近，仍有 $x=\dfrac{1}{n\pi}$（$n$ 是绝对值充分大的整数）使得 $f(x)=f(0)$．

虽说如此，上面的分析仍给我们有益的启发。其实只要把上面的表示方式稍作改变，就能得到正确的证明。

**定理2** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点可导，函数 $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 点可导，则复合函数 $\varphi(x)=g\circ f(x)$ 也在 $x_0$ 点可导，并且

$$\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

**证明** 考察辅助函数

$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}, & \text{如果 } y\neq f(x_0),\\ g'(f(x_0)), & \text{如果 } y=f(x_0).\end{cases}$$

显然这函数在 $f(x_0)$ 点连续。另外，我们有

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\psi(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2.2}$$

事实上，对于 $f(x)\neq f(x_0)$ 的情形，(2.2)式就成为前面讨论中的(2.1)式。如果 $f(x)=f(x_0)$，那么(2.2)式就是

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=0=g'(f(x_0))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

在(2.2)式中让 $x\to x_0$ 就得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}&=\psi(f(x_0))f'(x_0)\\&=g'(f(x_0))f'(x_0).\end{aligned}$$

这证明了定理的结论。 □

下面，我们来介绍复合函数求导法则的另一表示方式。将复合函数 $f(\varphi(t))$ 对 $t$ 求导得：

$$(f(\varphi(t)))'=f'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这式子两边都乘以 $dt$ 就得到

$$d(f(\varphi(t)))=f'(\varphi(t))d\varphi(t).$$

这就是说：不论 $x$ 是自变量，或者 $x=\varphi(t)$ 是另一变量 $t$ 的函数，函数 $f(x)$ 的微分表示式都具有相同的形式

$$\mathrm{d}\, f(x) = f'(x)\mathrm{d}\, x.$$

这一结论叫做微分表示的不变性。它虽然只是复合函数求导公式的另一表述，应用起来却极为便利。这在以后学习不定积分时会看得更清楚。

定理 2 中所述的复合函数求导法则又称为链式法则。对于函数 $z = g(y)$ 与 $y = f(x)$的复合，这一法则可以形式地写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

并可陈述如下：

欲求复合函数对自变量的导数，可以先求它对中间变量的导数，再乘以中间变量对自变量的导数。

在实际解题时，并不一定每次用新的记号表示中间变量，只要在心中默记住我们当作中间变量的式子 $f(x)$就可以了。熟练地掌握这一方法就能大大加快计算速度。书写的格式通常是

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))(f(x))'.$$

请看下面的例子。

**例5** 求$(\sin ax)'$, $(\mathrm{tg}\, bx)'$和$(e^{cx})'$。

**解** 为了求$(\sin ax)'$，我们在心目中把 $y = ax$ 当作中间变量，先对中间变量求导，再乘以这中间变量对 $x$ 的导数。具体的书写格式如下：

$$(\sin ax)' = (\cos ax) \cdot (ax)' = a \cos ax.$$

类似地可求得

$$(\mathrm{tg}\, bx)' = \frac{1}{\cos^2 bx} \cdot (bx)' = \frac{b}{\cos^2 bx}.$$

$$(e^{cx})' = (e^{cx}) \cdot (cx)' = ce^{cx}.$$

**例6** 求$(\cos(x+b))'$和$(\ln(x+c))'$。

**解** 利用复合函数求导法则可得

$$(\cos(x+b))' = (-\sin(x+b))(x+b)'$$
$$= -\sin(x+b),$$

$$(\ln(x+c))' = \frac{1}{x+c}(x+c)' = \frac{1}{x+c}.$$

**例7** 求$(\sin x^2)'$和$(e^{x^2})'$.

**解** 我们有

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2)\cdot(x^2)' = 2x\cos x^2,$$

$$(e^{x^2})' = (e^{x^2})\cdot(x^2)' = 2xe^{x^2}.$$

**例8** 试求函数$\ln|x|$ $(x\neq 0)$和函数$\ln|x+c|$ $(x\neq -c)$的导数。

**解** 对于$x>0$，我们已经知道

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

设$x<0$，则$|x| = -x$。对这情形我们有

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))'$$

$$= \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x}.$$

对于$x>0$和$x<0$这两种情形，我们都得到：

$$(\ln|x|)' = 1/x.$$

由此又可得到

$$(\ln|x+c|)' = \frac{1}{x+c}(x+c)' = \frac{1}{x+c}.$$

**例9** 求$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'$.

**解** 我们有

$$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = (\ln|x-a| - \ln|x+a|)'$$

$$= \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}$$

$$= \frac{2a}{x^2-a^2}.$$

为了求得某些更复杂的函数的导数，可以接连运用复合函数求导的法则若干次。

例10　求$(e^{\sin(x^2+c)})'$。

解

$$
\begin{aligned}
(e^{\sin(x^2+c)})' &= e^{\sin(x^2+c)}(\sin(x^2+c))' \\
&= e^{\sin(x^2+c)}\cos(x^2+c)(x^2+c)' \\
&= 2x\cos(x^2+c)e^{\sin(x^2+c)}.
\end{aligned}
$$

例11　求$(\ln|\sin x^2|)'$。

解

$$
\begin{aligned}
(\ln|\sin x^2|)' &= \frac{1}{\sin x^2}(\sin x^2)' \\
&= \frac{1}{\sin x^2}\cos x^2(x^2)' \\
&= 2x\operatorname{ctg} x^2 \quad (x \neq \sqrt{k\pi}).
\end{aligned}
$$

例12　求$(\sqrt{x^2 \pm a^2})'$。

解

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x^2 \pm a^2})' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x^2 \pm a^2)' \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.
\end{aligned}
$$

例13　求$(\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}))'$。

解

$$
(\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})'
$$

$$
= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.
$$

例14　试求幂-指数式$(u(x))^{v(x)}$的导数，这里$u(x)>0$，函数$u$和$v$在$x$点可导。

**解** 我们有

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)},$$

因而

$$\begin{aligned}(u(x)^{v(x)})' &= (e^{v(x)\ln u(x)})' \\ &= e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' \\ &= e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\ &= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\ &= u(x)^{v(x)}(\ln u(x))v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x).\end{aligned}$$

我们看到：幂-指数式的导数为两项之和，这两项分别相当于把该式当作指数函数和幂函数求导所得的结果。

### 2.c 反函数的求导法则

设函数 $y=\varphi(x)$ 在包含 $x_0$ 点的一个开区间 $I$ 上严格单调并且连续，在 $x_0$ 点可导并且 $\varphi'(x_0)\neq 0$。根据第三章 § 3的定理 3，函数 $y=\varphi(x)$ 的反函数 $x=\psi(y)$ 在开区间 $J=\varphi(I)$ 上有定义。我们来考察反函数 $x=\psi(y)$ 在 $y_0=\varphi(x_0)$ 点的可导性。几何的直观告诉我们，这问题的答案应该是肯定的。因为在 $OXY$ 坐标系中，函数 $y=\varphi(x)$ 的图象与其反函数 $x=\psi(y)$ 的图象应该是同一条曲线，而函数 $y=\varphi(x)$ 在 $x_0$ 点的可导性与函数 $x=\psi(y)$ 在 $y_0=\varphi(x_0)$ 点的可导性都表示这曲线在点 $(x_0,y_0)$ 具有切线。设该切线与 $OX$ 轴的夹角为 $\alpha$，与 $OY$ 轴的夹角为 $\beta$，则 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$。于是

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

即

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}.$$

下面我们用分析的方式证明上述结果。

**定理3** 设函数 $y=\varphi(x)$ 在包含 $x_0$ 点的开区间 $I$ 上严格单调并且连续。如果这函数在 $x_0$ 点可导并且导数 $\varphi'(x_0)\neq 0$，那么反函数 $x=\psi(y)$ 在点 $y_0=\varphi(x_0)$ 可导，并且

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}.$$

**证明** 在所给的条件下，函数 $x=\psi(y)$ 也严格单调并且连续。于是，当 $y\neq y_0, y\to y_0$ 时，应有 $\psi(y)\neq\psi(y_0), \psi(y)\to\psi(y_0)$。因而

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\psi(y)-\psi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{y-y_0}{\psi(y)-\psi(y_0)}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}$$

$$=\frac{1}{\varphi'(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}. \qquad \square$$

**注记** 如果函数 $y=\varphi(x)$ 在开区间 $I$ 严格单调，在这区间的每一点 $x$ 都可导并且有 $\varphi'(x)\neq 0$，那么反函数 $x=\psi(y)$ 在开区间 $J=\varphi(I)$ 的每一点 $y$ 处都可导，并且

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}.$$

上式可以形式地写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

**例15** 设 $\varphi(x)=e^x$，$\psi(y)=\ln y$。我们知道这两个函数互为反函数，并且也已经知道

$$\varphi'(x)=e^x, \quad \psi'(y)=\frac{1}{y}.$$

其实，只要知道其中任何一个函数的导数，利用反函数求导法则

就能得到另一个函数的导数。如果已知 $\varphi'(x)=e^x$，那么由反函数求导法则可以得到

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{e^{\ln y}}=\frac{1}{y}.$$

又，如果已知 $\psi'(y)=1/y$，那么由反函数求导法则可得

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(\varphi(x))}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x.$$

例16　求 $\psi(y)=\arcsin y$ 的导数。

解　函数 $\psi(y)=\arcsin y$ 是函数 $\varphi(x)=\sin x$ 的反函数，因而

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{\cos(\arcsin y)}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

例17　求 $\psi(y)=\arccos y$ 的导数。

解　函数 $\psi(y)=\arccos y$ 是函数 $\varphi(x)=\cos x$ 的反函数，因而

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{-\sin(\arccos y)}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

例18　求 $\psi(y)=\operatorname{arc\,tg} y$ 的导数。

解　函数 $\psi(y)=\operatorname{arc\,tg} y$ 是函数 $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$ 的反函数，因而

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg} y)}}$$

$$=\cos^2(\operatorname{arc\,tg} y)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} y)}$$

$$=\frac{1}{1+y^2}.$$

通过一系列例题，我们已经求出了所有的基本初等函数的导数。现将所得的结果列表作一小结。

初等函数的导数表

| 函数$f(x)$ | 导数$f'(x)$ | 备注 |
|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $C$是常数 |
| $x^m$ | $mx^{m-1}$ | $m$是自然数 |
| $x^{-m}$ | $-mx^{-m-1}$ | $m$是自然数，$x\neq 0$ |
| $x^\mu$ | $\mu x^{\mu-1}$ | $\mu$是实数，$x>0$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $x\neq k\pi$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|x\|<1$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\|x\|<1$ |
| $\operatorname{arc\,tg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\operatorname{arc\,ctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $e^x$ | $e^x$ | |
| $a^x$ | $a^x\ln x$ | $a>0$，$a\neq 1$ |
| $\ln\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ | $x\neq 0$ |
| $\log_a\|x\|$ | $\frac{1}{x}\log_a e$ | $a>0$，$a\neq 1$，$x\neq 0$ |
| $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ | |
| $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ | $\|x\|>\|a\|$ |

## 2.d 参数式或隐式表示的函数的求导

有时候，人们用参数形式表示变量 $y$ 对变量 $x$ 的函数关系。例如，函数关系

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \quad -a\leqslant x\leqslant a,$$

可以用参数表示为

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant \pi.$$

一般地，设有参数表示式

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in J,$$

其中函数 $\varphi$ 在区间 $J$ 上严格单调并且连续，函数 $\psi$ 在区间 $J$ 连续。我们可以把 $t$ 表示为 $x$ 的连续函数

$$t=\varphi^{-1}(x), \quad x\in I=\varphi(J),$$

于是 $y$ 表示为 $x$ 的连续函数

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x\in I.$$

如果函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 都在区间 $J$ 的内点 $t_0$ 处可导，并且 $\varphi'(t_0)\neq 0$，那么由反函数与复合函数的求导法则可知函数 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 在 $x_0=\varphi(t_0)$ 处可导，并且有

$$(\psi\circ\varphi^{-1})'(x_0)=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))(\varphi^{-1})'(x_0)$$

$$=\psi'(\varphi^{-1}(x_0))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x_0))}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

我们得到了如下法则：对于参数表示的函数

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

可以按下式求导

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

（这里要求 $\varphi'(t)\neq 0$）。

由此可知，参数曲线

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

在 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$ 处的切线的斜率为

$$\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

这切线的方程可以写成

$$\frac{X-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{Y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

从几何的角度来观察，过曲线上两点

$$(\varphi(t_0),\psi(t_0)) \text{ 和 } (\varphi(t),\psi(t))$$

的割线的方向系数应该是

$$(\varphi(t)-\varphi(t_0),\quad \psi(t)-\psi(t_0))$$

或者

$$\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0},\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}\right).$$

让 $t\to t_0$ 取极限就得到了切线的方向系数：

$$(\varphi'(t_0),\psi'(t_0)).$$

**例19** 考察由极坐标方程给出的曲线

$$r=r(\theta).$$

试求这曲线在某点$(r,\theta)$的切线。

**解** 由极坐标方程可得曲线的参数方程

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta.$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\operatorname{tg}\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}.$$

以$\alpha$记切线与极轴(也就是$OX$轴)的夹角(见图4-4)，则有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\theta+\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\operatorname{tg}\theta\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}}.$$

由这式子又可得到

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}$$

$$=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\operatorname{tg}\beta.$$

这里 $\beta=\alpha-\theta$ 恰好就是切线与极径的夹角。

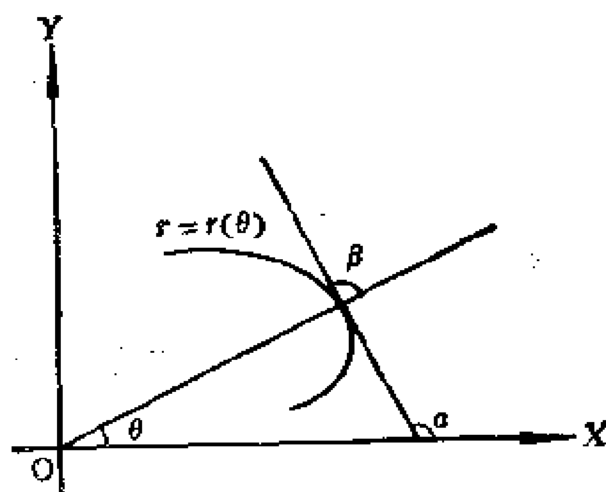



图 4-4

于是，我们得知：对于由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示的曲线，其切线与极径的夹角的正切应为

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

有时候，变量 $y$ 对变量 $x$ 的函数关系通过一个方程来给出。例如，按照方程

$$x^2+y^2=1,$$

对每一个 $x\in[-1,1]$，有唯一的 $y\in[0,+\infty)$ 与之对应（容易看出 $y=\sqrt{1-x^2}$）。于是，方程 $x^2+y^2=1$ 确定了从集合 $D=[-1,1]$

到集合$E=[0,+\infty)$的一个函数．对一般情形，设$D\subset\mathbb{R}$，$E\subset\mathbb{R}$．如果按照方程

$$F(x,y)=0,$$

对每一个$x\in D$恰好有唯一的$y\in E$与之对应，那么我们就说：由条件

$$F(x,y)=0,\quad x\in D, y\in E$$

确定了一个隐函数．有时候，隐函数可以用显式解出．例如由关系

$$x^2+y^2=1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\quad y\geqslant 0$$

确定的隐函数，可以用显式表示为

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1;$$

而由关系

$$x^2+y^2=1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\quad y\leqslant 0$$

确定的隐函数，可以用显式表示为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

从上述例子可以看出，要由方程确定一个隐函数，仅仅指出$x$的变化范围是不够的，还需要指出$y$的变化范围．至于由方程确定隐函数的一般条件以及所确定的隐函数的分析性质，这些都是十分重要的课题．本书将在多元函数部分予以讨论．这里仅仅指出：对于隐函数存在并且可导的情形，并不一定需要先解出显式表示再求导，直接对隐函数所满足的方程求导，往往更为便利．请看下面的例子．

**例20** 求由以下条件确定的隐函数$y=y(x)$的导数：

$$x^2+y^2=1,\quad -1<x<1, y>0.$$

**解** 以$y=y(x)$代入方程$x^2+y^2=1$应该得到一个恒等式．对这恒等式两边求导得

$$2x+2yy'=0$$

$$y'=-x/y.$$

用显示表示来验算，我们得到

$$y' = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

有时候，从函数的直接表示式求导数比较复杂，改用（人为的）隐式表示来求这函数的导数也许还要简便一些。所谓对数求导法（适用于幂-指数表示式及其他一些情形），就是一个很好的例子。

例21（对数求导法）为了求幂—指数式 $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$的导数，将其两边取对数而得到

$$\ln y = v(x)\ln u(x).$$

按照隐函数求导的办法，对上式两边求导得

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

由此得到

$$y' = y\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

### 2.e 高阶导数

设函数 $f$ 在开区间 $I$ 的每一点可导，则以下对应关系定义了一个函数：

$$x \longmapsto f'(x), \quad \forall x \in I.$$

这函数称为是函数 $f$ 的导函数，记为 $f'$。对于导函数 $f'$，我们又可以讨论它的可导性和导数。导函数 $f'$ 在 $x$ 点的导数$(f')'(x)$，称为是函数 $f$ 在 $x$ 点的二阶导数，记为

$$f''(x), \quad f^{(2)}(x) \text{ 或者 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

我们用归纳的方式来定义 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$。首先约定：$f^{(0)}(x) = f(x)$。如果 $f^{(n-1)}(x)$ 对一切 $x \in I$ 都有定义，那么由对应关

系

$$x \longmapsto f^{(n-1)}(x)$$

定义了函数 $f$ 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}$。如果导函数 $f^{(n-1)}$ 在 $x$ 点具有导数 $(f^{(n-1)})'(x)$，那么我们就把这导数称为是函数 $f$ 在 $x$ 点的 $n$ 阶导数，记为

$$f^{(n)}(x) \text{ 或者 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

高阶导数在实际问题中也有广泛的应用。例如在力学中，如果以 $x(t)$ 表示沿直线运动的质点的坐标，那么一阶导数 $x'(t)$ 表示运动的速度，二阶导数 $x''(t)$ 就表示质点运动的加速度。于是，牛顿第二定律的数学表示就应该是

$$mx'' = F \text{ 或者 } m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F.$$

高阶导数的计算，原则上只是各求导法则的反复使用。但在有些情况下，为了求出表示任意阶导数的公式，往往需要采用一些技巧性的手段，对每次求导的结果加以整理，以便于"猜出"结果的一般形式。

**例22** 设 $y = x^a$，求 $y^{(n)}$。

**解**

$$y' = ax^{a-1},$$

$$y'' = a(a-1)x^{a-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.$$

如果 $a = m \in \mathbf{N}$，那么 $n > m$ 时就有 $y^{(n)} = 0$。

**例23** 设 $y = e^{\beta x}$，求 $y^{(n)}$。

**解** $y' = \beta e^{\beta x}$，$y'' = \beta^2 e^{\beta x}$，…，$y^{(n)} = \beta^n e^{\beta x}$。

**例24** 设 $y = \ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$。

**解**

$$y' = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}.$$

$$y^{(n)} = ((1+x)^{-1})^{(n-1)}$$

$$= (-1)(-2)\cdots(-(n-1))(1+x)^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

**例25** 设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$。

**解**

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,$$

$$y'''=-\cos x,\quad y^{(4)}=\sin x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(2k-1)}=(-1)^{k-1}\cos x,$$

$$y^{(2k)}=(-1)^k\sin x.$$

为了用统一的公式写出求导结果，可采用以下办法：

$$y'=\cos x=\sin(x+\pi/2),$$

$$y''=\cos(x+\pi/2)=\sin(x+2\cdot\pi/2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

对于 $z=\cos x$，同样可得

$$z^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

作为乘积求导公式

$$(uv)'=u'v+uv'$$

的推广，我们有以下的 Leibnitz 公式。

**定理4** 设函数 $u$ 和 $v$ 都在 $x_0$ 点 $n$ 次可导，则这两函数的乘积 $uv$ 也在 $x_0$点 $n$ 次可导，并且在这点有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)},$$

这里$\binom{n}{k}=C_n^k$ 是二项式系数，即

$$\binom{n}{0}=1,$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

**证明** 我们用归纳法证明 Leibnitz 公式。证明中关键的一步将用到以下恒等式：

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

这关系可以直接用定义加以验证。

对于 $n=1$ 的情形，Leibnitz 公式即熟知的乘积求导公式。假设对于 $n\in\mathbf{N}$ 已经证明了 Leibnitz 公式。我们来考察 $n+1$ 的情形。

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)}&=((uv)^{(n)})'\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}\right)'\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)})\\&=\sigma_1+\sigma_2\end{aligned}$$

这里

$$\sigma_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n+1-k)}v^{(k)},$$

$$\sigma_2=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^{(n-j)}v^{(j+1)}.$$

在 $\sigma_2$ 的表示式中，令 $j=k-1$ 可得

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}u^{(n+1-k)}v^{(k)}.$$

于是，我们得到

$$(uv)^{(n+1)}=\sigma_1+\sigma_2$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n+1-k)}v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}u^{(n+1-k)}v^{(k)}$$

$$= u^{(n+1)}v + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)u^{(n+1-k)}v^{(k)}$$

$$+ uv^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(n+1-k)}v^{(k)}. \qquad \square$$

在结束本节之前，我们对复合函数、反函数以及参数式表示的函数的高阶导数的求法，作简单的说明。本来，这些情形下高阶导数的计算，都只是相应情形下求一阶导数手续的重复使用。但对高阶导数的计算，初学者容易犯错误，所以仍有必要特别提请注意。

设函数 $f$ 和 $g$ 都至少是二阶可导的，并且 $g$ 与 $f$ 可复合，这时复合函数 $h=g\circ f$ 也至少是二阶可导的，其二阶导数可按以下办法计算：

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x),$$

$$h''(x)=(h'(x))'$$

$$=(g'(f(x))f'(x))'$$

$$=(g'(f(x)))'f'(x)+g'(f(x))(f'(x))'$$

$$=g''(f(x))(f'(x))^2+g'(f(x))f''(x).$$

更高阶的导数也可用类似的办法计算。

设在开区间 $I$ 上，函数 $y=F(x)$ 严格单调，至少二阶可导，并且满足条件 $F'(x)\neq 0$。则 $F$ 的反函数 $x=G(y)$ 在 $I$ 也至少是二阶可导的。我们已经知道

$$G'(y)=\frac{1}{F'(G(y))}.$$

对这式再求导就得到

$$G''(y)=-\frac{(F'(G(y)))'}{(F'(G(y)))^2}$$

$$= -\frac{F''(G(y))G'(y)}{(F'(G(y)))^2}$$

$$= -\frac{F''(G(y))}{(F'(G(y)))^3}.$$

更高阶的导数也可用类似的办法求得。

设函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在开区间 $J$ 至少二阶可导；函数 $\varphi(t)$ 在 $J$ 严格单调并且满足条件 $\varphi'(t)\neq 0$。我们来考察由参数式

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in J,$$

所定义的函数

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)).$$

已经知道，这函数的一阶导数可以表示为

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

为了求二阶导数，我们把一阶导数$\frac{dy}{dx}$看成参数式表示的函数

$$x=\varphi(t),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad t\in J.$$

对这函数又可应用参数表示函数的求导公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}.$$

这样，我们求得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

更高阶的导数也可用类似的办法求出。

对于参数式表示的函数的二阶导数，有的初学者误以为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}.$$

我们特别指出这一错误，希望读者引以为戒。

## §3 无穷小增量公式与有限增量公式

函数的导数为我们了解这函数的变化提供了相当有用的信息。无穷小增量公式与有限增量公式是我们利用导数研究函数的重要工具。

### 3.a 无穷小增量公式

我们已经知道：如果函数 $f$ 在 $x_0$ 点可导，那么就有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

这式又可写成

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h),$$

或者

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

以上这些公式称为无穷小增量公式，它们反映了当 $\Delta x=h=x-x_0\to 0$ 时函数的变化状况。

作为上述公式的应用，我们来讨论函数的极值问题。

**定义** 设 $I$ 是一个区间，$x_0\in I$。如果存在 $\eta>0$，使得 $U(x_0,\eta)\subset I$，那么我们就说 $x_0$ 是区间 $I$ 的一个内点。

区间 $I$ 除去端点而外的所有的点都是内点。它的全体内点的集合是一个开区间，记为 $I^0$。

**定义** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义，$x_0\in I^0$。如果存在 $x_0$ 的一个邻域 $U(x_0,\delta)\subset I$，使得对任何 $x\in U(x_0,\delta)$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么我们就说函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得极大值(极小值)$f(x_0)$。这时，如果对任何 $x\in \check{U}(x_0,\delta)$ 都有

$$f(x)<f(x_0)\quad (f(x)>f(x_0)),$$

那么我们就说函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极大值(严格的极小值)。

函数的极大值和极小值统称极值。使函数取得极值的点$x_0$称为极值点。

**注记** 极值是一个局部的概念。所谓函数$f$在一点$x_0$取得极大值(极小值)，仅仅意味着：与邻近各点的函数值相比较，这点的函数值$f(x_0)$是较大的(较小的)。函数$f$在区间$I$上的最大值(最小值)则是一个整体的概念。

**引理** 设$A\in\mathbb{R}$，$A\neq 0$。如果

$$\varphi(h)=Ah+o(h)\quad(h\to 0),$$

那么可以断定：对于充分小的$h\neq 0$，$\varphi(h)$与$Ah$同号(即同时大于0或者同时小于0)。

**证明** 因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{Ah}=1>0,$$

所以$|h|$充分小时也有

$$\frac{\varphi(h)}{Ah}>0.\qquad\square$$

关于可微函数在区间的内点取得极值的必要条件，有以下的费马(Fermat)定理。

**定理1(极值的必要条件)** 设函数$f$在区间$I$有定义，在这区间的内点$x_0$处取得极值。如果$f$在$x_0$点可导，那么必有

$$f'(x_0)=0.$$

**证明** 用反证法。我们写出无穷小增量公式

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0),$$

这里

$$A=f'(x_0).$$

假设$A\neq 0$，那么按照上面的引理，当$h=x-x_0$充分小时，$f(x)-f(x_0)$与$A(x-x_0)$同号。如果$A>0$，那么

$$f(x)-f(x_0)\begin{cases}<0, & 对于\ x\in(x_0-\delta,x_0),\\ >0, & 对于\ x\in(x_0,x_0+\delta),\end{cases}$$

这里 $\delta$ 是充分小的正数。我们看到，如果 $A>0$，那么 $f$ 在 $x_0$ 点不可能取得极值。类似地可以证明，如果 $A<0$，那么 $f$ 在 $x_0$ 点也不可能取得极值。因此，只要函数 $f$ 在区间的内点 $x_0$ 处可导，它在该点取得极值的必要条件就是 $f'(x_0)=0$。 □

**定义** 我们把使得 $f'(x_0)=0$ 的点 $x_0$ 叫做函数 $f$ 的临界点。

**注记** 函数 $f$ 在极值点处可以没有导数。例如函数 $f_1(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处取得极小值但在这点不可导(见图4-5)。如果函数 $f$ 在极值点 $x_0$ 可导，那么由费马定理可知 $x_0$ 是 $f$ 的临界点。但即使对于可导的情形，临界点也只是取得极值的必要条件而不是充分条件。例如函数 $f_2(x)=x^3$ 以 $x=0$ 为临界点，但在该点并不取得极值(见图4-6)。

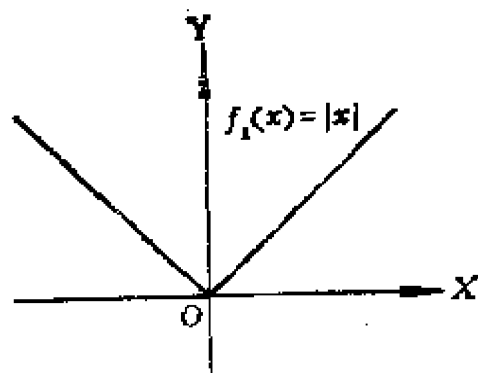



图 4-5

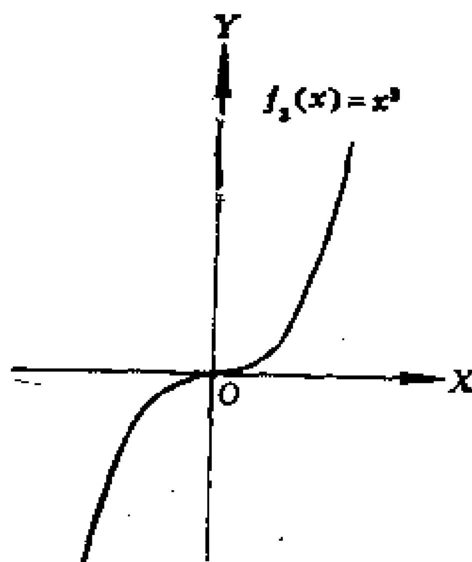



图 4-6

费马定理帮助我们缩小了搜寻极值点的范围。特别是对于 $f'(x)=0$ 只有有限个根的情形，我们只须对这些根逐个进行检查，从中找出极值点来。对于许多实际问题来说，需要寻找的是函数取得最大值或者最小值的点。这样的点如果是区间的内点也就必定是极值点，所以也可按照上面说的办法搜寻。于是，我们得到以下定理。

**定理2** 设函数 $f$ 在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导。如果方程 $f'(x)=0$在$(a,b)$中只有有限个根 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，那么函数$f$在区间$[a,b]$上的最大值$M$和最小值$m$分别为

$$M=\max\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_k),f(b)\}$$

和

$$m=\min\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_k),f(b)\}.$$

**证明** 在闭区间$[a,b]$连续的函数$f$必定取到它的最大值$M$（最小值$m$）。这最大值$M$（最小值$m$）可能在区间的端点取得，也可能在区间的内点取得。如果在内点$x_0$取得最大值（最小值），那么$x_0$必定是函数$f$的一个临界点。 □

**注记** 上面定理对$f$在$(a,b)$中无临界点的情形也适用。这时应有：

$$M=\max\{f(a),f(b)\}$$

和

$$m=\min\{f(a),f(b)\}.$$

在本节c段中，我们将要对极值的充分条件作一些讨论。

### 3.b 有限增量公式

无穷小增量公式反映了当$x\to x_0$时函数$f$的渐近性态。它只适合于研究函数的局部状况。为了考察函数在较大范围中的状况，我们需要考察对"有限增量"成立的相应的公式。

以下的罗尔(Rolle)定理是费马定理的推论。它虽然简单却很有用处。

**定理3** 设函数$f$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间$(a,b)$可导，并且满足

$$f(a)=f(b).$$

则存在$c\in(a,b)$，使得

$$f'(c)=0.$$

**证明** 在闭区间$[a,b]$连续的函数$f$必定能取到它的最大值

$M$和最小值$m$。如果$M=m$，那么$f$是常值函数，当然对任何一点$c\in(a,b)$都有$f'(c)=0$。如果$M>m$，那么至少有其中一个值在内点$c\in(a,b)$取得(因为$f(a)=f(b)$)。根据费马定理，在这点就有$f'(c)=0$。 □

罗尔定理的几何解释如下：如果联结光滑曲线段两端点的弦是水平的，那么在这曲线段上(两端点之间)必定有一点的切线也是水平的(见图4-7)。从这一几何解释出发，很容易联想到以下推广：不论联结光滑曲线段两端点的弦是否水平，在这曲线段上(两端点之间)必定有一点的切线平行于这弦(见图4-8)。这一推广的确切陈述，就是以下的拉格朗日(Lagrange)定理。

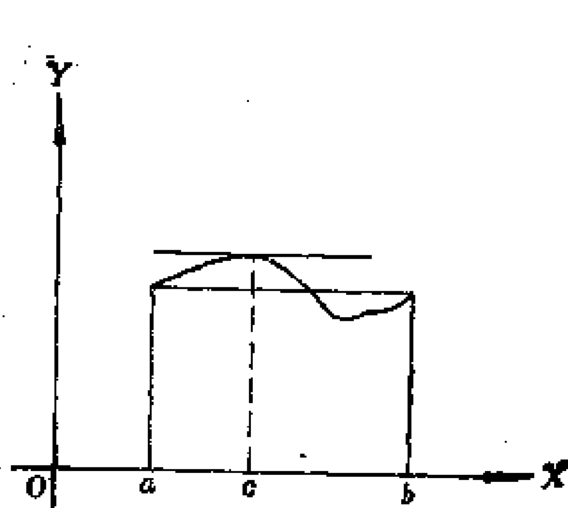


图 4-7

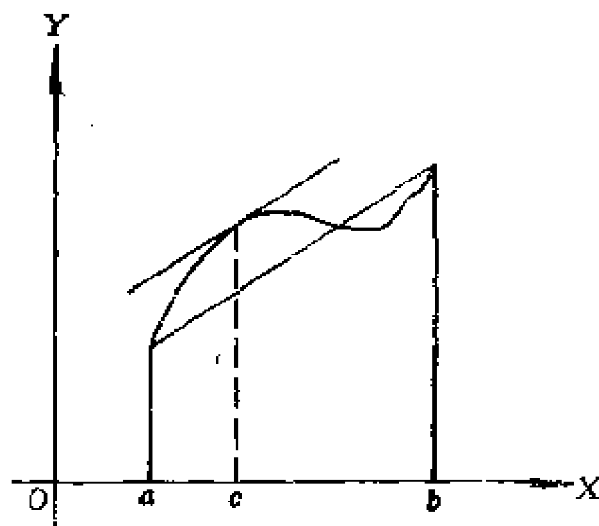


图 4-8

**定理4** 设函数$f$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间$(a,b)$可导，则至少存在一点$c\in(a,b)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

**证明** 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

容易看到：函数$F$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，并且满足条件

$$F(a)=F(b)=0.$$

根据罗尔定理，存在$c\in(a,b)$，使得

$$F'(c)=0,$$

即

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

拉格朗日定理又称为中值定理、均值定理等。定理的结论可以改写成：存在$c\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a).$$

这一式子又可写成

$$f(a)=f(b)+f'(c)(a-b).$$

现在，设$I$是任意一个区间（不一定是闭区间），并设函数$f$在$I$连续，在$I^0$可导。则对任意$x_0,x\in I$（不论是$x_0<x$或者是$x<x_0$），都存在介于$x_0$和$x$之间的$\xi$（或者$x_0<\xi<x$，或者$x<\xi<x_0$），使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0). \tag{3.1}$$

这只须对闭区间$[x_0,x]$或者$[x,x_0]$用拉格朗日定理就可得证。如果记

$$\frac{\xi-x_0}{x-x_0}=\theta,$$

$$x-x_0=h=\Delta x,$$

则有

$$0<\theta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}<1,$$

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0)=x_0+\theta h=x_0+\theta\Delta x.$$

于是公式(3.1)可以改写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0),$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta h)h,$$

或者

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

(3.1)式和以上三式都称为有限增量公式。在这些公式中，增量$\Delta x=h=x-x_0$不再限定是“无穷小量”，它可以是任何能够使得$x=x_0+h=x_0+\Delta x\in I$的“有限量”。

虽然在这些公式中含有不知其确切位置只知其范围的$\xi$或者$\theta$（只知道$\xi$介于$x_0$与$x$之间，$\theta$介于0与1之间），但这并不妨碍我们利用这些公式对函数的状况作定性的研究。

**定理5** 设函数$f$在区间$I$连续，在$I^0$可导，则

$$f\equiv\text{常数}\Longleftrightarrow f'(x)=0,\quad\forall x\in I^0.$$

**证明** “$\Rightarrow$”部分是显然的。这里来证明“$\Leftarrow$”部分。设

$$f'(x)=0,\quad\forall x\in I^0.$$

对于任意$x_1,x_2\in I$，存在介于$x_1$和$x_2$之间的$\xi$，使得

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\xi)(x_2-x_1).$$

因为$f'(\xi)=0$，所以有

$$f(x_2)=f(x_1).$$

因为上式对任意的$x_1,x_2\in I$都成立，所以$f$是常值函数。 □

**推论** 设$f$和$g$在区间$I$连续，在$I^0$可导。如果

$$g'(x)=f'(x),\quad\forall x\in I^0,$$

那么存在常数$C$，使得

$$g(t)=f(x)+C,\quad\forall x\in I.$$

**例1** 设函数$f$在R上有二阶导数。如果

$$f''(x)=0,\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

那么

$$f(x)\equiv C_0x+C_1.$$

**证明** 因为

$$(f')'(x)=f''(x)=0,\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

所以

$$f'(x)\equiv C_0\ (\text{常数}).$$

记

$$\varphi(x)=f(x)-C_0x,$$

则有

$$\varphi'(x)=f'(x)-C_0=0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},$$

因而

$$\varphi(x)\equiv C_1\ (常数)。$$

即

$$f(x)-C_0x\equiv C_1.$$

由此得到

$$f(x)\equiv C_0x+C_1.\qquad\square$$

**例2** 设函数 $f$ 在$\mathbf{R}$上有 $n+1$ 阶导数。如果

$$f^{(n+1)}(x)=0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},$$

那么

$$f(x)\equiv C_0x^n+C_1x^{n-1}+\cdots+C_n.$$

**证明** （用归纳法） $n=1$的情形已见于上一例子中。假设对于 $n=k$ 的情形结论成立。我们来考察 $n=k+1$的情形。这时 $f'$ 在$\mathbf{R}$上有 $k+1$阶导数，并且

$$(f')^{(k+1)}(x)=f^{(k+2)}(x)=0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},$$

因而（根据归纳的假设）有

$$f'(x)\equiv C_0'x^k+C_1'x^{k-1}+\cdots+C_k',$$

这里 $C_0',C_1',\cdots,C_k'$ 是常数。记

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{C_0'}{k+1}x^{k+1}-\frac{C_1'}{k}x^k-\cdots-C_k'x,$$

则有

$$\varphi'(x)=f'(x)-C_0'x^k-C_1'x^{k-1}-\cdots-C_k'$$
$$=0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},$$

因而

$$\varphi(x)\equiv C_{k+1}\ (常数)。$$

我们证明了

$$f(x)\equiv C_0x^{k+1}+C_1x^k+\cdots+C_kx+C_{k+1},$$

这里

$$C_0=\frac{C'_0}{k+1},\ C_1=\frac{C'_1}{k},\ \cdots,\ C_k=C'_k. \qquad \square$$

## 3.c 函数的升降与极值

我们常采用"升"与"降"这类形象的说法描述函数的单调性质。"上升"意味着"递增"，即只要 $x_1<x_2$ 就有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$；"下降"意味着"递减"，即只要 $x_1<x_2$ 就有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$。

**定理6** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，在 $I^0$ 可导，则有

(1) $f$ 在 $I$ 递增 $\Longleftrightarrow f'(x)\geqslant 0,\ \forall x\in I^0$；

(2) $f$ 在 $I$ 递减 $\Longleftrightarrow f'(x)\leqslant 0,\ \forall x\in I^0$。

**证明** 先证论断(1)的"$\Rightarrow$"部分。如果 $f$ 在 $I$ 递增，$x\in I^0$，那么对充分小的 $h\neq 0$，不论是 $h>0$ 或者是 $h<0$，都一定有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

由此得到

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

再来证明论断(1)的"$\Leftarrow$"部分．如果

$$f'(x)\geqslant 0,\qquad \forall x\in I^0,$$

那么对任意的 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$，都有

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant f(x_1).$$

我们完成了论断(1)的证明。论断(2)的证明可仿此作出． $\square$

**定理7** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，在 $I^0$ 可导，则有

(1) $f$ 在 $I$ 上严格递增的充分必要条件是：$f'(x)\geqslant 0$，$\forall x\in I^0$，并且 $f'(x)$ 不在 $I$ 的任何一个开子区间上恒等于0；

(2) $f$ 在 $I$ 上严格递减的充分必要条件是：$f'(x)\leqslant 0,\forall x\in I^0$，并且 $f'(x)$ 不在 $I$ 的任何一个开子区间上恒等于0。

**证明** 我们只对论断(1)写出证明。条件的必要性是显然的。下面证明条件的充分性。假设论断(1)中的条件得到满足，由定理6可知函数 $f$ 在区间 $I$ 上是递增的。如果存在 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，使得 $f(x_1) = f(x_2)$，那么对于 $x \in (x_1, x_2)$ 就有

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2),$$

因而在开区间 $(x_1, x_2)$ 上就有

$$f'(x) = 0.$$

但这与我们的条件矛盾。这一矛盾说明 $f$ 在 $I$ 上只能是严格递增的。 □

函数 $f$ 升降性改变之处，应该是这函数的极值点。从这一简单的观察出发，可以得到一些判别极值点的充分条件。在以下的讨论中，我们设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义，$x_0$ 是 $I$ 的一个内点。

首先，我们注意到，如果在 $x_0$ 点的两侧导函数 $f'(x)$ 有相反的符号，那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点应该取得严格的极值。更具体地说，就是：

(1) 如果从 $x_0$ 左侧到 $x_0$ 右侧，导函数 $f'(x)$ 从负变到正，那么函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点取得严格的极小值；

(2) 如果从 $x_0$ 左侧到 $x_0$ 右侧，导函数 $f'(x)$ 从正变到负，那么函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点取得严格的极大值。

我们把这结果写成定理的形式：

**定理8（极值的第一充分条件）** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义，在 $U(x_0, \eta) \subset I$ 连续，在 $\check{U}(x_0, \eta)$ 可导。

(1) 如果

$$f'(x)(x - x_0) > 0, \qquad \forall x \in \check{U}(x_0, \eta),$$

那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极小值；

(2) 如果

$$f'(x)(x - x_0) < 0, \qquad \forall x \in \check{U}(x_0, \eta),$$

那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极大值。

请注意，上面的定理甚至没有要求函数 $f$ 在 $x_0$ 点可导，因

而能应用于这样的函数：

$$f(x)=|x|,\quad x\in[-1,1].$$

对于在 $x_0$ 点二阶可导的函数，我们有以下的更为方便的判别法则。说到函数 $f$ 在 $x_0$ 点二阶可导的时候，自然先要假定 $f$ 在 $x_0$ 的某个邻域上一阶可导。我们作这样的约定以免除每次给予说明的麻烦。

**定理9（极值的第二充分条件）** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义，在 $x_0\in I^0$ 处二阶可导，并设 $f'(x_0)=0$。则有

（1）如果 $f''(x_0)>0$，那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极小值；

（2）如果 $f''(x_0)<0$，那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极大值。

**证明** 我们证明论断(1)：因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0,$$

所以存在 $\eta>0$，使得 $x\in\check{U}(x_0,\eta)$ 时有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

在 $\check{U}(x_0,\eta)$ 中，当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$。因而函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格的极小值。

对论断(2)的证明可仿此作出。 □

**定理10** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，在 $I^0$ 二阶可导，而 $x_0$ 是 $f$ 在 $I^0$ 中的唯一的临界点，则有

（1）如果 $f''(x_0)>0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $f$ 在区间 $I$ 上的最小值；

（2）如果 $f''(x_0)<0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $f$ 在区间 $I$ 上的最大值。

**证明** （1）因为 $f'(x)$ 在 $I^0$ 连续并且只有唯一的零点 $x_0$，

所以在 $x_0$ 的左边 $f'(x)$ 保持同一符号。在定理 9 的证明中我们已经看到：在 $x_0$ 左侧邻近处有 $f'(x)<0$。因而对于 $I^0$ 中 $x_0$ 点左边所有的 $x$ 都应有 $f'(x)<0$。同样可证：对于 $I^0$ 中 $x_0$ 点右边所有的 $x$ 都有 $f'(x)>0$。这样，我们证明了 $f(x_0)$ 是函数 $f$ 在区间 $I$ 的最小值。

(2) 可仿照(1)给出证明。 □

光学中的费马原理说：在任意两点间，光通过的路线是耗时最少的路线。在下面的例题中，我们从费马原理出发推证光的折射定律。

**例3** 设有两种均匀介质 I 和 II，光在介质 I 中的速度是 $c_1$，光在介质 II 中的速度是 $c_2$，两种介质的分界面是平面。如果有一束光从介质 I 中的 $A_1$ 点到介质 II 中的 $A_2$ 点，那么这束光走怎样的路线？

**解** 容易看出，在同一介质中，耗时最省的路线是直线。假设光在介质 I 中的路线是直线段 $A_1P$，在介质 II 中的路线是直线段 $PA_2$。采用图4-9中的记号表示，我们有

$$A_1P=\sqrt{h_1^2+x^2},$$
$$PA_2=\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}.$$

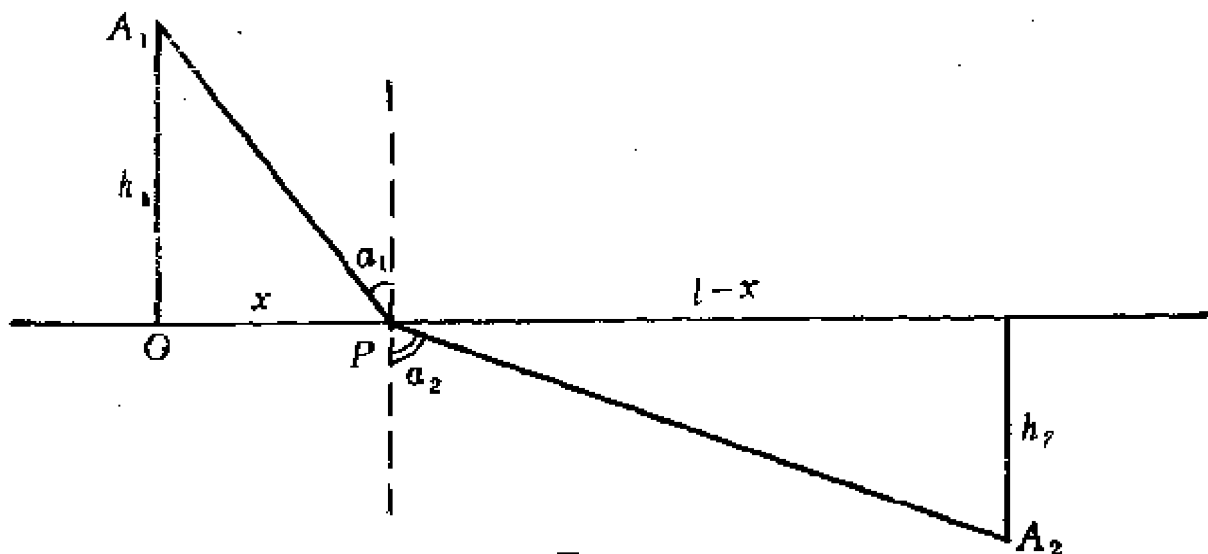



图 4-9

光从 $A_1$ 经 $P$ 到 $A_2$ 所耗费的时间 $T$ 是 $x$ 的函数：

$$T(x)=\frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2+x^2}+\frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}.$$

我们来求这函数的最小值．求导得

$$T'(x)=\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{1}{c_2}\frac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}},$$

$$T''(x)=\frac{1}{c_1}\frac{h_1^2}{(h_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{c_2}\frac{h_2^2}{(h_2^2+(l-x)^2)^{3/2}}.$$

因为 $T'(0)<0$，$T'(l)>0$，所以在 0 和 $l$ 之间有 $x_0$ 使得 $T'(x_0)=0$。又因为 $T''(x)>0$，所以只有唯一的 $x_0$ 能使得 $T'(x_0)=0$。在 $x_0$ 点函数 $T(x)$ 取得最小值．这点满足的方程为

$$\frac{1}{c_1}\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2+x_0^2}}=\frac{1}{c_2}\frac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}},$$

即

$$\frac{1}{c_1}\sin\alpha_1=\frac{1}{c_2}\sin\alpha_2,$$

或者

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

这就是著名的折射定律．

# 第五章　原函数与不定积分

## §1　原函数与不定积分的概念

**定义**　设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义。如果函数 $F$ 在 $I$ 连续，在 $I^0$ 可导，并且满足条件：

$$F'(x)=f(x),\qquad \forall x\in I^0,$$

或者

$$dF(x)=f(x)dx,\qquad \forall x\in I^0,$$

那么我们就说 $F$ 是函数 $f$ 的一个原函数，或者说 $F$ 是微分形式 $f(x)dx$ 的一个原函数。

**定理1**　设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义。如果函数 $F(x)$ 是函数 $f$ 的一个原函数，那么对任何 $C\in\mathbb{R}$，函数

$$F(x)+C$$

也是函数 $f$ 的原函数。并且 $f$ 的任何原函数也都可以表示成这种形式。

**证明**　首先，对任何 $C\in\mathbb{R}$，显然有

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),\qquad \forall x\in I^0,$$

因而函数 $F(x)+C$ 是 $f$ 的原函数。其次，设 $G$ 是 $f$ 的任何一个原函数，那么

$$(G(x)-F(x))'=0,\qquad \forall x\in I^0,$$

因而

$$G(x)-F(x)=C,\qquad \forall x\in I.$$

这证明了

$$G(x)=F(x)+C.\qquad \square$$

**定义**　设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义，函数 $F$ 是 $f$ 的一个原函

数，则函数簇

$$F(x)+C \quad (C\in\mathbf{R})$$

表示$f$的一切原函数。我们把这函数簇叫做函数$f(x)$的不定积分，或者叫做微分形式$f(x)\mathrm{d}x$的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

在这里，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积表示式，而$\int$是表示不定积分的符号。

根据定义有

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x), \qquad \mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$$

和

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C, \qquad \int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

因此，在允许相差一个任意常数的意义之下，求不定积分这一运算恰好是求导或者求微分的逆运算。

根据定义很容易验证以下的运算法则。

**定理2** 如果$F(x)$和$G(x)$分别是函数$f(x)$和$g(x)$的原函数，$\lambda$是一个实数，那么$F(x)+G(x)$是函数$f(x)+g(x)$的原函数，$\lambda F(x)$是函数$\lambda f(x)$的原函数。换句话说，我们有以下运算法则：

$$\int(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int(\lambda f(x))\mathrm{d}x=\lambda\int f(x)\mathrm{d}x.$$

既然不定积分是求导运算的逆运算，从已有的导数表就可以翻出一个不定积分表来(见下页)。

表中的每一个不定积分都可以这样来验算：将等式右端的函数微分，应该得到左端的被积表示式。

不定积分表应该熟记，以作为进一步计算不定积分的基础——正象熟记九九表作为乘除法的基础那样。

## 不定积分表

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C,$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C,$$

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$\int x^{-1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C,$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (a>0, a\neq 1),$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x} = \mathrm{tg}\,x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x} = -\mathrm{ctg}\,x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}} = \mathrm{arc\ tg}\,x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \mathrm{arc\ sin}\,x + C,$$

$$\int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,x + C,$$

$$\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,x + C,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}} = \ln|x + \sqrt{x^{2}\pm a^{2}}| + C.$$

**例1** 求$\int \mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x$.

**解**

$$\int \mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{tg}x - x + C.$$

**例2** 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}$.

**解**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 2x} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x) + C.$$

上式右端可以改写为

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{4\cos x \sin x} + C = -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}2x + C.$$

在下一节中，我们将用更简单的办法求得这一结果。

**例3** 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$.

**解**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta|) + C$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + C.$$

例4　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$。

解　$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x+a)}$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例5　求$\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$。

解　$\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x-\mathrm{arctg}x+C.$$

例6　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$。

解　$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$$

例7　求$\int\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}\mathrm{d}x$。

解　$\int\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{(x^2+1)+(x-2)}{(x^2+1)(x-2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$=\ln|x-2|+\operatorname{arctg}x+C.$$

## §2 换元积分法

换元积分法是求不定积分时非常有用的一种方法。这种方法的依据是微分表示的不变性。我们把这依据陈述为以下引理。

**引理** 如果

$$\mathrm{d}G(u)=g(u)\,\mathrm{d}u,$$

那么把 $u$ 换成可微函数 $u=u(v)$ 仍有

$$\mathrm{d}G(u(v))=g(u(v))\,\mathrm{d}u(v).$$

这就是说，从

$$\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C$$

可以得到

$$\int g(u(v))\,\mathrm{d}u(v)=G(u(v))+C.$$

上面引理说明：在不定积分的表示式中可以作变数替换。这一结果以两种形式应用于求不定积分，这就是下面将要介绍的第一换元法和第二换元法。

### 2.a 第一换元法

采用这一方法计算 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$，就要把被积表示式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 写成两因式的乘积，前一因式形状如 $g(u(x))$，后一因式形状如 $\mathrm{d}u(x)$。如果我们求得

$$\int g(u)\,\mathrm{d}u=G(u)+C,$$

那么

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(u(x))\,\mathrm{d}u(x)=G(u(x))+C.$$

在具体解题的时候，我们不必每次写出代表中间变量的符号 $u$，只要在心目中把 $u(x)$ 当作一个整体来看待就可以了。

**例1** （出现文字 $a$ 的地方都假定$a\neq 0$）

$$\int e^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

$$\int e^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}(ax)=\frac{1}{a}e^{ax}+C.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}2x+C.$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(ax)}{\sin^2 ax}=-\frac{1}{a}\mathrm{ctg}ax+C.$$

$$\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\cos(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$$

$$=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C.$$

更一般地，我们有公式：

$$\int g(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int g(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$$

**例2** 求$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$，$\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$，$\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}\mathrm{d}x$.

**解** $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

$$\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2+C.$$

$$\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}\mathrm{tg}x^3+C.$$

更一般地，我们有公式：

$$\int g(x^k)x^{k-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\int g(x^k)\mathrm{d}(x^k).$$

**例3** 求$\int\frac{(\ln x)^k}{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{(\ln x)^k}{x} dx = \int (\ln x)^k d(\ln x)$

$$= \frac{1}{k+1}(\ln x)^{k+1} + C.$$

更一般地，我们有公式：

$$\int \frac{g(\ln x)}{x} dx = \int g(\ln x) d(\ln x).$$

例4 求$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$。

解 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C.$

例5 求$\int \sin^2 x dx$，$\int \cos^2 x dx$。

解 $\int \sin^2 x\ dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

例6 求$\int \operatorname{tg} x dx$，$\int \operatorname{ctg} x dx$。

解 $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

例7 求$\int \cos^3 x dx$，$\int \sin^3 x dx$。

解 $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x d(\sin x)$

$$= \int (1-\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

$$\int \sin^3 x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

**例8** 求$\int \frac{dx}{\cos x}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \sin x}{1 - \sin x}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|^2 + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C,$$

在计算过程中，我们用到以下事实：

$$\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C.$$

**例9** 求$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$，$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

**例10** 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$。

**解** 分几种情形讨论。

情形1 设二次三项式$x^2+px+q$有两个不相等的实根$\alpha$和$\beta$，即

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta),\quad \alpha\neq\beta,$$

则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|+C.$$

情形2 设$x^2+px+q$有重实根$\gamma$，即

$$x^2+px+q=(x-\gamma)^2.$$

这时有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\gamma)^2}$$

$$=-\frac{1}{x-\gamma}+C.$$

情形3 设$x^2+px+q$有一对共轭复根$\lambda\pm i\mu$，这时

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=(x-\lambda)^2+\mu^2,$$

其中$\lambda=-\frac{p}{2},\mu=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$。对这一情形有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\lambda)^2+\mu^2}$$

$$=\frac{1}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{x-\lambda}{\mu}+C.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

### 2.b 第二换元法

采用这种方法计算不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的时候，我们作适当的变数替换 $x=\varphi(t)$，这里的函数 $\varphi(t)$在区间 $J$ 上严格单调并且连续，在这区间的内部可导，并且满足条件 $\varphi'(t)\neq 0$。如果我们求得

$$\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t) = G(t) + C,$$

那么在这式中作变数替换$t=\varphi^{-1}(x)$就得到

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

**例11** 求$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

**解** 令$x = a\sin t \quad (-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2)$，我们得到

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 t + a^2 \sin t \cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

**例12** 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^2}$.

**解** 令 $x = a\,\mathrm{tg}\,t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{a\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$，我们得到

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{2a^3}(t + \sin t \cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^2 t + 1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C.$$

在以下两个例子里，我们用换元积分法计算上节不定积分表最后一行中的两个积分。

**例13** 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

**解** 令 $x = a \operatorname{tg} t$，则 $dx = \frac{a\, dt}{\cos^2 t}$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C_0$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_0$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C,$$

这里 $C = C_0 - \ln a$ 仍是任意常数。

**例14** 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，这里$|x| > a > 0$.

**解** 令 $x = a \sec t$（对于$x > a$的情形 $0 < t < \pi/2$；对于$x < -a$的情形$-\pi/2 < t < 0$），则 $dx = a \sec t \cdot \operatorname{tg} t\, dt$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C_0$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right| + C_0$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C,$$

这里 $C = C_0 - \ln a$ 仍为任意常数。

**注记** 从上面的例题中，我们看到：对于涉及$\sqrt{a^2 - x^2}$或$\sqrt{x^2 \pm a^2}$的被积函数，有时可以引入一个辅助的"角变量" $t$ 作为参数。

(1) 对于涉及$\sqrt{a^2 - x^2}$的被积函数，可以令 $x = a\cos t$或者令 $x = a\sin t$（见图5-1）。

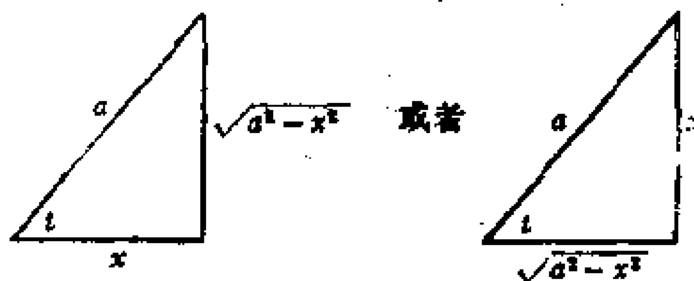



图 5-1

(2) 对于涉及$\sqrt{x^2 + a^2}$的被积函数，可以令 $x = a\operatorname{tg} t$或者令 $x = a\operatorname{ctg} t$（图5-2）。

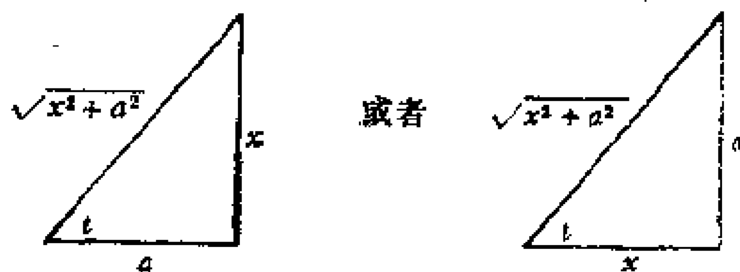



图 5-2

(3) 对于涉及$\sqrt{x^2 - a^2}$的 被 积 函 数，可 以 令 $x = a\sec t = \frac{a}{\cos t}$或者令 $x = a\operatorname{cosec} t = \frac{a}{\sin t}$（图5-3）。

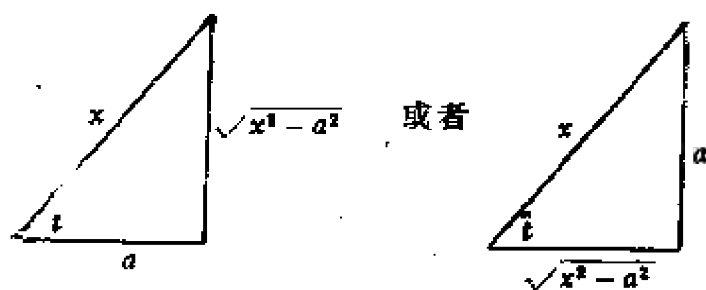



图 5-3

## §3 分部积分法

求不定积分的另一重要方法是分部积分法．这种方法的依据是乘积微分公式

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

我们把这公式改写为

$$u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x),$$

由此得到

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

这就是分部积分法的公式．在应用时，可以不必引入新的记号 $u$ 和 $v$，只须在心中默记住把哪一个式子当作 $u(x)$，把哪一个式子当作 $v(x)$。

**例1** 求 $\int x\cos x\,dx$，$\int x\sin x dx$ 和 $\int xe^x dx$.

**解**
$$\int x\cos x dx = \int x\,d\sin x$$
$$= x\sin x - \int \sin x dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$

$$\int x\sin x dx = -\int x d\cos x$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

$$= (x-1)e^x + C.$$

**例2** 求$\int x^k \ln x\,dx$.

**解** 先设$k \neq -1$，则有

$$\int x^k \ln x dx = \frac{1}{k+1}\int \ln x\,d(x^{k+1})$$

$$= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x - \frac{1}{k+1}\int x^{k+1} d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x - \frac{1}{k+1}\int x^k dx$$

$$= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln x - \frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1} + C.$$

对于$k=-1$的情形，我们有

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\,d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

**例3** 求$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

**解**
$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\,x\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \mathrm{arc\,tg}\,x - \frac{1}{2}\int x^2\,d(\mathrm{arc\,tg}\,x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + C.$$

**例4** 求$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$.

**解** $\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \int x^2 \,\mathrm{d}\sin x$

$$= x^2 \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,\mathrm{d}x$$

$$= x^2 \sin x + 2\int x \,\mathrm{d}\cos x$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C.$$

在上面的例子中，我们接连两次运用分部积分的手续. 一般说来，多次运用分部积分手续，我们可以求出以下形式的一些不定积分：

$$\int x^k \sin bx \,\mathrm{d}x, \qquad \int x^k \cos bx \,\mathrm{d}x,$$

$$\int x^k e^{ax} \mathrm{d}x, \qquad \int x^k \ln^m x \,\mathrm{d}x.$$

这里$k, m \in \mathbb{N}$.

我们再来看另外一些类型的例子.

**例5** 求$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$和$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

**解** 利用分部积分法得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2}-\int x\,d\sqrt{x^2-a^2}$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

由此得到

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

用类似的办法可以求得

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

**例6** 求$\int e^{ax}\cos bx\,dx$和$\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

**解** 利用分部积分法可得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

解这方程组，我们求得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=e^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

**例7** 求 $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

**解** 利用分部积分法得

$$
\begin{aligned}
J_n&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,d\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\\
&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\
&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\
&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}.
\end{aligned}
$$

由此得到递推公式

$$
J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n.
$$

因为我们已经知道

$$
J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\ tg}\frac{x}{a}+C,
$$

所以利用上面的递推公式可以求得任何 $J_n$.

## §4 有理函数的积分

在数学中，常常有这样的情形：虽然某个运算在一定范围内有定义并且结果也在这范围内，但它的逆运算的结果却可能跑出这范围之外. 例如，有理数的平方总是有理数，但有理数的平方根却可能是无理数或者复数. 我们知道，初等函数的导数仍是初等函数. 但作为求导的逆运算的不定积分，却不具有这样的性质. 有不少初等函数的原函数不再是初等函数. 例如，以下这些不定积分就不能表示成初等函数的形式：

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\qquad \int \cos x^2\,dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\qquad \int \frac{\cos x}{x}dx,\qquad \int \frac{x}{\ln x}dx.$$

请读者注意：一个不定积分不能用初等函数来表示，绝不意味着这不定积分不存在。相反地，在下一篇中我们将证明：任何连续函数 $f(x)$ 都具有原函数。换句话说，任何连续函数的不定积分总是存在的，只是这不定积分并不一定能表示为初等函数。

有一些类型的函数，它们的不定积分总能够表示为初等函数。对这种情形，我们说这些类型的函数能积分为有限形式。本节和下一节将讨论某几类可积分为有限形式的函数。

首先考察有理分式函数

$$f(x)=P(x)/Q(x),$$

这里 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是实系数的多项式。利用多项式的带余除法，我们总可以把这有理分式写成以下形式

$$P(x)/Q(x)=P_0(x)+P_1(x)/Q(x),$$

这里 $P_0(x)$ 和 $P_1(x)$ 也是实系数的多项式，其中 $P_1(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数。多项式的不定积分是已经知道的。所以我们只须讨论真分式 $P_1(x)/Q(x)$ 的不定积分。为记号简单起见，不妨设 $f(x)=P(x)/Q(x)$ 就已经是既约的真分式，即假设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是互素的实系数多项式，$P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数。

在实数范围内，一个多项式的不可约因式只可能是一次的或者二次的。设 $Q(x)$ 的不可约因式分解如下：

$$Q(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

这里的 $a_i(i=1,\cdots,r)$ 是实数，$x^2+p_jx+q_j\quad(j=1,\cdots,s)$ 是不可约的(即无实根的)实系数二次三项式。代数学中有这样的定理：

**定理1** 如上所述的真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，可以唯一地表示为以下形状的简单分式之和：

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_i}{x-a_i}+\frac{A'_i}{(x-a_i)^2}+\cdots+\frac{A_i^{(k_i-1)}}{(x-a_i)^{k_i}}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M'_jx+N'_j}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{M_j^{(k_j-1)}x+N_j^{(k_j-1)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}}\right),$$

这里的 $A_i, A'_i, \cdots, A_i^{(k_i-1)}$； $M_j, M'_j, \cdots, M_j^{(k_j-1)}$； $N_j, N'_j, \cdots, N_j^{(k_j-1)}$ 等都是实常数($i=1,\cdots,r$, $j=1,\cdots,s$)。

这定理中的分解式，通常就叫做真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的简单分式分解或者部分分式分解。

定理 1 的证明可在一般的高等代数教科书中查到，这里就不转述了。为了帮助理解，我们以一种特殊情形为例作简单的说明。如果 $Q(x)=(x-a)^k$，那么真分式的分子 $P(x)$ 至多是 $k-1$ 次的。借助于带余除法(逐次除以 $x-a$)，我们可以把 $P(x)$ 表示为

$$P(x)=A(x-a)^{k-1}+A'(x-a)^{k-2}+\cdots$$

$$+A^{(k-2)}(x-a)+A^{(k-1)}.$$

用 $Q(x)=(x-a)^k$ 除上式两边就得到了 $\frac{P(x)}{Q(x)}$的部分分式展开：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{(x-a)^2}+\cdots$$

$$+\frac{A^{(k-2)}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A^{(k-1)}}{(x-a)^k}.$$

以定理 1 为依据，在实际解题的时候，可以用待定系数法来求真分式的部分分式分解。具体步骤如下：

第一步．先写出含有待定系数 $A_i,\cdots,A_i^{(k_i-1)}, M_j,\cdots, M_j^{(k_j-1)}$, $N_j,\cdots, N_j^{(k_j-1)}$的分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_i}{x-a_i}+\cdots+\frac{A_i^{(k_i-1)}}{(x-a_i)^{k_i}}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}+\cdots+\frac{M_j^{(k_j-1)}x+N_j^{(k_j-1)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}}\right);$$

第二步．用$Q(x)$乘上式两边以消去分母；

第三步．比较所得式子两边同次项的系数，得到关于待定系数的线性方程组；

第四步．解这方程组就可确定部分分式分解的各个系数。

**例1** 试求$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$的部分分式分解。

**解** 设

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{A'}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-2}.$$

消去分母得

$$1=A(x^2-3x+2)+A'(x-2)+B(x^2-2x+1).$$

比较上式两边同次项系数得

$$\begin{array}{c|llll} x^2 & A & & +B & =0, \\ x & -3A & +A' & -2B & =0, \\ 1 & 2A & -2A' & +B & =1. \end{array}$$

解这方程组得到：$A=-1, A'=-1, B=1$。于是，我们得到

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}.$$

**例2** 试求

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

的部分分式分解。

**解** 设

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{M'x+N'}{(x^2+1)^2}.$$

消去分母得

$$
\begin{aligned}
&3x^4+2x^3+3x^2-1\\
&\quad = A(x^4+2x^2+1)+(Mx+N)(x^3-2x^2+x-2)\\
&\qquad +(M'x+N')(x-2).
\end{aligned}
$$

比较上式两边同次项的系数得

$$
\begin{array}{c|lllll}
x^4 & A & +M & & & & =3,\\
x^3 & & -2M & +N & & & =2,\\
x^2 & 2A & +M & -2N & +M' & & =3,\\
x & & -2M & +N & -2M' & +N' & =0,\\
1 & A & & -2N & & -2N' & =-1.
\end{array}
$$

解这方程组得

$$A=3,\quad M=0,\quad N=2,\quad M'=1,\quad N'=0.$$

于是，我们得到

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

通过部分分式分解，求有理分式的不定积分的问题归结为计算以下两种类型的积分：

Ⅰ. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$,

Ⅱ. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$.

我们已经会计算Ⅰ型的积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\begin{cases}\dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C, & n\neq 1,\\[2ex] \ln|x-a|+C, & n=1.\end{cases}$$

为了计算Ⅱ型的积分，我们将 $x^2+px+q$ 写成

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q&=(x+p/2)^2+q-p^2/4\\
&=t^2+b^2,
\end{aligned}
$$

这里 $t=x+p/2, b=\sqrt{q-p^2/4}$。通过变数替换 $x=t-p/2$，求Ⅱ型积分的问题又归结为计算以下两种类型的不定积分：

$$\text{Ⅱ}'. \quad \int \frac{t}{(t^2+b^2)^n} dt,$$

$$\text{Ⅱ}''. \quad \int \frac{dt}{(t^2+b^2)^n}.$$

其中 Ⅱ′ 型的积分很容易计算，

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+b^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(t^2+b^2)^{n-1}} + C, & n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}\ln(t^2+b^2) + C, & n = 1. \end{cases}$$

为了计算Ⅱ″型的积分 $J_n$，可以利用已知的递推公式

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)b^2} \frac{t}{(t^2+b^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)b^2} J_{n-1}$$

和已知的结果

$$J_1 = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{b} + C.$$

这样，我们完全解决了求有理分式函数的不定积分的问题。

**例3** 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

**解** 利用例 1 中展开部分分式的结果，我们得到

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

**例4** 求不定积分

$$I = \int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

**解** 利用例 2 中得到的部分分式分解可得

$$I = 3\int\frac{dx}{x-2} + 2\int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= 3\ln|x-2| + 2\text{arc tg } x - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C.$$

通过上面的讨论，我们实际上已经弄清楚了有理分式函数的不定积分的具体表示形式。

**定理2** 设$\frac{P(x)}{Q(x)}$是既约真分式，将 $Q(x)$分解为不可约因式的乘积

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{k_j},$$

记

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i-1} \cdot \prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{k_j-1},$$

则有

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\ln|x-a_i|$$

$$+ \sum_{j=1}^{s}\beta_j\ln(x^2+p_jx+q_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{s}\frac{2\gamma_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}}\text{arc tg}\frac{2x+p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}} + C.$$

这里 $P_1(x)$是比 $Q_1(x)$次数低的多项式，$\alpha_i,\beta_j$ 和 $\gamma_j$ 都是实常数 $(i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s)$。

利用这一定理，我们还可以直接用待定系数法求真分式的不定积分。请看下面的例子。

**例5** 求 $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$。

**解** 因为 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，所以可设

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+1} + \alpha \ln|x+1|
$$

$$
+ \beta \ln(x^2 - x + 1)
$$

$$
+ \frac{2\gamma}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
$$

上式两边求导得

$$
\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2ax+b)(x^3+1) - 3x^2(ax^2+bx+c)}{(x^3+1)^2}
$$

$$
+ \frac{\alpha}{x+1} + \beta \frac{2x-1}{x^2-x+1}
$$

$$
+ \frac{\gamma}{x^2-x+1}.
$$

以$(x^3+1)^2$乘上式两边得

$$
\begin{aligned}
1 = {} & (2ax+b)(x^3+1) - 3x^2(ax^2+bx+c) \\
& + \alpha(x^3+1)(x^2-x+1) + \beta(2x-1)(x^3+1)(x+1) \\
& + \gamma(x^3+1)(x+1).
\end{aligned}
$$

比较系数得：

$$
\begin{array}{l|llllllll}
x^5 & & & & \alpha & +2\beta & & =0, \\
x^4 & -a & & & -\alpha & +\beta & +\gamma & =0, \\
x^3 & & -2b & & +\alpha & -\beta & +\gamma & =0, \\
x^2 & & & -3c & +\alpha & +2\beta & & =0, \\
x & 2a & & & -\alpha & +\beta & +\gamma & =0, \\
1 & & b & & +\alpha & -\beta & +\gamma & =1.
\end{array}
$$

解这方程组得

$$
a = 0, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = 0,
$$

$$
\alpha = \frac{2}{9}, \quad \beta = -\frac{1}{9}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.
$$

于是，我们求得

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

我们对有理分式的积分法作一小结。任何有理分式都可写成整式与既约真分式之和。为了积分既约真分式，可以利用待定系数法将其写成简单分式之和。——简单分式的积分是我们已经知道的。对某些情形，还可以采取灵活变通的办法作简单分式分解，并结合其他手段计算积分。

**例6** 求 $\int\frac{x^2+3ax-1}{x^4+x^2-2}dx$。

**解** 我们有

$$\frac{x^2+3ax-1}{x^4+x^2-2}=\frac{3ax+(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+2)}$$

$$=\frac{ax[(x^2+2)-(x^2-1)]+(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+2)}$$

$$=a\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+2}\right)+\frac{1}{x^2+2}.$$

于是得到

$$\int\frac{x^2+3ax-1}{x^4+x^2-2}dx$$

$$=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

**例7** 求 $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$ 和 $\int\frac{dx}{x^4+1}$。

**解** 我们有

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C.$$

用类似的办法可以求得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+C.$$

## §5 某些可有理化的被积表示式

某些被积表示式可以通过变元替换而有理化。我们将介绍这样一些类型：

Ⅰ. $R(\sin x,\cos x)dx$,

Ⅱ. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$,

Ⅲ. $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$,

Ⅳ. $x^\lambda(a+bx^\mu)^\nu dx$ （$\lambda,\mu,\nu$ 满足一定的条件）.

在本节中，我们以 $R(u,v)$ 表示两个变元 $u$ 和 $v$ 的有理式，即：

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)},$$

其中 $P(u,v)$ 和 $Q(u,v)$ 是变元 $u$ 和 $v$ 的多项式（即由变元 $u,v$ 和

实数经过有限次加法和乘法运算生成的式子)。

5.a　$R(\sin x, \cos x)dx$

被积表示式 $R(\sin x, \cos x)dx$ 可以通过变元替换

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \text{即}\ x=2\operatorname{arc\,tg} t$$

实现有理化。事实上，我们有

$$\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

于是得到

$$R(\sin x, \cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

变元替换

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \text{即}\ x=2\operatorname{arc\,tg} t$$

被称为万能替换。所谓“万能”是指：任何三角函数的有理式均能用这变换实现有理化。但这种替换并不总是最简单或者最方便的。对于某些特别情形，采用其他形式的变换更为简单。例如，对于形状如

$$R_1(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx$$

的表示式，采用替换 $\sin x=t$ 就可以更方便地把它有理化为

$$R_1(t, 1-t^2)dt.$$

对于形状如

$$R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx$$

的表示式，采用替换 $\cos x=t$ 也就可以把它有理化为

$$-R_2(1-t^2, t)dt$$

另外，对于形状如

$$R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)\mathrm{d}x$$

的表示式．可采用替换

$$\mathrm{tg}\,x = t, \text{ 即 } x = \mathrm{arc\,tg}\, t$$

将它有理化为

$$R_3\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

5.b $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$

我们有

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= \pm\left[\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 \pm \left(\sqrt{\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|}\right)^2.$$

通过替换

$$u = \sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

可以将$\sqrt{ax^2+bx+c}$化成以下三种情形之一：

$$\sqrt{u^2+\lambda^2}, \quad \sqrt{u^2-\lambda^2} \quad \text{或} \quad \sqrt{\lambda^2-u^2}$$

(被开方式恒负的情形可不予考虑)．我们把$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$转化为：

$$R_1(u,\sqrt{u^2+\lambda^2})\mathrm{d}u, \quad R_2(u,\sqrt{u^2-\lambda^2})\mathrm{d}u$$

$$\text{或} \quad R_3(u,\sqrt{\lambda^2-u^2})\mathrm{d}u.$$

对这三种情形，分别令

$$u=\lambda\,\mathrm{tg}\,t, \quad u=\lambda\sec t \quad \text{或} \quad u=\lambda\sin t,$$

就可以将被积表示式转化为三角函数的有理式．再套用5.a 段中的手续就可以最后完成有理化的进程．

5.c $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x$

如果 $\alpha\delta-\beta\gamma=0$，可设

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}=\lambda,$$

那么

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x=R(x,\sqrt[n]{\lambda})\,\mathrm{d}x,$$

它本身已是有理式。因此，在以下的讨论中，不妨设

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq0.$$

在被积表示式中作替换

$$t=\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

即

$$x=\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}.$$

我们得到

$$\mathrm{d}x=\frac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}\mathrm{d}t.$$

于是 $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x$ 有理化为

$$R\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n},t\right)\frac{n(\alpha\delta-\beta\gamma)t^{n-1}}{(\alpha-\gamma t^n)^2}\mathrm{d}t.$$

本段的讨论也适用于 $\gamma=0$ 的情形(这时不妨设 $\delta=1$)。我们指出：对于

$$R(x,\sqrt[n]{\alpha x+\beta})\,\mathrm{d}x,$$

可以作替换 $t=\sqrt[n]{\alpha x+\beta}$ 使它有理化。

### 5.d　二项型微分式 $x^\lambda(\alpha+\beta x^\mu)^\nu\mathrm{d}x$

这里设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{Q}$；并设 $\alpha,\beta,\mu$ 和 $\nu$ 都不等于 0(否则就是很平凡的情形)。

与5.b 和 5.c 段不同，这里有可能根号里面套着另一个根

号。为了消除掉根号的嵌套，我们作变换

$$x^{\mu}=t \text{ 即 } x=t^{\frac{1}{\mu}},$$

于是

$$dx=\frac{1}{\mu}t^{\frac{1}{\mu}-1}dt$$

所讨论的微分表示式化成无根号嵌套的形式

$$x^{\lambda}(\alpha+\beta x^{\mu})^{\nu}dx=t^{\frac{\lambda}{\mu}}(\alpha+\beta t)^{\nu}\frac{1}{\mu}t^{\frac{1}{\mu}-1}dt$$

$$=\frac{1}{\mu}t^{\frac{\lambda+1}{\mu}-1}(\alpha+\beta t)^{\nu}dt$$

$$=\frac{1}{\mu}t^{\frac{\lambda+1}{\mu}+\nu-1}\left(\frac{\alpha+\beta t}{t}\right)^{\nu}dt.$$

如果$\frac{\lambda+1}{\mu}\in\mathbf{Z}$，或者$\frac{\lambda+1}{\mu}+\nu\in\mathbf{Z}$，或者 $\nu\in\mathbf{Z}$，那么这里的情形转化为 5.c 段讨论过的情形。

**注记** 切彼雪夫证明了：除了上述情形而外，二项型微分式都不能积分成有限形式。

# 第六章 定 积 分

在预篇中，我们已经看到，求曲边图形的面积与求变力所做的功等许多问题，都归结到求以下形状的和数的极限

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这样的和数的极限就是定积分。所涉及的极限概念，虽说总的精神与第二章中所介绍的一致，具体内容毕竟有一些不同，需要作进一步的解释。本章将介绍定积分的确切定义，并初步讨论定积分的性质、计算与应用。至于定积分存在的一般条件等问题，将在下一篇中作进一步的讨论。

## §1 定义与初等性质

定积分概念的精确化，是黎曼(Riemann)的贡献。所以人们又把这种积分叫做黎曼积分。本节就来介绍这一重要概念。

首先，对所涉及的术语和记号作一些说明。所谓闭区间$[a,b]$的一个分割，是指插入在$a$和$b$之间的有限个分点

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

这些分点把$[a,b]$分成$m$个闭子区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{m-1},x_m],$$

其中第$i$个闭子区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

我们把

$$|P| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m\}$$

叫做分割$P$的模。在分割$P$的每一闭子区间上任意选取一点

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

我们把这样 $m$ 个点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 叫做相应于分割 $P$ 的一组标志点，并约定用单独一个字母 $\xi$ 来表示它们。

设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义。对于 $[a,b]$ 的任意一个分割

$$P: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

和相应于这分割的任意一组标志点 $\xi$，可以作和数

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

我们把这样的和数称为函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的*积分和*（或者*黎曼和*）。

如果闭区间 $[a,b]$ 的分割的序列 $\{P^{(n)}\}$ 满足条件

$$\lim_{n \to +\infty} |P^{(n)}| = 0,$$

那么我们就说 $\{P^{(n)}\}$ 是一个*无穷细分割序列*。

**定义 I** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义。如果存在实数 $I$，使得对于任意无穷细分割序列 $\{P^{(n)}\}$，不论相应于每个分割 $P^{(n)}$ 的标志点组 $\xi^{(n)}$ 怎样选择，都有

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma(f, P^{(n)}, \xi^{(n)}) = I,$$

那么我们就说函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上*可积*，并把 $I$ 称为函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上的(定)*积分*，记为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \to 0} \sigma(f, P, \xi) = I.$$

这里 $\int$ 称为积分号，$f(x)dx$ 称为被积表示式，$a$ 和 $b$ 称为积分限（$a$ 称为下限，$b$ 称为上限）。

仿照第二章中的讨论，我们可以用 $\varepsilon$-$\delta$ 方式重述积分和的极限的定义。

**定义 I′** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，$I \in \mathbb{R}$。如果

对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$|P|<\delta$，不论相应的标志点组$\xi$怎样选择，总有

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数$f$在区间$[a,b]$可积，并且把$I$叫做函数$f$在区间$[a,b]$上的积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I.$$

定义I和定义I′的等价性，可以仿照第二章§5中的做法加以证明。

**例1** 常值函数$f(x)\equiv C$在任何区间$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b C\,\mathrm{d}x=C(b-a).$$

事实上，对于$[a,b]$的任意分割$P$和相应于这分割的任意标志点组$\xi$，都有

$$\sigma(C,P,\xi)=\sum_{i=1}^{m}C\,\Delta x_i=C(b-a).$$

利用关于序列极限的运算法则，立即可以得到：

**定理1**（积分的线性性质） 设函数$f$和$g$在$[a,b]$上可积，$\lambda\in\mathbb{R}$，则函数$f+g$和函数$\lambda f$也都在$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b\lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 我们有

$$\sigma(f+g,P,\xi)=\sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,P,\xi)$$

和

$$\sigma(\lambda f,P,\xi)=\lambda\sigma(f,P,\xi).\quad\square$$

以下引理指出了函数可积的一个必要条件。

**引理** 设函数 $f$ 在$[a,b]$上可积，则 $f$ 在$[a,b]$上有界。

**证明** 用反证法。 因为

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I,$$

所以对于 $\varepsilon=1>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|P|<\delta$，不论相应的标志点组 $\xi$ 怎样选择，都有

$$\begin{aligned}|\sigma(f,P,\xi)|&\leqslant|\sigma(f,P,\xi)-I|+|I|\\&<1+|I|.\end{aligned}$$

我们选定一个这样的分割 $P$。假设 $f$ 在$[a,b]$上无界，那么至少存在分割 $P$ 的一个闭子区间$[x_{j-1},x_j]$，使得 $f$ 在这闭子区间上是无界的。我们这样来选取 $\xi$：先任意选定

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\qquad\forall i\neq j,$$

然后选择 $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$满足以下条件

$$|f(\xi_j)|\Delta x_j>\left|\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\Delta x_i\right|+1+|I|.$$

对于这样选取的 $\xi$ 就有

$$\begin{aligned}1+|I|&>|\sigma(f,P,\xi)|\\&=\left|\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i\right|\\&\geqslant|f(\xi_j)|\Delta x_j-\left|\sum_{i\neq j}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\\&>1+|I|.\end{aligned}$$

这一矛盾说明所作的关于 $f$ 无界的假设不能成立。我们用反证法证明了 $f$ 必须在$[a,b]$上有界。 □

**定理2**（积分的可加性） 设 $a<b<c$。如果函数 $f$ 在$[a,b]$和$[b,c]$上都可积，那么它在$[a,c]$上也可积，并且

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 在$[a,b]$和$[b,c]$上可积的函数 $f$，在这两闭区间上也

是有界的。因而存在 $K\in\mathbb{R}$，使得

$$|f(x)|\leqslant K, \qquad \forall x\in[a,c].$$

设 $P$ 是 $[a,c]$ 的任意一个分割，$\xi$ 是相应于这分割的一组标志点

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c,$$

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m).$$

在此基础上，我们来定义分割 $\tilde{P}$ 和相应于这分割的标志点组 $\tilde{\xi}$。如果 $b$ 是 $P$ 中的一个分点，那么就取 $\tilde{P}=P$，$\tilde{\xi}=\xi$。如果 $b$ 不是 $P$ 中的分点，那么就把 $b$ 补充作为分点，这样定义一个分割

$$\tilde{P}: a=x_0<\cdots<x_{k-1}<b<x_k<\cdots<x_m=c,$$

并选取

$$\tilde{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_{k-1},b,b,\xi_{k+1},\cdots,\xi_m).$$

将 $\sigma(f,P,\xi)$ 与 $\sigma(f,\tilde{P},\tilde{\xi})$ 加以比较，不相同的部分至多是：$\sigma(f,P,\xi)$ 中的加项

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

被代之以 $\sigma(f,\tilde{P},\tilde{\xi})$ 中的

$$f(b)(b-x_{k-1})+f(b)(x_k-b)=f(b)(x_k-x_{k-1}).$$

因而

$$\begin{aligned}|\sigma(f,P,\xi)-\sigma(f,\tilde{P},\tilde{\xi})|\\ &\leqslant|f(\xi_k)-f(b)|(x_k-x_{k-1})\\ &\leqslant 2K|P|.\end{aligned}$$

分割 $\tilde{P}$ 限制在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上分别给出这两区间的分割 $\tilde{P}'$ 和 $\tilde{P}''$，而 $\tilde{\xi}$ 限制在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上分别给出相应的标志点组 $\tilde{\xi}'$ 和 $\tilde{\xi}''$。我们有

$$\sigma(f,\tilde{P},\tilde{\xi})=\sigma(f,\tilde{P}',\tilde{\xi}')+\sigma(f,\tilde{P}'',\tilde{\xi}'').$$

让 $|P|\to 0$，上式右端趋于极限

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

因而当 $|P|\to 0$ 时，积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 有极限

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,\tilde{P},\tilde{\xi})$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

这证明了定理的论断。 □

**注记** (1) 在下一篇中，我们将证明，如果函数 $f$ 在 $[a,c]$ 上可积，那么它在 $[a,c]$ 的闭子区间 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 上也都可积。这时当然可以运用可加性公式

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 我们约定

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} -\int_\beta^\alpha f(x)\mathrm{d}x, & \text{如果 } \beta<\alpha, \\ 0, & \text{如果 } \beta=\alpha. \end{cases}$$

于是，对于 $\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$ 与 $\alpha>\beta$ 这几种情形，积分

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

都有了定义。采取这样的约定，对于任意顺序的三点 $a,b,c$（不必限制 $a<b<c$），只要函数 $f$ 在这三点之间最大的一个区间上可积，就仍然有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

**定理3**（积分的单调性） 设 $a<b$，函数 $f$ 和 $g$ 在区间 $[a,b]$ 上可积并且满足

$$f(x)\leqslant g(x), \qquad \forall x\in[a,b],$$

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 记 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$，则有

$$\varphi(x)\geqslant 0, \qquad \forall x\in[a,b].$$

我们来证明

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

事实上，$\varphi$ 的任意积分和都是非负的

$$\sigma(\varphi,P,\xi)=\sum_i\varphi(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0,$$

所以

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0}\sigma(\varphi,P,\xi)\geqslant 0. \qquad \square$$

**定理4**（积分的中值定理） 设 $a<b$，函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积（于是 $f$ 在 $[a,b]$ 上是有界的）。如果

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \qquad \forall x\in[a,b],$$

那么

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

特别地，如果 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，那么存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a).$$

**证明** 利用积分的单调性质可得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x,$$

即

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

在下一篇里，我们将证明任何连续函数都是可积的。如果 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，那么对于

$$m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \qquad M=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

应有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

即

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

由于函数 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，必定存在 $c\in[a,b]$，使得

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)(b-a). \quad \square$$

**注记** 上面定理后一结论的几何解释如下：由连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b$, $y=0$ 所围成的图形的面积，等于以$[a,b]$为底，以 $f(c)$ 为高的矩形的面积。这里 $c$ 是$[a,b]$中一个适当的点(见图6-1)。

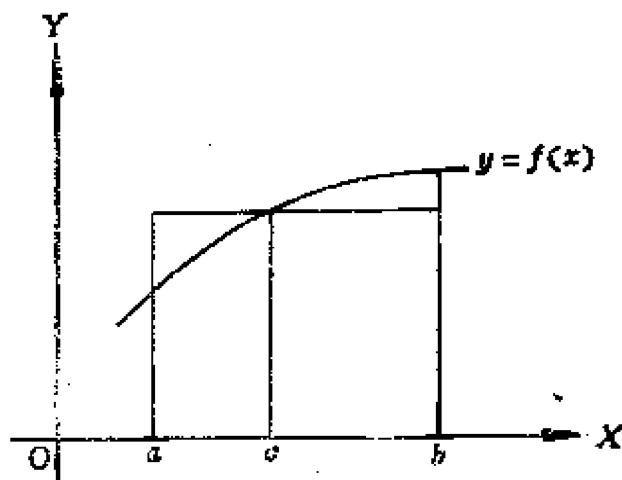



图 6-1

## §2 牛顿-莱布尼兹公式

虽然定积分定义为积分和的极限，但一般说来直接用定义来验证函数的可积性并计算积分值是很困难的事。关于函数可积性的一般条件，将在下一篇中讨论。本节介绍的牛顿-莱布尼兹公式，在原函数存在的前提条件下，成功地解决了判定可积性与计算积分值的问题。这一公式，无论在理论上，或者是在实际应用中，都具有重要的意义。

**定理1**（牛顿-莱布尼兹公式） 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续。如果存在函数 $F$，它在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，并且满足

$$F'(x)=f(x),\qquad \forall x\in(a,b),$$

那么函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

**证明** 考察 $[a,b]$ 的任意分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b.$$

根据拉格朗日微分中值定理，我们得到

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=\sum_{i=1}^{m}(F(x_i)-F(x_{i-1}))\\&=\sum_{i=1}^{m}F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{m}f(\eta_i)\Delta x_i\\&=\sigma(f,P,\eta).\end{aligned}$$

由于函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上的一致连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$u,v\in[a,b],\quad |u-v|<\delta,$$

就有

$$|f(u)-f(v)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是，当 $|P|<\delta$ 时，对于相应于这分割的任意标志点组 $\xi$，都有

$$\begin{aligned}&|\sigma(f,P,\xi)-(F(b)-F(a))|\\&\quad=|\sigma(f,P,\xi)-\sigma(f,P,\eta)|\\&\quad=\left|\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{m}f(\eta_i)\Delta x_i\right|\\&\quad\leqslant\sum_{i=1}^{m}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

这证明了函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 可积，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \quad \square$$

为了书写方便，我们引入记号

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

于是，牛顿-莱布尼兹公式可以写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

**例1** $\displaystyle\int_a^b e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$

**例2** $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_a^b$

$$= \ln b - \ln a \qquad (b > a > 0).$$

**例3** $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$

**例4** 求极限

$$\lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

**解** 我们可以把

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

看成是函数 $\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分和，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$$

$$= \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

**例5** 求极限

$$\lim\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$$

**解** 我们可以把

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n}$$

看成是函数$\frac{1}{1+x^2}$在区间$[0,1]$上的积分和，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

**例6** 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}.$$

**解** $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}.$$

在定理1的条件下，定积分的计算归结于求原函数——不定积分。为了求不定积分，又可利用换元积分法和分部积分法。我们把以上所说的手续概括成直接处理定积分的换元积分法和分部积分法，以便于以后应用。

**定义1** 如果函数$\varphi(t)$在开区间$(\alpha,\beta)$的每一点可导，并且导函数$\varphi'(t)$在$(\alpha,\beta)$连续，那么我们就说函数$\varphi$在开区间$(\alpha,\beta)$连续可微，或者说$\varphi$在$(\alpha,\beta)$上是$C^1$类函数。

**定义2** 如果函数$\varphi(t)$在闭区间$[\alpha,\beta]$的每一点可导（在左端点右侧可导，在右端点左侧可导），并且导函数$\varphi'(t)$在闭区间

$[\alpha,\beta]$连续，那么我们就说函数$\varphi$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续可微，或者说$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上是$C^1$类函数，并约定用这样的记号来表示：

$$\varphi\in C^1[\alpha,\beta].$$

注记　定义2的另一种等价说法是：设函数$\varphi$在闭区间$[\alpha,\beta]$上有定义。如果存在一个开区间$(A,B)\supset[\alpha,\beta]$和在这开区间上连续可微的函数$\Phi(t)$，使得

$$\Phi(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[\alpha,\beta],$$

那么我们就说函数$\varphi$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续可微，或者说$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上是$C^1$类函数。

**定理2**（定积分的换元法）　设函数$\varphi\in C^1[\alpha,\beta],\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b,\varphi((\alpha,\beta))\subset(a,b)$。如果函数$f$在$[a,b]$连续，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这公式还可写成更便于记忆的形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t).$$

**证明**　在下一篇中，我们将证明：任何连续函数都具有原函数。设$F(x)$是函数$f(x)$在区间$[a,b]$的一个原函数，则$F(\varphi(t))$就是函数$f(\varphi(t))\varphi'(t)$在区间$[\alpha,\beta]$的一个原函数。于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b$$

$$=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.\qquad\square$$

**定理3**（定积分的分部积分公式）　设函数$u,v\in C^1[a,b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

这公式还可写成容易记忆的形式

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

**证明** 在下一篇中，我们将证明所有的连续函数都有原函数。于是，以下的关于不定积分的分部积分公式成立

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

取上式两边在 $b$ 点的值和在 $a$ 点的值相减得

$$\left(\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \left(\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b.$$

即

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**例7** 求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

**解** 如果求出$\sqrt{1-x^2}$的原函数

$$\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2},$$

再利用牛顿-莱布尼兹公式,就可得到

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

如果用换元法计算这积分，则可令 $x=\sin t$，于是

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

例8　求 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$。

解　用分部积分法得

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi.$$

## §3　定积分的几何与物理应用，微元法

### 3.a　平面图形的面积

在预篇中，我们已经知道，介于直线 $x=a, x=b, y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 之间的图形的面积可以表示为定积分

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

我们把微分式 $f(x)dx$ 叫做*面积微元*，它代表底为 $dx$ 高为 $f(x)$ 的一个微小的矩形条的面积。积分 $\int_a^b f(x)dx$ 实际上是这样的小矩形条面积之和的极限值。

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且满足条件

$$f(x)\geqslant g(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

那么介于直线 $x=a, x=b$ 和曲线 $y=g(x), y=f(x)$ 之间的图形的面积可以表示为定积分

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

这里的*面积微元*为 $(f(x)-g(x))dx$。类似地，如果函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 在 $[A,B]$ 上可积，并且

$$\varphi(y)\geqslant\psi(y),\quad \forall y\in[A,B],$$

那么介于直线 $y=A, y=B$ 和曲线 $x=\varphi(y), x=\psi(y)$ 之间的图形的面积表示为

$$S=\int_A^B (\varphi(y)-\psi(y))\,dy.$$

这里的面积微元为$(\varphi(y)-\psi(y))\mathrm{d}y$。

更一般的图形常常可以划分成几部分，每一部分属于以上所述的情形之一。这时我们可以先分别求得各部分的面积，然后将结果相加以得到总面积。

**例1** 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的面积。

**解** 由对称性，所求面积为它在第一象限内的部分面积的4倍

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

作变元替换$x=a\sin t$，则得

$$S=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\pi ab.$$

**例2** 求抛物线$y^2=2x$与直线$x-y=4$所围图形的面积。

**解** 先求抛物线与直线的交点。由

$$\begin{cases}y^2=2x,\\ y=x-4\end{cases}$$

可知交点为$A(2,-2)$和$B(8,4)$（见图6-2）。把所围面积视为

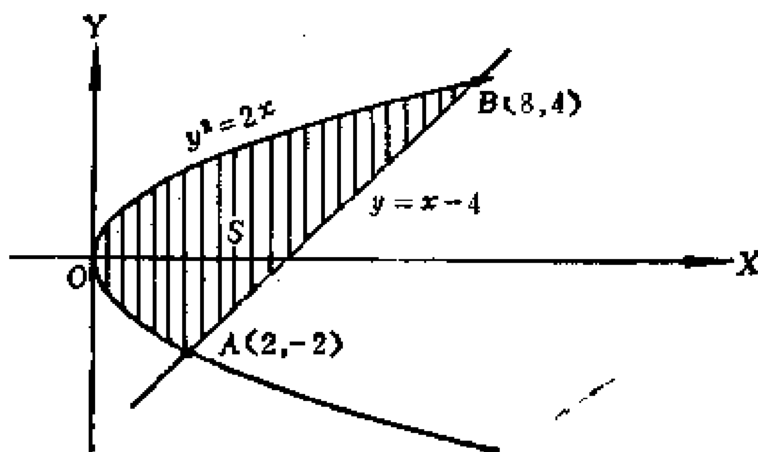



图 6-2

由 $x=y+4$ 与 $x=y^2/2$ 所围成，我们得到

$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=18.$$

现在来考察由极坐标表示的曲线围成的图形的面积。设给定了由极坐标方程表示的曲线

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

我们来求这曲线与射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 所围成的图形的面积。先来看最简单的情形：$r(\theta)=R$ 是常值函数，即这曲线是一段圆弧。这时显然有

$$S=\frac{1}{2}R^2(\beta-\alpha).$$

再来看一般的情形。对角度 $\theta$ 的变化范围 $[\alpha,\beta]$ 作一分割

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta,$$

并取

$$\omega_i\in[\theta_{i-1},\theta_i],\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是，夹在射线 $\theta=\theta_{i-1},\theta=\theta_i$ 和曲线 $r=r(\theta)$ 间的图形的面积可近似地表示为

$$\frac{1}{2}r^2(\omega_i)\Delta\theta_i$$

这里

$$\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}.$$

整个图形的面积近似地表示为

$$S\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r^2(\omega_i)\Delta\theta_i.$$

让 $\max\limits_i\Delta\theta_i\to0$，我们得到

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

我们把微分式 $\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$ 叫做用极坐标表示的*面积微元*。它表示夹角为 $\mathrm{d}\theta$，半径为 $r(\theta)$ 的一个微小扇形的面积。积分 $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$ 可以看成是这样的微小扇形面积之和的极限(图6-3)。

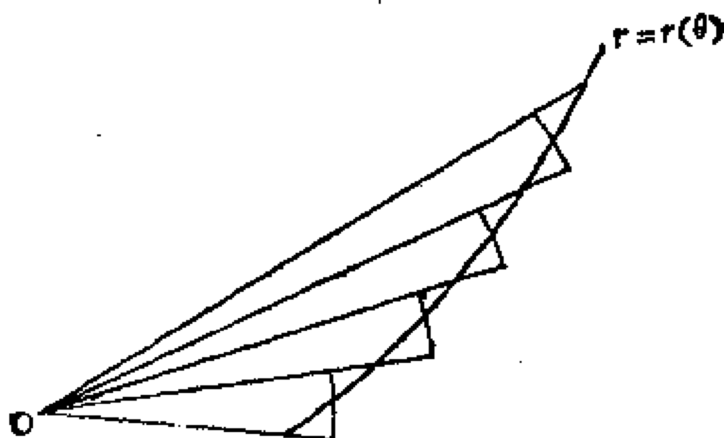



图 6-3

**例3** 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围成的图形的面积($a>0$)。

**解** 先要弄清楚这曲线的大致情形（分布范围，对称性，是否封闭等）。把曲线方程写成

$$r=a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

在$[-\pi,\pi]$范围内，当且仅当$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$或者$|\theta|\geqslant\frac{3}{4}\pi$时$\cos 2\theta\geqslant 0$。对这样的$\theta$有

$$0\leqslant r=a\sqrt{\cos 2\theta}\leqslant a.$$

我们判定曲线分布在对顶的两扇形之中：

$$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant a;\quad |\theta|\geqslant\frac{3\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant a.$$

如果点$(r,\theta)$在曲线上，那么点$(r,-\theta)$和点$(r,\pm\pi\pm\theta)$也都在曲线上。因而曲线关于极轴和垂直于极轴的直线为对称，关于极点

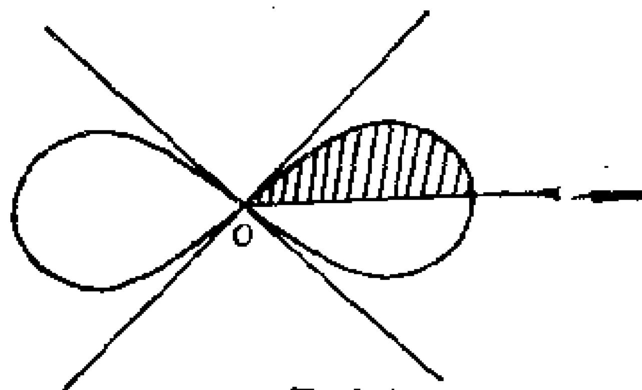



图 6-4

中心对称。显然 $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\pm\frac{3}{4}\pi$ 时曲线通过极点．这曲线由两支封闭的曲线组成（图6-4）。经过以上的分析，我们判定：所求图形的面积为它在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ 范围内的部分面积的4倍。

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}r^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2.$$

**例4** 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围成的图形的面积。

**解** 容易看出，这曲线关于极轴为对称并且是封闭的。所求的面积为它在上半平面内的部分的2倍（见图6-5）：

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

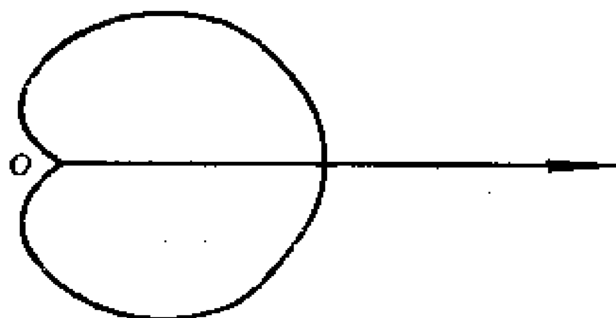



图 6-5

### 3.b 旋转体的体积

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义并且非负．曲线 $y=f(x)$ 绕 $OX$ 轴旋转而成一曲面

$$y^2+z^2=(f(x))^2,\quad x\in[a,b].$$

我们来考察这曲面与平面 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的体积．首先，用若干张平面 $x=x_i$ 把这旋转体切成薄片，这里

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

任意选取

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\quad i=1,\cdots,n.$$

旋转体介于 $x=x_{i-1}$ 和 $x=x_i$ 之间的薄片的体积近似等于

$$\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

这里

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

于是，整个旋转体的体积表示为积分

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们把微分表示式 $\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 称为旋转体的*体积微元*。它表示厚度为 $\mathrm{d}x$，半径为 $f(x)$ 的一个薄圆柱形的体积。整个旋转体的体积即为这些薄片体积之和的极限。

推广上述方法可以求得一类更广泛的立体的体积。设已知立体在 $x\in[a,b]$ 处被垂直于 $OX$ 轴的平面所截得的截面积为 $S(x)$，我们来求这立体介于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的体积。这种情形下的*体积微元*可取为

$$S(x)\,\mathrm{d}x,$$

将这种形式的微元迭加起来求极限就得到所求的体积

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

**例5** 设正劈锥体的底是半径为 $R$ 的圆面，顶棱是平行于底圆直径的线段，高为 $H$，试求这正劈锥体的体积(图6-6)。

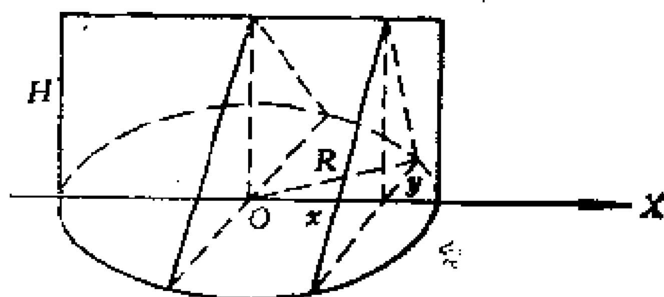



图 6-6

**解** 设这正劈锥体的底为

$$x^2+y^2\leqslant R^2, \quad z=0,$$

顶棱为

$$-R\leqslant x\leqslant R, \quad y=0, \quad z=H.$$

过 $OX$ 轴上一点 $x$ 并垂直于该轴的平面截正劈锥体得一等腰三角形，这等腰三角形的面积为

$$S(x)=H\cdot y=H\sqrt{R^2-x^2}.$$

于是，我们求得正劈锥体的体积

$$\begin{aligned}V&=\int_{-R}^{R}H\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2H\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2HR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,\mathrm{d}t\\&=HR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi R^2H}{2}.\end{aligned}$$

### 3.c 曲线的弧长

考察 $OXY$ 平面上的参数曲线 $\gamma$：

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

这里 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 $C^1$ 类函数。为了求曲线 $\gamma$ 的弧长，我们用一组分点把 $[\alpha,\beta]$ 分成若干小段

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta.$$

相应地，曲线 $\gamma$ 也就被分成若干段曲线弧。把每一小段曲线弧的两端用一直线段联结起来，得到 $\gamma$ 的一条内接折线，其长度为

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}.$$

根据拉格朗日定理，这内接折线的长度又可以表示为

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i'))^2}\,\Delta t_i,$$

这里 $\tau_i,\tau'_i\in(t_{i-1},t_i)$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$。我们看到，折线长的这一表示，很象以下的积分和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(\tau_i))^2+(y'(\tau_i))^2}\Delta t_i.$$

在下面，我们将证明，当 $\lambda=\max_i\Delta t_i\to 0$ 的时候应有

$$|\rho-\sigma|\to 0,$$

因而

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

这极限就应该是曲线的弧长 $s$，即

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

现在，我们来证明

$$\lim_{\lambda\to 0}|\rho-\sigma|=0.$$

为此，将要用到以下不等式

$$(3.1)\qquad \left|\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{A^2+C^2}\right|\leqslant|B-C|,$$

$$\forall A,B,C\in\mathbf{R}.$$

事实上，对于 $A=0$，不等式显然成立；如果 $A\neq 0$，那么

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{A^2+C^2}\right|\\&=\left|\frac{B^2-C^2}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{A^2+C^2}}\right|\\&=\left|\frac{B+C}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{A^2+C^2}}\right||B-C|\\&\leqslant\frac{|B|+|C|}{\sqrt{A^2+B^2}+\sqrt{A^2+C^2}}|B-C|\\&\leqslant|B-C|.\end{aligned}$$

对 $A=x'(\tau_i),B=y'(\tau_i),C=y'(\tau'_i)$ 运用不等式(3.1)，我们得到

$$\left|\rho-\sigma\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|y'(\tau_i)-y'(\tau'_i)\right|\Delta t_i.$$

由于 $y'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$的一致连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\lambda<\delta$ 时有

$$|y'(\tau_i)-y'(\tau'_i)|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

这时就有

$$|\rho-\sigma|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\varepsilon.$$

至此，我们证明了

$$\lim_{\lambda\to 0}\rho=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $C^1$ 类参数曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

我们有弧长公式

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

这里的表示式$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ 被称为参数表示曲线的弧元(即弧长的微元)。

对于显式表示的 $C^1$ 曲线

$$y=y(x),\quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta,$$

相应的弧长公式为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

我们把$\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 叫做显式表示曲线的弧元。

极坐标表示的 $C^1$ 曲线

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

可以改写为参数形式

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

于是我们得到极坐标表示曲线的弧长公式

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta.$$

极坐标表示曲线的弧元为$\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta$。

空间参数曲线的弧长公式，可以用类似的办法推导．这里只陈述结果。设

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

是$C^1$类参数曲线，则它的弧长可以表示为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

空间参数曲线的弧元为

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

### 3.d 旋转曲面的面积

考察位于$OXY$坐标系上半平面内的一条无自交点的$C^1$参数曲线$AB$：

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(\geqslant 0),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

以这曲线为母线，绕$OX$轴旋转一周，生成了一个旋转曲面．我们来求这曲面的面积。

为此，作参数区间$[\alpha,\beta]$的一个分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta.$$

曲线上相应于这些参数值的点

$$A=T_0,T_1,\cdots,T_n=B$$

把曲线分成$n$段

$$T_0T_1,T_1T_2,\cdots,T_{n-1}T_n.$$

其中第$i$段$T_{i-1}T_i$的弧长近似地表示为

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}\\&=\sqrt{(x'(\tau_i'))^2+(y'(\tau_i''))^2}\,\Delta t_i\\&(\tau_i',\tau_i''\in[t_{i-1},t_i]).\end{aligned}$$

由这段曲线弧旋转而成的曲面面积可以近似地表示为

$$\Delta S_i = 2\pi y(\tau_i)\sqrt{(x'(\tau'_i))^2+(y'(\tau''_i))^2}\Delta t_i.$$

于是，旋转曲面的总面积表示为

$$S=\lim_{\lambda\to 0} 2\pi y(\tau_i)\sqrt{(x'(\tau'_i))^2+(y'(\tau''_i))^2}\Delta t_i,$$

这里 $\lambda$ 表示 $\max\limits_i \Delta t_i$.

与 3.c 段中计算弧长时所作的讨论类似，利用适当的不等式（参看本段末的注记），可以证明上面表示式中的极限即为

$$2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

这样，我们得到了旋转曲面的面积的计算公式

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

旋转曲面的面积元为

$$\mathrm{d}S=2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

对于旋转曲面的母线是以显式方程或者极坐标方程给出的情形，请读者自己写出相应的面积元的表示式。

**注记** 为了完成上面的讨论，要用到这样一个不等式

$$\left|\sqrt{A_1^2+B_1^2}-\sqrt{A_2^2+B_2^2}\right|\leqslant|A_1-A_2|+|B_1-B_2|,$$
$$(\forall A_1,B_1,A_2,B_2\in\mathbb{R}.)$$

事实上，如果 $A_1=B_1=A_2=B_2=0$，那么上式显然以等式的形式成立。如果 $A_1,B_1,A_2,B_2$ 不全为 0，那么

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{A_1^2+B_1^2}-\sqrt{A_2^2+B_2^2}\right|\\&=\left|\frac{(A_1^2+B_1^2)-(A_2^2+B_2^2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|\\&\leqslant\frac{|A_1|+|A_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2}}|A_1-A_2|\\&\quad+\frac{|B_1|+|B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}+\sqrt{A_2^2+B_2^2}}|B_1-B_2|\end{aligned}$$

$$\leqslant |A_1 - A_2| + |B_1 - B_2|.$$

### 3.e 功与侧压力的计算

设物体受到一个沿 $OX$ 轴作用的力 $F = f(x)$，在这力的作用下它从 $a$ 点运动到 $b$ 点。我们已经知道：力 $F$ 对物体所做的功可以表示为

$$W = \int_a^b f(x)\,dx.$$

我们把 $f(x)\,dx$ 称为功的微元。

**例6** 试求把弹簧拉长 $a$ 个长度单位所需做的功。

**解** 根据虎克定律，拉长弹簧所用的力与拉长的长度成正比：

$$F = kx,$$

其中 $k$ 为常数。把弹簧拉长 $a$ 个长度单位所需做的功为

$$W = \int_0^a kx\,dx = \frac{1}{2}ka^2.$$

设一块平板竖放在比重为 $\rho$ 的液体里。我们来计算这块平板所承受的液体压力。选择位于液体表面的某点为原点 $O$，选择沿竖直线向下的方向为 $OY$ 轴正方向。设在深度为 $y$ 的地方平板的宽度为 $f(y)$。我们用水平线把平板分成很多窄条。考察从深度 $y$ 到深度 $y+\Delta y$ 的一窄条。这窄条所受到的液体压力为

$$\Delta P = \rho y f(y)\Delta y.$$

于是，整个平板所承受的压力表示为积分

$$P = \rho\int_A^B y f(y)\,dy.$$

这里 $A$ 和 $B$ 分别是平板浸入液体的最小深度和最大深度。我们把

$$dP = \rho y f(y)\,dy$$

称为是侧压力的微元。

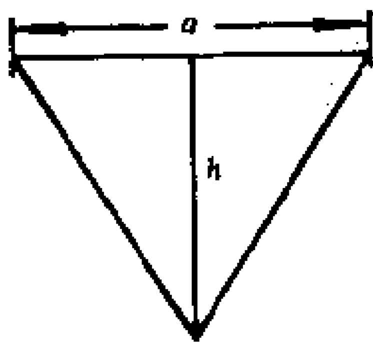



图 6-7

**例7** 设水渠闸门的形状是一个底为 $a$ 高为 $h$ 的倒置的等腰三角形(图6-7).求这闸门所承受的最大压力.

**解** 对于适当的单位制，水的比重 $\rho=1$。在深度为 $y$ 的地方，闸门的宽度为

$$f(y)=\frac{h-y}{h}a.$$

闸门承受的最大压力为

$$P=\int_0^h y\frac{h-y}{h}a\mathrm{d}y=\frac{ah^2}{6}.$$

### 3.f 微元法

本段对定积分应用的一般步骤作一小结。为了计算某一量值 $Q$，我们把它分成若干微小份额：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i.$$

一般说来，每一微小份额也仍然不容易计算，我们并没能前进多少。真正关键的步骤是分离出微小份额 $\Delta Q$的线性主部，即将$\Delta Q$表示为

$$\Delta Q_i=q(x_i)\Delta x_i+o(\Delta x_i),$$

然后舍弃高阶无穷小而把各线性主部迭加起来作为 $Q$ 的近似值

$$Q\approx\sum_i q(x_i)\Delta x_i.$$

所舍弃的部分是一些高阶无穷小之和

$$\sum_i o(\Delta x_i).$$

一般说来这仍然是一个无穷小量。我们让 $\lambda=\max\limits_i\Delta x_i\to0$取极限，就能将 $Q$ 表示为

$$Q=\lim_{\lambda\to0}\sum_i q(x_i)\Delta x_i=\int_a^b q(x)\mathrm{d}x.$$

上面的过程，概括说来由四个步骤组成：分割，代替(即用线性主部来代替)，求和，求极限．如上所述，应用这些手续的关键在于找出 $\Delta Q$ 的线性主部，即找出量 $Q$ 的微元

$$dQ=q(x)dx.$$

然后，我们就可以把 $Q$ 表示为积分

$$Q=\int_a^b q(x)dx.$$

在物理应用中，人们甚至直接说把微元 $dQ=q(x)dx$ "迭加"起来就得到

$$Q=\int_a^b q(x)dx.$$

这种说法非常方便，我们把它理解为分割、代替、求和、求极限的全过程好了。

上面所说的过程，如果用严格的数学语言来讨论，常常是这样的：设 $q(x)$ 是一个连续函数，它在闭区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最小值和最大值分别为 $m_i$ 和 $M_i$，并设 $\eta_i,\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得 $q(\eta_i)=m_i$，$q(\zeta_i)=M_i$．如果

$$m_i\Delta x_i\leqslant\Delta Q_i\leqslant M_i\Delta x_i,$$

那么

$$\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\leqslant Q\leqslant\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i.$$

因为 $\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n q(\eta_i)\Delta x_i$ 和 $\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n q(\zeta_i)\Delta x_i$ 都是 $q(x)$ 的积分和，所以当 $\lambda=\max_i\Delta x_i\to0$ 时，它们趋于共同的极限

$$\int_a^b q(x)dx.$$

这样，我们求得

$$Q=\int_a^b q(x)dx.$$

例如，为了计算由极坐标表示的曲线 $r=r(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围图形的面积 $S$，我们作 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta,$$

相应地用射线$\theta=\theta_i(i=1,2,\cdots,n-1)$把图形分成$n$个部分，设其中第$i$个部分的面积为$\Delta S_i$。如果$r(\theta)$在$[\theta_{i-1},\theta_i]$上的最小值和最大值分别为$m_i$和$M_i$，那么

$$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i\leqslant\Delta S_i\leqslant\frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i.$$

于是得到

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i^2\Delta\theta_i\leqslant S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}M_i^2\Delta Q_i.$$

让$\lambda=\max\limits_{i}\Delta\theta_i\to0$取极限，我们求得

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

# 第七章　微分方程初步

## §1　概　　说

许多自然规律的陈述，涉及到量的变化率应满足的制约关系.这种关系的数学表示就应该是含有导数的方程——微分方程.

**例1**　放射性物质衰变的规律是：在每一时刻 $t$，衰变的速率 $-\mathrm{d}\,m(t)/\mathrm{d}t$ 正比于该放射性物质尚存的质量 $m(t)$。因此，质量 $m=m(t)$ 应满足以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km.$$

**例2**　设质量为 $m$ 的物体自由下落，它在时刻 $t$ 的坐标是 $y(t)$（取坐标轴沿竖直方向指向地心）。根据牛顿第二定律，$y=y(t)$ 应满足以下微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g.$$

**例3**　设质量为 $m$ 的跳伞员下落时，所受到的空气阻力正比于下降的速度（阻力的方向与速度的方向相反）。取坐标轴沿竖直方向指向地心，则这跳伞员在时刻 $t$ 的坐标 $y=y(t)$ 应满足以下微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g.$$

**例4**　设开有光滑孔的钢球穿在一水平光滑杆上，它受到一个弹性恢复力的作用而来回振动，其中心位置是 $O$（见图7-1）。于是，钢球在时刻 $t$ 的坐标 $x=x(t)$ 应满足微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$




图 7-1

如果这钢球还受到一个与速度成正比(方向与速度相反)的阻尼力的作用，那么它所满足的微分方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{dx}{dt} - kx,$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

微分方程的阶数就是它所含未知函数的导数的最高阶数. 上面例1中的方程是一阶方程，例2、例3和例4中的方程都是二阶方程.

最简单的一阶微分方程是

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

其中 $t$ 是自变数，$f(t)$是已知函数，$x = x(t)$是未知函数. 求解这样的方程，等价于求函数$f(t)$的原函数. 我们看到，上述方程的一般解应该是

$$x = \int f(t)dt + C.$$

请注意，在解微分方程的时候，习惯于用不定积分符号表示某一确定的原函数，所以在其后还应加上任意常数$C$.

再来看最简单的 $n$ 阶方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f(t).$$

它等价于说 $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ 是 $f(t)$ 的原函数，即

$$\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=\int f(t)\,dt+C_1.$$

这与原方程形式类似，但阶数降低了．逐次这样做下去，最后就得到方程的一般解：

$$x=\underbrace{\int\cdots\int}_{n\text{个}} f(t)\,dt\cdots dt+C_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+C_{n-1}t+C_n,$$

这里 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数．让我们来考察自由落体运动方程的例子：

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g.$$

将其积分一次得

$$\frac{dy}{dt}=gt+C_1.$$

再积分一次就得到原方程的一般解

$$y=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 $C_1$ 和 $C_2$ 都是任意常数．这一般解反映了一切自由落体运动的规律．对于一个具体的自由落体运动，这里的常数 $C_1$ 和 $C_2$ 都取确定的值并且具有明确的物理意义．$C_1=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}$ 恰好就是 $t=0$ 时的速度 $v_0$（初始速度），而 $C_2=y|_{t=0}$ 恰好就是 $t=0$ 时的纵坐标 $y_0$（初始位置）。我们得到了众所周知的自由落体运动公式

$$v=gt+v_0,$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0.$$

最后，对本节的讨论作一小结。含有未知函数的导数的方程

称为微分方程。如果一个函数用以代替微分方程中的未知函数能使该方程成为恒等式，那么我们就说这函数是微分方程的一个解。微分方程的解的一般表示式称为该方程的一般解或者通解。一个 $n$ 阶方程的通解含有 $n$ 个任意常数。满足一定具体条件的一个确定的解称为特解。

我们已经了解到，最简单的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t)\quad\left(\text{或}\frac{d^2x}{dt^2}=f(t)\right)$$

可以通过不定积分来求解。但决不是任何微分方程的解都能用不定积分来表示。这与代数方程的情形有些类似。虽然某些代数方程可以用根式求解，但决不是任何代数方程的解都可以用根式来表示。不能用根式求解并不意味着代数方程无解。代数基本定理告诉我们：任何 $n$ 次代数方程在复数范围内都有 $n$ 个根(重根重复计数)。以后将要证明的微分方程解的存在定理指出：在相当普遍的条件下，微分方程的解一定存在。能用不定积分求解的微分方程叫做可积分的微分方程。对于可积分的微分方程，当我们通过不定积分把解表示出来之后，就认为求解的任务已经完成，剩下的事就是计算所涉及的不定积分。并非任何不定积分都能用初等函数表示出来。但在下一篇中将从理论上证明：任何连续函数都具有原函数。因而用不定积分表示的函数确实是存在的。

## §2 一阶线性微分方程

首先考察这样的微分方程：

$$\frac{dx}{dt}+ax=0,\tag{2.1}$$

这里 $a$ 是一个常数，$t$ 是自变数，$x$ 是未知函数。以 $e^{at}$ 乘(2.1)式两边得

$$e^{at}\frac{dx}{dt}+ae^{at}x=0,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}x)=0,$$

$$e^{at}x=C.$$

我们得到方程(2.1)的一般解

$$x=Ce^{-at},$$

这里$C$是任意常数。

再来考察较一般的方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=b(t), \tag{2.2}$$

这里$a$是常数，$b(t)$是连续函数。也用$e^{at}$乘这方程式两边，则得

$$\frac{d}{dt}(e^{at}x)=e^{at}b(t),$$

$$e^{at}x=\int e^{at}b(t)dt+C.$$

方程(2.2)的一般解为

$$x=e^{-at}\left(\int e^{at}b(t)dt+C\right),$$

这里$C$是任意常数。取定$C$的任何一个数值(例如令$C=0$)就得到方程(2.2)的一个确定的特解。我们看到："非齐次"线性方程(2.2)的一般解可以表示为两项之和，第一项是这方程的一个特解，第二项$Ce^{-at}$正好是相应的"齐次"线性方程(2.1)的一般解。

在上面的方程(2.1)和(2.2)中，未知函数及其导数的系数都是常数。那样的方程称为*常系数方程*。我们已经得到了一阶线性常系数方程的一般解。下一步的问题自然是考察更一般的方程

$$\frac{dx}{dt}+a(t)x=b(t),$$

其中$a(t)$和$b(t)$都是连续函数。这样的方程就是一般的一阶线性微分方程。以函数

$$e^{\int a(t)dt}$$

乘上述方程两边得

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int a(t)dt}x\right)=e^{\int a(t)dt}\cdot b(t),$$

于是

$$e^{\int a(t)dt}x=\int e^{\int a(t)dt}b(t)dt+C,$$

由此又可得到

$$x=e^{-\int a(t)dt}\left(\int e^{\int a(t)dt}b(t)dt+C\right).$$

这就是一阶线性微分方程的一般解，其中$C$是任意常数。具体解题时不必死背公式，只须记住关键的技巧：以函数

$$e^{\int a(t)dt}$$

乘方程两边就可以把它化成能直接积分的形式。

下面举例说明一阶线性微分方程的应用。

**例1** 设跳伞员受到与速度大小成正比的空气阻力，我们来考察他的下降速度$v$的变化规律。根据牛顿第二定律，我们得到运动方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv,$$

即

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g.$$

解这方程得

$$e^{\frac{k}{m}t}\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}e^{\frac{k}{m}t}v=ge^{\frac{k}{m}t},$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v)=ge^{\frac{k}{m}t},$$

$$e^{\frac{k}{m}t}v=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C,$$

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

如果在时刻 $t=0$ 跳伞员的初始速度为 0，那么就应有

$$0=\frac{mg}{k}+C,$$

$$C=-\frac{mg}{k}.$$

跳伞员的下降速度的变化规律为

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

我们看到，与自由落体的运动不同，跳伞员的速度不会无限增大，而是逐渐趋于一个终极速度 $mg/k$.

自然界有一些量，它的减少速度正比于该量本身的数值. 这样的量 $x$ 应满足以下的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=-kx,$$

即

$$\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

解这微分方程得到

$$x=Ce^{-kt}.$$

设 $t=0$ 时 $x$ 的值为 $x_0$，则有 $C=x_0$. 量 $x$ 的变化规律为

$$x=x_0e^{-kt}.$$

例2 设一个初始温度为 $\theta_0$ 的物体放到恒温 $\gamma$ 的介质之中，我们来考察这物体的温度 $\theta$ 的变化规律. 根据牛顿冷却定律，物体的冷却速度跟它与周围介质的温度差成正比. 我们有微分方程

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \gamma).$$

先设介质温度 $\gamma = 0$(例如把物体放到冰水混合物中冷却)，这时的微分方程为

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta.$$

物体冷却的规律为

$$\theta = \theta_0 e^{-kt}.$$

对一般情形，只要记 $\tilde{\theta} = \theta - \gamma$，也得到

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -k\tilde{\theta}.$$

因而一般情形下的冷却规律为

$$\theta = \gamma + (\theta_0 - \gamma)e^{-kt}.$$

我们看到，物体的终极温度就是介质的温度 $\gamma$：

$$\lim_{t\to+\infty} \theta = \gamma.$$

**例3** 放射性物质衰变的速度 $-\frac{dm}{dt}$ 正比于该物质的质量 $m$，即

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

解这方程得到

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

放射性元素衰减到初始质量的一半所花费的时间 $T$ 称为该元素的半衰期。根据定义，半衰期 $T$ 应满足

$$m_0/2 = m_0 e^{-kT},$$

即

$$kT = \ln 2.$$

人们已经测知了许多种放射性元素的半衰期。知道了半衰期 $T$ 之后，从等式

$$k=\frac{1}{T}\ln 2$$

就可求得该元素的衰变系数 $k$。

上述讨论虽然简单，却有很重要的应用。在地质学、古生物学和考古学中，人们可以据此测算地球的年龄、地层或化石的年代等。一种利用放射性碳测定古生物化石的年代的方法取得了巨大的成功。宇宙射线里的中子冲击高层大气中的氮原子产生了一种具有放射性的碳的同位素，其半衰期已测定为5600年。这放射性碳经氧化成为二氧化碳，与气流中的无放射性的二氧化碳混在一起。因为放射性碳不断产生又不断衰变成为氮，它在大气中早已达到动态平衡。所以大气中的放射性碳与普通碳有确定的比。地球上的植物按同样的比例把碳吸收到自己的组织中。食草动物和食肉动物又相继通过食物链按同样的比例把碳吸收到自己体内。当生物活着的时候，这比例基本上保持不变。生物死了以后，当然就不再吸入新的放射性碳。体内存的放射性碳在漫长的岁月里不断衰变而减少。因此，如果一段树木化石的放射性为活树的一半，那么这树大约生存于5600年以前。如果其放射性为活树的1/4，那么它大约生存于11200年以前。发现放射性碳并研究出利用其放射性测定古生物化石年代的办法是李倍(W.Libby)的功劳。他由于这一项杰出的工作而获得了1960年的诺贝尔化学奖金。

**例4** 本世纪三十年代，科学家发现铀 235($U^{235}$)的原子核受到中子的轰击会裂变成质量相近的两块，并释放出相当多的能量，而且在裂变的过程中又产生 1 到 3 个中子。如果裂变时产生的中子又轰击别的 $U^{235}$ 原子核，那么又能产生新的裂变。这种过程不断进行下去就形成所谓*连锁反应*或*链式反应*。铀原料中总会有一些由于天然分裂产生的中子，最初的引火物总是有的。问题是铀原料里的中子有可能逸出铀原料范围之外，必须有足够多的铀原料才能保证足够多的中子在逸出之前能碰到别的 $U^{235}$原子核。在这样的条件下，连锁反应才能进行。我们来推算这临界体

积或临界质量。用 $N(t)$ 表示在时刻 $t$ 铀原料里的中子总数，中子的发生率应该与该时刻中子的总数 $N(t)$ 成正比，而中子的逸出率应该与铀原料的表面积 $S$ 成正比，也与铀原料里中子的密度 $N(t)/V$ 成正比，因而中子数的变化率应该满足方程

$$\frac{dN}{dt}=\alpha N-\beta S\frac{N}{V},$$

其中的 $\alpha$ 和 $\beta$ 是比例常数。(这里须指出：中子数本是"离散型"的量，但我们可以用一个满足上面微分方程的"连续型"的量 $N(t)$ 来模拟中子数的变化。——考察其他一些含有大量个体的群体的数量变化时，人们也常采用类似的办法。例如，对人口增长或动植物的繁衍的研究，也能利用微分方程作为工具。)

如果铀原料呈球形，那么 $S/V=3/r$，于是中子数 $N=N(t)$ 满足方程

$$\frac{dN}{dt}=\left(\alpha-\frac{3\beta}{r}\right)N.$$

这方程的解为

$$N=Ce^{\left(\alpha-\frac{3\beta}{r}\right)t}.$$

由这公式可知，当 $\alpha-3\beta/r>0$ 时，中子数目依指数律迅速增大，连锁反应很快进行而释放出巨大的能量。这就是原子弹爆炸时的情形。使得 $\alpha-3\beta/r=0$ 成立的 $r=r_c$ 被称为临界半径(我们看到 $r_c=3\beta/\alpha$)，以 $r_c$ 为半径的球体的体积 $V_c=(4/3)\pi r_c^3$ 被称为临界体积，相应的铀原料的质量被称为临界质量。(铀235的临界半径约为8.5厘米，临界质量将近50千克。)

铀原料的半径超过临界值时才会发生核爆炸。如果 $\alpha-3\beta/r<0$，那么中子数目趋于0，核裂变就逐渐熄灭。在原子能发电站的反应堆中，人们把铀原料分隔为若干部分，每一部分铀原料都控制在临界体积以下，同时通过人为的中子源不断补充中子，使得核裂变可以持续进行，而又不致于引起爆炸。设中子源以常速率 $n$ 补充中子，则总中子数 $N=N(t)$ 应满足方程

$$\frac{dN}{dt}=\left(\alpha-\frac{3\beta}{r}\right)N+n.$$

这方程的解为

$$N=-\frac{n}{\alpha-\frac{3\beta}{r}}+Ce^{\left(\alpha-\frac{3\beta}{r}\right)t}.$$

因为$\alpha-3\beta/r<0$，当$t$不断增大时上式右边第二项趋于0，所以总中子数渐近于一个稳定的数值

$$\frac{n}{\frac{3\beta}{r}-\alpha}.$$

这样，在人为控制的条件下，核裂变持续进行并释放出巨大的能量，但又不致于引起爆炸。

在许多应用问题中，有关各量的微元之间的关系比较容易看出。这类问题适合于用微元法来布列微分方程.请看下面的例子.

例5（气压公式）我们来考察大气压强随海拔高度的变化。首先，依据物理学中的波义耳-马略特定律，在温度不变的条件下，一定质量气体的体积与压强成反比：

$$pV=c(\text{常数}).$$

由此得知，气体的比重$\rho$应与压强$p$成正比

$$\rho=kp.$$

其次，我们来考察高度$h$到高度$h+\Delta h$之间的一个薄柱体（设柱体的底面积为$\sigma$）。这柱体中气体的重量应该为柱体下底与上底所受大气压力之差所平衡，因而有

$$p(h)\sigma-p(h+\Delta h)\sigma=\rho\sigma\Delta h,$$

也就是

$$\Delta p=-\rho\Delta h.$$

这式两边除以$\Delta h$并且过渡到极限就得到

$$\frac{dp}{dh}=-\rho.$$

再利用比重$\rho$与压强$p$成正比的事实，我们得到微分方程

$$\frac{dp}{dh} = -kp.$$

解这方程得

$$p = Ce^{-kh}.$$

这里的常数$C$有明确的物理意义——它是海平面高度上的大气压强：

$$C = p\,|_{h=0}.$$

我们把$C$记为$p_0$，于是气压公式可以写成

$$p = p_0 e^{-kh}.$$

由这公式得到

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}.$$

这就是说，我们可以利用气压计来测高度。根据这原理，人们制造了轻巧便利的简易高度计。当然，影响气压的条件很多，除了海拔高度外，还有温度、湿度等气象因素。因而利用气压计来测高度，只能得到比较粗略的结果。

## §3 变量分离型微分方程

本节介绍一类可以通过不定积分求解的微分方程——变量分离型方程。先来看一个熟悉的例子。

**例1** 考察一阶线性方程

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x.$$

我们把这方程改写成

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt.$$

如果$x = x(t)$是方程的解，那么它能使上式成为恒等式，两边求不定积分得

$$\int\frac{dx}{x} = \int a(t)dt + C'.$$

由此得到

$$\ln|x| = \int a(t)dt + C',$$

$$x = \pm e^{C'} \cdot e^{\int a(t)\mathrm{d}t},$$

或者写成

$$x = Ce^{\int a(t)\mathrm{d}t}.$$

因为$C'$是任意常数，所以$C = \pm e^{C'}$可以是任意非0常数。又因为$x \equiv 0$显然满足原来的方程，所以上式中的$C$还可以取0值。我们重新得到熟悉的结论：方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x$$

的一般解为

$$x = Ce^{\int a(t)\mathrm{d}t},$$

这里$C$是任意常数。

推广上面例子中的方法，可以求解一般的变量分离型方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x). \tag{3.1}$$

事实上，如果$g(x) \neq 0$，那么方程(3.1)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\mathrm{d}t,$$

再对两边求不定积分就可得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t + C.$$

这式以隐函数形式给出方程(3.1)的解.另外,如果有$x_0$能使$g(x_0) = 0$，那么常值函数$x \equiv x_0$也是原方程的解。

**例2** 溶液里原有甲种物质$A$克和乙种物质$B$克。这两种物质按定比$\alpha:\beta$化合生成丙种物质($\alpha + \beta = 1$)。设到时刻$t$为止总共生成丙种物质$x(t)$克（耗用甲种物质$\alpha x(t)$克和乙种物质$\beta x(t)$克）。因为化合反应的速度与溶液里甲乙两种物质的离子相互碰撞的可能性成正比，也就与这两种物质尚存的质量的乘积成正比，所以函数$x = x(t)$应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(A - \alpha x)(B - \beta x).$$

下面，我们分两种情形讨论这方程的解。

*情形*1　$A/\alpha \neq B/\beta$。这时方程可按以下步骤求解。首先，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{(A-\alpha x)(B-\beta x)} = k\mathrm{d}t.$$

其次，对上式左边作部分分式分解得

$$\frac{1}{A\beta - B\alpha}\left(\frac{\beta}{B-\beta x} - \frac{\alpha}{A-\alpha x}\right)\mathrm{d}x = k\mathrm{d}t,$$

即

$$\left(\frac{\beta}{B-\beta x} - \frac{\alpha}{A-\alpha x}\right)\mathrm{d}x = k(A\beta - B\alpha)\mathrm{d}t.$$

由此得到

$$\frac{A-\alpha x}{B-\beta x} = Ce^{k(A\beta - B\alpha)t}.$$

设$t=0$时$x=0$，则可确定$C=A/B$。于是

$$\frac{A-\alpha x}{B-\beta x} = \frac{A}{B}\cdot e^{k(A\beta - B\alpha)t}.$$

为简便起见，我们引入记号

$$u = \frac{A}{B}\cdot e^{k(A\beta - B\alpha)t}.$$

于是

$$\frac{A-\alpha x}{B-\beta x} = u, \qquad x = \frac{Bu-A}{\beta u - \alpha}.$$

如果$A/\alpha < B/\beta$，那么$\lim\limits_{t\to+\infty} u = 0$，因而

$$\lim_{t\to+\infty} x = A/\alpha, \quad \lim_{t\to-\infty} \alpha x = A, \quad \lim_{t\to+\infty} \beta x = \beta\frac{A}{\alpha} < B.$$

这就是说：甲种物质最后消耗殆尽，乙种物质最后剩余量尚有$B-\beta\dfrac{A}{\alpha}$克。如果$A/\alpha > B/\beta$，那么$\lim\limits_{t\to+\infty} u = +\infty$，因而

$$\lim_{t\to+\infty} x = B/\beta.$$

这就是说：乙种物质最后消耗殆尽，甲种物质最后剩余量尚有

$A-\alpha\frac{B}{\beta}$克。

情形2　$A/\alpha=B/\beta$。这时方程成为

$$\frac{dx}{dt}=k\alpha\beta\left(\frac{A}{\alpha}-x\right)^2.$$

分离变量得

$$\frac{dx}{\left(\frac{A}{\alpha}-x\right)^2}=k\alpha\beta dt.$$

求不定积分得

$$\frac{1}{\frac{A}{\alpha}-x}=k\alpha\beta t+C,$$

即

$$\frac{A}{\alpha}-x=\frac{1}{k\alpha\beta t+C}.$$

设$t=0$时$x=0$，则得

$$C=\frac{\alpha}{A}.$$

于是

$$x=\frac{A}{\alpha}-\frac{1}{k\alpha\beta t+\frac{\alpha}{A}}.$$

当$t\to+\infty$时，$x\to A/\alpha$。甲、乙两种物质最后都消耗殆尽。

通过引入新的未知函数或新的自变量，可以把某些微分方程化成变量分离型方程。请看下面的例子。

例3　考察方程

$$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{x}{t}\right).$$

引入新的未知函数

$$u=\frac{x}{t},$$

我们得到

$$x = tu,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

代入原方程得

$$u + t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u),$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{f(u) - u}{t}.$$

这是一个变量分离型方程.

**例4** 考察方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{\alpha x + \beta t}{\gamma x + \delta t}\right).$$

这是属于例 3 那一类型的方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{\alpha\frac{x}{t} + \beta}{\gamma\frac{x}{t} + \beta}\right) = g\left(\frac{x}{t}\right).$$

**例5** 考察方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \lambda}{\gamma x + \delta t + \mu}\right) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

这又可以化成例 4 的情形. 事实上, 取$x_0$和$t_0$满足

$$\begin{cases} \alpha x_0 + \beta t_0 + \lambda = 0, \\ \gamma x_0 + \delta t_0 + \mu = 0, \end{cases}$$

然后作变换

$$\begin{cases} x = \xi + x_0, \\ t = \tau + t_0, \end{cases}$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \lambda}{\gamma x + \delta t + \mu}\right) = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\tau}{\gamma\xi + \delta\tau}\right).$$

## §4 实变复值函数

对于代数方程式，我们已经有过这样的经验：即使是实系数的代数方程，为了弄清楚它的根的状况，最好到更广泛的复数范围内加以讨论。在处理微分方程的某些问题时，例如求解高阶常系数线性微分方程的时候，也会遇到类似的情形：虽然是"实"的微分方程，所求的也是实解（实值函数解），但中间过程却需要在更广泛的复值函数范围内进行讨论。本节为这一讨论作准备。

### 4.a 复数与平面向量．复数序列的极限

我们把形状如

$$w = u + iv$$

的数称为复数，这里 $i=\sqrt{-1}$ 是虚单位，而 $u$ 和 $v$ 都是实数．$u$ 和 $v$ 分别称为复数 $w=u+iv$ 的实部和虚部，记为

$$\operatorname{Re}w = u, \quad \operatorname{Im}w = v.$$

全体复数组成的集合记为 $\mathbf{C}$。

复数的加法和乘法定义如下：

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)=(u_1+u_2)+i(v_1+v_2),$$

$$\begin{aligned}&(u_1+iv_1)\cdot(u_2+iv_2)\\&\quad=(u_1u_2-v_1v_2)+i(u_1v_2+v_1u_2).\end{aligned}$$

由此又可导出作为逆运算的减法和除法的表示

$$(u_1+iv_1)-(u_2+iv_2)=(u_1-u_2)+i(v_1-v_2),$$

$$\frac{u_1+iv_1}{u_2+iv_2}=\frac{u_1u_2+v_1v_2}{u_2^2+v_2^2}+i\,\frac{v_1u_2-u_1v_2}{u_2^2+v_2^2}$$

（作除法时要求 $u_2+iv_2\neq0$，即 $u_2^2+v_2^2\neq0$）。

复数 $w=u+iv$ 可以解释为平面直角坐标系中坐标为 $(u,v)$ 的点。这点的极坐标为 $(r,\theta)$，其中

$$r=\sqrt{u^2+v^2},\quad \cos\theta=\frac{u}{r},\quad \sin\theta=\frac{v}{r}.$$

我们把

$$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

称为复数的极坐标表示。采用这种表示来计算复数的乘方特别方便：

$$w^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

复数$w$的极坐标表示中的$r$和$\theta$分别称为这复数的模和幅角，并分别用符号$|w|$和$\mathrm{Arg}w$来表示。

复数$w=u+iv$还可解释为长为$|w|$方位角为$\mathrm{Arg}\,w$的一个平面向量——例如起点在$(0,0)$终点在$(u,v)$的平面向量。对许多情形（但不是一切情形），向量的起点是无关紧要的。对于不必考虑起点位置的情形，我们认为向量是可以平行移动的，并把这样的向量叫做自由向量。我们把复数解释为平面自由向量。采取这样的约定有许多方便之处。例如，为了表示若干个复数之和

$$w=w_1+w_2+\cdots+w_n,$$

我们可以把$w_2$的起点移到$w_1$的终点，再把$w_3$的起点移到$w_2$的终点，…，最后把$w_n$的起点移到$w_{n-1}$的终点。于是，和$w$就可以表示为从$w_1$的起点到$w_n$的终点的向量(见图7-2)。

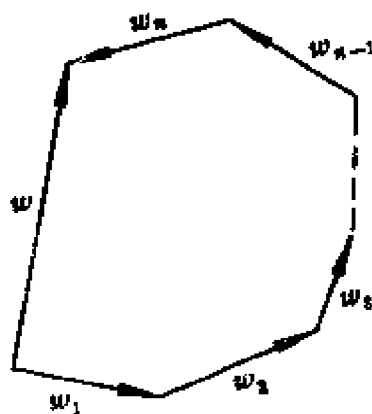



图 7-2

复数的模正好是表示它的向量的长度，它满足以下的三角形不等式：

$$|w_1+w_2|\leqslant|w_1|+|w_2|.$$

这不等式意味着三角形两边之和大于第三边。我们也可用代数方式证明这一不等式：因为

$$(u_1^2+v_1^2)(u_2^2+v_2^2)-(u_1u_2+v_1v_2)^2$$
$$=(u_1v_2-v_1u_2)^2\geqslant 0,$$

所以

$$u_1u_2+v_1v_2\leqslant\sqrt{u_1^2+v_1^2}\cdot\sqrt{u_2^2+v_2^2}$$

（这称为Cauchy不等式）。利用这一结果，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2\\
&\quad=(u_1^2+v_1^2)+2(u_1u_2+v_1v_2)+(u_2^2+v_2^2)\\
&\quad\leqslant(u_1^2+v_1^2)+2\sqrt{u_1^2+v_1^2}\cdot\sqrt{u_2^2+v_2^2}+(u_2^2+v_2^2)\\
&\quad=(\sqrt{u_1^2-v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2})^2\\
&\quad\sqrt{(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2}\leqslant\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2},
\end{aligned}
$$

即

$$|w_1+w_2|\leqslant|w_1|+|w_2|.$$

这不等式还可推广于$m$个复数的情形：

$$|w_1+w_2+\cdots+w_m|\leqslant|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_m|.$$

我们来考察复数序列

$$w_n=u_n+iv_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

设$C=A+iB$是一个复数。如果对任何实数$\varepsilon>0$，都存在自然数$N$，使得$n>N$时有

$$|w_n-C|<\varepsilon,$$

那么我们就说复数序列$\{w_n\}$收敛于极限$C$，记为

$$\lim w_n=C \text{ 或者 } w_n\to C.$$

由于以下定理，涉及实数序列极限的许多论断都可以翻译成适用于复数序列的相应结果。

**定理1** 复数序列$w_n=u_n+iv_n$收敛于$C=A+iB$的充分必要条件是序列$u_n$和序列$v_n$分别收敛于$A$和$B$。

**证明** 我们有不等式

$$\left.\begin{array}{l}|u_n-A|\\|v_n-B|\end{array}\right\}\leqslant|w_n-C|$$

$$= \sqrt{(u_n - A)^2 + (v_n - B)^2}$$
$$\leqslant |u_n - A| + |v_n - B|. \qquad \square$$

### 4.b 实变复值函数

设 $D \subset \mathbf{R}, E = \mathbf{C}$。我们把从 $D$ 到 $E$ 的映射

$$w = f(t)$$

称为实变复值函数。设 $w = u + iv$，$f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$，则实变复值函数 $w = f(t)$ 相当于一对实函数

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t).$$

我们引入实变复值函数作为工具，是为了更方便地研究实函数。至于以复数为自变量并且也以复数为函数值的函数，则是另一门课程——复变函数论——讨论的主要对象。

关于实变复值函数的极限，也有两种定义方式——序列式和 $\varepsilon$-$\delta$ 方式。这两种定义分别陈述如下。

**定义**(函数极限的序列式定义) 设实变复值函数 $w = f(t)$ 在 $\check{U}(t_0, \eta)$ 有定义，$C \in \mathbf{C}$。如果对于任何满足条件 $t_n \to t_0$ 的序列 $\{t_n\} \subset \check{U}(t_0, \eta)$，相应的函数值序列 $\{f(t_n)\}$ 都以 $C$ 为极限，那么我们就说 $t \to t_0$ 时函数 $f(t)$ 趋于极限 $C$，记为

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = C.$$

**定义**(函数极限的 $\varepsilon$-$\delta$ 式定义) 设实变复值函数 $w = f(t)$ 在 $\check{U}(t_0, \eta)$ 有定义，$C \in \mathbf{C}$。如果对于任意实数 $\varepsilon > 0$，存在实数 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |t - t_0| < \delta$，就有

$$|f(t) - C| < \varepsilon,$$

那么我们就说 $t \to t_0$ 时函数 $f(t)$ 趋于极限 $C$，记为

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = C.$$

同以前一样，可以证明上述两种定义是彼此等价的。

关于函数的极限，也有与定理 1 类似的结果。

**定理2** 设实变复值函数 $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ 在 $\check{U}(t_0, \eta)$ 有定

义（$\varphi$和$\psi$ 都是实函数），而$C=A+iB\in\mathbb{C}$（$A$和$B$都是实数），则$\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=C$的充分必要条件是：

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=A,\quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=B.$$

**证明** 可以利用序列式定义并引用定理 1 来证明．也可以利用$\varepsilon$-$\delta$式的定义并引用以下不等式直接加以证明：

$$\left.\begin{array}{l}|\varphi(t)-A|\\|\psi(t)-B|\end{array}\right\}\leqslant|f(t)-C|$$
$$=\sqrt{(\varphi(t)-A)^2+(\psi(t)-B)^2}$$
$$\leqslant|\varphi(t)-A|+|\psi(t)-B|.\qquad\square$$

设实变复值函数$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$在$U(t_0,\eta)$有定义，如果

$$\lim_{t\to t_0}f(t)=f(t_0),$$

那么我们就说这函数在$t_0$点连续。

**定理3** 设实变复值函数$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$在$U(t_0,\eta)$有定义（$\varphi(t)$和$\psi(t)$都是实函数），则$f(t)$在$t_0$点连续的充分必要条件是：$\varphi(t)$和$\psi(t)$都在$t_0$点连续。

设实变复值函数$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$在$U(t_0,\eta)$有定义，则$f(t)$在$t_0$点的导数$f'(t_0)$仍定义为

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

**定理4** 设实变复值函数$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$在$U(t_0,\eta)$有定义（$\varphi(t)$和$\psi(t)$都是实函数）．则$f(t)$在$t_0$点可导的充分必要条件是：$\varphi(t)$和$\psi(t)$都在$t_0$点可导．当这一条件满足时，我们有

$$f'(t_0)=\varphi'(t_0)+i\psi'(t_0).$$

在第四章§2中所证明的关于和差积商的求导法则以及关于复合函数的求导法则等，仍然适用于实变复值函数．例如，关于复合函数的求导法则可陈述如下：设实函数$s=g(t)$在$t_0$点可导，

实变复值函数 $w=f(s)$ 在 $s_0=g(t_0)$ 点可导，则复合函数 $w=f\circ g(t)$在$t_0$点可导，并且有

$$(f\circ g)'(t_0)=f'(g(t_0))g'(t_0).$$

所有这些法则都可以仿照第四章§2里的办法加以证明，或者对函数的实部和虚部分别运用那里的法则而得到。

设实变复值函数$f(t)$在区间$I$上有定义。如果存在一个实变复值函数$F(t)$，它在$I$连续，在$I^0$可导并且满足条件

$$F'(t)=f(t),\quad \forall t\in I^0,$$

那么我们就说$F$是函数$f$的一个*原函数*。

**定理5** 为使实变复值函数$F(t)=\Phi(t)+i\Psi(t)$是实变复值函数$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$的原函数，必须而且只须$\Phi(t)$和$\Psi(t)$分别是$\varphi(t)$和$\psi(t)$的原函数。

由此又容易证明：如果$F(t)$是$f(t)$的一个原函数，那么$f(t)$的一切原函数都可以表示为

$$F(t)+C,$$

这里$C\in\mathbf{C}$是一个复常数。我们把$f(t)$的原函数族$F(t)+C$称为函数$f(t)$的*不定积分*，记为

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t=F(t)+C.$$

如果$f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$（$\varphi(t)$和$\psi(t)$都是实函数），那么

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t=\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t+i\int\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

### 4.c 欧拉(Euler)公式

以任意实数$a$为指数的方幂$e^a$已在第三章§4中给出了定义。这里，我们来讨论以复数$c=a+ib$为指数的方幂。为此，先来介绍$e^a$的另一等价的定义。在以下的讨论中将用到几个重要的极限：

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln(1+\beta)}{\beta}=1,$$

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\gamma}{\gamma}=1.$$

注意到

$$\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a$$
$$=e^a\quad(a\neq 0)$$

和

$$\lim\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=1=e^0,$$

我们可以把$e^a$定义为

$$e^a=\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n,\quad \forall a\in\mathbf{R}.$$

这种定义方式容易推广到复指数的情形.

**定义** 对于$c=a+ib\in\mathbf{C}$，我们规定

$$e^c=\lim\left(1+\frac{c}{n}\right)^n.$$

尚须证明：对任意给定的复数$c=a+ib$，上面定义中的极限必定存在。为此，我们把复数$\left(1+\frac{c}{n}\right)=\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)$写成极坐标形式

$$\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)+i\frac{b}{n}\right]^n$$
$$=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n),$$

这里

$$r_n=\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}},$$

$$\theta_n=n\operatorname{arctg}\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\quad(\text{设}n>|a|).$$

我们有

$$\lim \ln r_n = \lim\left[\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n}{2}\left(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)\right]=a,$$

因而

$$\lim r_n = \lim e^{r_n} = e^a.$$

又

$$\lim \theta_n = \lim\left(n \operatorname{arctg}\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$$=\lim\left(n\frac{\frac{b}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)=b.$$

这样，我们证明了

$$\lim\left(1+\frac{a+ib}{n}\right)^n = e^a(\cos b + i\sin b),$$

即

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b). \tag{4.1}$$

对于$a=0$的情形有

$$e^{ib} = \cos b + i\sin b. \tag{4.2}$$

由此又可得到

$$\cos b = \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2},\quad \sin b = \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}. \tag{4.3}$$

以上这些公式都称为欧拉公式。利用这些公式，可以很容易地将指数运算的基本关系推广到复指数情形：

$$e^{c_1}\cdot e^{c_2} = e^{c_1+c_2}.$$

事实上，我们有

$$e^{a_1+ib_1}\cdot e^{a_2+ib_2}$$

$$= e^{a_1}(\cos b_1 + i\sin b_1)\cdot e^{a_2}(\cos b_2 + i\sin b_2)$$
$$= e^{a_1+a_2}[\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)]$$
$$= e^{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}$$
$$= e^{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)}.$$

由欧拉公式可得

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = \pm i,$$
$$e^{\pm i\pi} = \cos\pi \pm i\sin\pi = -1,$$
$$e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1,\quad \forall k\in \mathbf{Z}.$$

特别地有

$$e^{i2\pi} = 1.$$

这后一式子很有意思，它把数学中最重要的五个数 $1,2,\pi,e,i$ 联系在一起。

利用欧拉公式，我们还可以把复数的极坐标形式 $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 写成

$$w = re^{i\theta},$$

这里 $r = |w|$ 是复数 $w$ 的模，$\theta = \mathrm{Arg}w$ 是复数 $w$ 的幅角。请注意

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

是一个模为 1 的复数：

$$|e^{i\theta}| = 1,$$

它表示与极轴夹 $\theta$ 角的一个单位向量。再来看复数

$$ie^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta.$$

因为

$$ie^{i\theta} = e^{i\pi/2}\cdot e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)},$$

所以 $ie^{i\theta}$ 是与 $e^{i\theta}$ 垂直的一个单位向量（图7-3）。

最后，我们来考察实变复值函数

$$f(t) = e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t},$$

这里 $t\in\mathbf{R}$，$\lambda = \alpha + i\beta\in\mathbf{C}$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$。根据欧拉公式有

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

又依据定理 4，我们求得

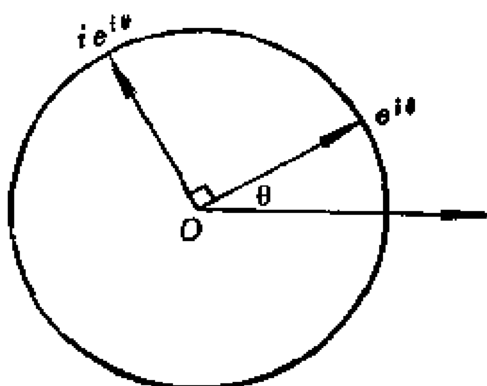



图 7-3

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= (e^{\alpha t}\cos\beta t)' + i(e^{\alpha t}\sin\beta t)' \\
&= e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t) \\
&\quad + ie^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t) \\
&= (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} = \lambda e^{\lambda t}.
\end{aligned}
$$

这就是说，以下熟知的求导公式对于 $\lambda \in \mathbf{C}$ 的情形也仍然成立：

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}.$$

由此又可得到关于原函数——不定积分的相应公式

$$\int e^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} + C.$$

**例** 设 $a, b \in \mathbf{R}$，试求不定积分

$$\int e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t, \qquad \int e^{at}\sin bt\,\mathrm{d}t.$$

**解** 记 $\lambda = a + ib$，则所求的不定积分恰好分别为下式的实部和虚部：

$$
\begin{aligned}
&\int e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\mathrm{d}t = \int e^{\lambda t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} + C = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} + A + iB \\
&= \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{at}(\cos bt + i\sin bt) + A + iB.
\end{aligned}
$$

于是，我们得到

$$\int e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\cos bt + b\sin bt}{a^2+b^2} + A,$$

$$\int e^{at}\sin bt\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin bt - b\cos bt}{a^2+b^2} + B,$$

这里$A$和$B$是任意实常数。

## §5　高阶常系数线性微分方程

形状如

$$(5.1)\qquad \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_0(t)x = b(t)$$

的微分方程称为$n$阶线性微分方程。如果$b(t)\equiv 0$，那么我们就说这线性微分方程是齐次的，否则就说它是非齐次的。

考察非齐次线性微分方程(5.1)和与它对应的齐次线性微分方程

$$(5.2)\qquad \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_0(t)x = 0.$$

设$\varphi_0(t)$是(5.1)的一个确定的特解。如果$\varphi(t)$是(5.1)的任意一个解，那么

$$\psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t)$$

应该是(5.2)的解。反过来，如果$\psi(t)$是(5.2)的任意一个解，那么$\varphi(t) = \psi(t) + \varphi_0(t)$也就是(5.1)的解。由这讨论我们得知：非齐次方程(5.1)的一般解$\varphi(t)$等于这方程的（任意一个）特解$\varphi_0(t)$加上相应的齐次方程(5.2)的一般解$\psi(t)$。

如果在$n$阶线性微分方程(5.1)中，所有的系数$a_{n-1}(t),\cdots,a_0(t)$都是常数，即

$$a_{n-1}(t)\equiv a_{n-1},\ \cdots,\ a_0(t)\equiv a_0,$$

那么这方程就称为$n$阶常系数线性微分方程。这类方程的一般形

式为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0x=b(t).$$

我们引入微分算子的记号：

$$D=\frac{d}{dt}.$$

采用这样的记号，上面的方程可以写成

$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0)x=b(t).$$

请注意，在这样的写法中，D表示求导一次的运算，$D^k$ 表示求导 $k$ 次的运算，$a_0$ 表示乘以 $a_0$ 的运算。我们把

$$p(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0$$

称为是算子多项式。在这多项式中把算子D换成变元 $\lambda$，就得到相应的特征多项式

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0.$$

对于相加、相乘和乘以数这些代数运算，适用于文字 $\lambda$ 的那些法则也同样适用于算子 D．如果 $p(\lambda)$ 分解为若干个因式 $p_1(\lambda),\cdots,$ $p_m(\lambda)$ 的乘积

$$p(\lambda)=p_1(\lambda)\cdots p_m(\lambda),$$

那么算子多项式 $p(D)$ 也就分解为相应的因式的乘积

$$p(D)=p_1(D)\cdots p_m(D).$$

我们可以利用适当的因式分解来求高阶常系数线性微分方程的解。为了叙述简便，使初学者更容易领会精神而不致为运算的细节所烦扰，这里只介绍二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法。更一般的讨论在本节后的附录中。

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0=0.$$

它的算子多项式为

$$p(D)=D^2+a_1D+a_0.$$

相应的特征多项式为

$$p(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0.$$

以下分三种情形讨论。

情形1　设$p(\lambda)$有不相等的两个实根$\lambda_1$和$\lambda_2$。这时

$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

$$p(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-\lambda_1)(\mathrm{D}-\lambda_2).$$

令$x_1=(\mathrm{D}-\lambda_2)x$，则$x_1$应满足

$$(\mathrm{D}-\lambda_1)x_1=0.$$

由此得到

$$x_1=\gamma_1 e^{\lambda_1 t},$$

这里$\gamma_1$是任意常数。未知函数$x$应满足

$$(\mathrm{D}-\lambda_2)x=x_1(t).$$

由此又得到

$$\begin{aligned}x&=e^{\lambda_2 t}\left(\int e^{-\lambda_2 t}x_1(t)\mathrm{d}t+\gamma_2\right)\\&=e^{\lambda_2 t}\left(\gamma_1\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\mathrm{d}t+\gamma_2\right)\\&=\frac{\gamma_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t}+\gamma_2 e^{\lambda_2 t}\\&=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},\end{aligned}$$

这里$C_1=\dfrac{\gamma_1}{\lambda_1-\lambda_2}$和$C_2=\gamma_2$也都是任意常数。

情形2　设$p(\lambda)$有二重实根$\mu$。这时$p(\mathrm{D})$分解为

$$p(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-\mu)^2.$$

令$x_1=(\mathrm{D}-\mu)x$，则$x_1$满足

$$(\mathrm{D}-\mu)x_1=0.$$

于是

$$x_1=C_1e^{\mu t}.$$

又从

$$(\mathrm{D}-\mu)x=x_1(t)$$

得到

$$x=e^{\mu t}\left(\int e^{-\mu t}x_1(t)\,\mathrm{d}t+C_2\right)=(C_1t+C_2)e^{\mu t}.$$

情形3　设$p(\lambda)$有一对共轭虚根$\nu=\rho+i\omega$和$\bar{\nu}=\rho-i\omega$。这时

$$p(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-\nu)(\mathrm{D}-\bar{\nu}).$$

类似于情形1中所作的，在复值函数范围内进行讨论，我们看到：那里所得的公式对于$\lambda_1=\nu$和$\lambda_2=\bar{\nu}$也仍然适用。我们得到复值函数范围的一般解

$$x=\gamma_1e^{\nu t}+\gamma_2e^{\bar{\nu}t},$$

其中的$\gamma_1$和$\gamma_2$是任意复常数；这样形状的表示式，概括了方程的所有复解，当然也概括了方程的所有实解。我们来考察，复常数$\gamma_1$和$\gamma_2$满足怎样的条件能使上面的表示式给出实解。容易看出

$$\bar{x}=\bar{\gamma}_1e^{\bar{\nu}t}+\bar{\gamma}_2e^{\nu t}.$$

要使$\bar{x}=x$，必须而且只须

$$\bar{\gamma}_1=\gamma_2,\qquad \bar{\gamma}_2=\gamma_1.$$

这就是说，要使$x=\gamma_1e^{\nu t}+\gamma_2e^{\bar{\nu}t}$给出实解，必须而且只须$\gamma_1$和$\gamma_2$是彼此共轭的复数。如果取

$$\gamma_1=\frac{1}{2}(C_1-iC_2),\qquad \gamma_2=\frac{1}{2}(C_1+iC_2),$$

那么就得到了实函数范围内的一般解

$$x=C_1e^{\rho t}\cos\omega t+C_2e^{\rho t}\sin\omega t,$$

这里的$C_1$和$C_2$是任意实常数。

以上所得的结果可以列表小结如下：

| $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$的根$\lambda_1$和$\lambda_2$的情况 | $(\mathrm{D}^2+a_1\mathrm{D}+a_0)x=0$的一般解 |
|---|---|
| $\lambda_1$、$\lambda_2$是实数，　$\lambda_1\neq\lambda_2$ | $C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}$ |
| $\lambda_1=\lambda_2=\mu$是实数 | $(C_1t+C_2)e^{\mu t}$ |
| $\lambda_{1,2}=\rho\pm i\omega$是共轭虚根 | $(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)e^{\rho t}$ |

作为上面结果的应用，我们来考察本章§1例4中所述的弹性振动。

例1　对于无阻尼振动的情形，运动方程为（参看§1例4）：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0.$$

这方程的特征多项式

$$p(\lambda)=\lambda^2+\frac{k}{m}$$

有两个彼此共轭的虚根 $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$，这里

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

我们求得微分方程的解

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin(\omega t+\varphi),$$

这里

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\qquad \sin\varphi=C_1/A,\qquad \cos\varphi=C_2/A.$$

象这样的运动

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

被称为简谐振动。振动的周期 $T$ 应满足

$$\omega T=2\pi.$$

因而

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

例2　阻尼振动的情形。如果物体除了受弹性恢复力作用而外还受到一个与速度成正比（方向与速度相反）的阻尼力的作用，那么它所遵循的方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{h}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0.$$

这方程的特征多项式为

$$p(\lambda)=\lambda^2+\frac{h}{m}\lambda+\frac{k}{m}.$$

视 $h$ 和 $k$ 的不同情形，$p(\lambda)$的根 $\lambda_1$和 $\lambda_2$也呈现不同的状况。

情形1　$h^2-4mk>0$。这时两根 $\lambda_1$和 $\lambda_2$是不相等的实数，并且都是负数。运动方程的一般解为

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

这里的常数 $C_1$和$C_2$可由运动的初始位置 $x_0$和初始速度 $v_0$来确定。因为 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$，所以

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0.$$

对这种情形，由于阻尼过大，物体并不来回振动，而是趋于平衡位置。

情形2　$h^2-4mk=0$。这时 $p(\lambda)$ 有相等二实根 $\lambda_1=\lambda_2=\mu=-\frac{h}{2m}<0$。运动方程的一般解为

$$x=(C_1t+C_2)e^{\mu t}.$$

对这一情形也有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0.$$

情形3　$h^2-4mk<0$.这时 $p(\lambda)$有一对共轭虚根 $\lambda_{1,2}=\rho\pm i\omega$，并且

$$\rho=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=-\frac{h}{2m}<0.$$

方程的一般解为

$$\begin{aligned}x&=C_1e^{\rho t}\cos\omega t+C_2e^{\rho t}\sin\omega t\\&=Ae^{\rho t}\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

$$\left(A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \sin\varphi=\frac{C_1}{A},\quad \cos\varphi=\frac{C_2}{A}\right).$$

对这一情形，物体才真正往复振动.又因为 $\rho<0$，所以振幅 $Ae^{\rho t}$不断衰减趋于 0：

$$\lim_{t\to+\infty}Ae^{\rho t}=0.$$

# 附　录

在这附录里，我们来讨论高阶常系数线性微分方程的求解问题。先来考察二阶常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=b(t). \tag{5.3}$$

相应的齐次方程的通解是已知的，所以只须求出方程（5.3)的一个特解。设这方程的特征多项式 $q(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$分解为

$$q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

则算子多项式 $q(\mathrm{D})$也分解为

$$q(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-\lambda_1)(\mathrm{D}-\lambda_2).$$

方程（5.3)可以写成

$$(\mathrm{D}-\lambda_1)(\mathrm{D}-\lambda_2)x=b(t).$$

依次解以下两个方程

$$(\mathrm{D}-\lambda_1)x_1=b(t),$$
$$(\mathrm{D}-\lambda_2)x=x_1,$$

就可求得方程（5.3)的特解。

对于 $\lambda_1$和$\lambda_2$是共轭虚数的情形，按上述步骤求得的方程(5.3)的特解有可能是一个复值函数 $z(t)=x(t)+iy(t)$. 这时应有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}+a_0z(t)\equiv b(t).$$

比较上式两边的实部，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+a_0x(t)\equiv b(t).$$

这样，不论 $\lambda_1$和 $\lambda_2$是实数或者是共轭虚数，我们都能够求出方程(5.3) 在实函数范围内的特解，从而完全解决了这方程的求解问题。

再来考察一般的$n$阶常系数线性微分方程

$$(5.4)\qquad \frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0x=b(t),$$

其特征多项式为

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0.$$

在实数范围内，可以把特征多项式表示为以下形式的一些不可约因式的乘积

$$\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_k,$$

$$\lambda^2+\mu_1\lambda+\nu_1,\cdots,\lambda^2+\mu_l\lambda+\nu_l,$$

这里$\lambda_i,\mu_j,\nu_j$都是实数，$\lambda^2+\mu_j\lambda+\nu_j$没有实根($i=1,\cdots,k,j=1,\cdots,l;k+2l=n$)。于是，算子多项式$p(D)$也相应地分解为

$$p(D)=(D-\lambda_1)\cdots(D-\lambda_k)\cdot(D^2+\mu_1D+\nu_1)\cdots(D^2+\mu_lD+\nu_l).$$

于是，方程

$$(5.4)\qquad p(D)x=b(t),$$

可以通过以下这些方程来求解

$$(D-\lambda_1)x_1=b(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(D-\lambda_k)x_k=x_{k-1},$$

$$(D^2+\mu_1D+\nu_1)x_{k+1}=x_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(D^2+\mu_lD+\nu_l)x=x_{n-1}.$$

以上每一个方程的解法都是已知的。

通过上述讨论，我们原则上解决了一般的高阶常系数线性微分方程的求解问题。但对于具体的方程，所述的方法并不一定总是最简便的方法。在这里，我们不能对实际解题的有效方法作进一步的介绍了。这方面的问题，留待读者将来学习微分方程课程时再加以讨论。

## §6 开普勒行星运动定律与牛顿万有引力定律

十六世纪后期，丹麦天文学家第谷·布拉赫(Tycho Brache)以坚韧不拔的毅力，对太阳系的行星运动进行了长达20年之久的精细观测，积累了丰富的观测资料。他的助手，德国人开普勒(Johanne Kepler)曾参与部分观测工作并继承了他的全部观测数据。在此基础上，开普勒又进行了长达20年的研究，总结出关于行星运动的三大定律。

**开普勒第一定律** 行星绕太阳运行(公转)的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。

**开普勒第二定律** 从太阳中心指向一个行星的有向线段(向径)，在同样的时间内扫过同样的面积。换句话说就是：向径的面积速度是常数(图7-4)。

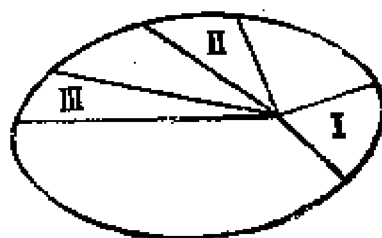



图 7-4

**开普勒第三定律** 各行星公转周期的平方与其椭圆轨道长轴的立方之比是一个常数。

通过对开普勒三大定律的分析，牛顿判断行星应受到一个指向太阳的力的作用，这力的大小与行星的质量成正比与距离的平方成反比。但这是一种什么力呢？经过缜密的思考，牛顿终于悟出道理来：这种力与地球上使物体下落的重力是一回事，它是存在于一切物体之间的相互吸引力。这样，牛顿总结出以下万有引力定律。

**万有引力定律** 任何两个物体之间都存在着一种相互吸引的力(称为万有引力)。这力作用在两物体连线上，它的大小与两物体的质量的乘积成正比，而与这两物体间的距离的平方成反比。

在本节中，我们首先说明怎样从开普勒定律导出万有引力定律，然后再反过来从万有引力定律推导开普勒三大定律。后一论

证的重要意义在于指出：任何受到与距离平方成反比的有心力作用的物体，都遵循与行星运动相类似的运动规律．于是，我们得知，月球绕地球的运动应该遵循类似的规律，人造卫星绕地球的运动应该遵循类似的规律（牛顿实际上已从理论上预言了发射人造卫星的可能性）；原子内部的电子绕原子核的运动也应遵循类似的规律（因为原子核与电子间的静电吸引力也是与距离的平方成反比的力）。

### 6.a　必要的准备

本段从几何和力学两方面为以下两段的讨论作准备．

在将要进行的讨论中，需要用极坐标表示椭圆轨道．我们先来推导椭圆的极坐标方程．把极点选在椭圆的一个焦点上，让极轴沿着椭圆的长轴指向远离另一焦点的方向(图7-5)．按照定义，椭圆是到两焦点的距离之和等于常数（设这常数为$2a$）的点的轨迹．椭圆的方程应为

$$r+\sqrt{r^2+4c^2+4rc\cos\theta}=2a$$

（这里设两焦点间的距离为$2c$）。

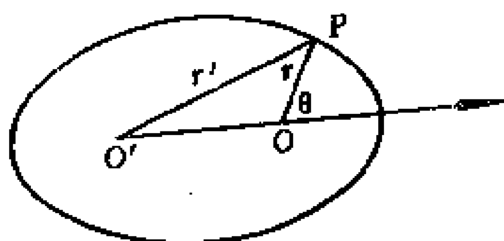



图　7-5

在上一方程中，先把左边的第一项 $r$ 移到右边，再取两边的平方消去根号，我们得到

$$r^2+4c^2+4rc\cos\theta=r^2+4a^2+4ra.$$

由此又可得到

$$r=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta},$$

这里

$$b=\sqrt{a^2-c^2}, \quad p=\frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon=\frac{c}{a}.$$

这样，我们得到了椭圆的极坐标方程

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

其次，我们利用复数来描述质点的平面运动，推导质点运动方程的极坐标形式。考察在平面上运动的一个质点。它在时刻 $t$ 的位置可以用从原点到这点的有向线段(向径)来表示，也就是说可以用复数 $z(t)=x(t)+iy(t)$ 来表示.从时刻 $t$ 到时刻 $t+\Delta t$,质点从位置 $z(t)$ 运动到 $z(t+\Delta t)$，它的位移可以用一个向量

$$\Delta z(t)=z(t+\Delta t)-z(t)$$

来表示。在这段时间里，质点的平均速度为

$$\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}=\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t},$$

这是一个向量。让 $\Delta t\to 0$，我们得到瞬时速度

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{dz(t)}{dt}=x'(t)+iy'(t).$$

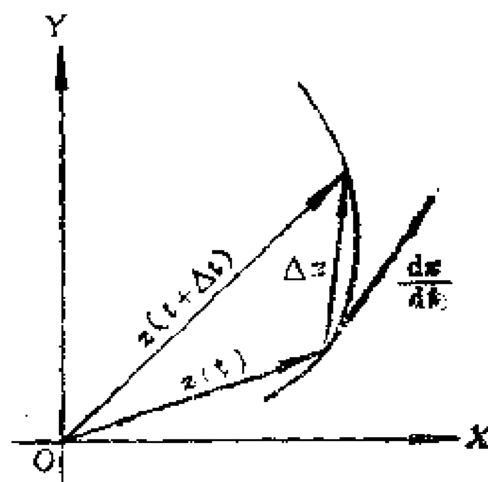



图 7·6

瞬时速度也是一个向量，它正好沿着质点运动轨迹的切线方向（图7-6）。瞬时速度向量的模

$$|v(t)| = \left|\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

正好等于质点通过的路程 $s$ 对时间的导数。为说明这一事实，需要指出

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

事实上，我们有

$$s(t+\Delta t) - s(t) = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

利用积分中值定理可得

$$s(t+\Delta t) - s(t) = \sqrt{(x'(\bar{\tau}))^2 + (y'(\bar{\tau}))^2}\,\Delta t,$$

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \sqrt{(x'(\bar{\tau}))^2 + (y'(\bar{\tau}))^2},$$

这里 $t \leqslant \bar{\tau} \leqslant t+\Delta t$。让 $\Delta t \to 0$，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

我们看到，瞬时速度向量 $v(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$ 很好地描述了运动的瞬时状况：它的大小即路程对时间的导数，它的方向即运动轨迹的切线方向。

根据同样的道理，运动的加速度也表示为一个向量

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}.$$

于是，对于质点的平面运动，牛顿第二定律的数学表示为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F,$$

这里作用力 $F$ 也是平面上的向量（因而也用复数来表示）。

在力学中，人们常常用小黑圆点表示对时间 $t$ 求导，例如 $\dot{z}(t)=\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$，$\ddot{z}(t)=\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}$等，——这实际上是牛顿本人提议的记号。以下我们将采用这样的记号。

为了以下讨论方便，我们来推导质点运动方程的极坐标形式。我们知道，任何复数 $z$ 都可以写成极坐标形式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

特别地，对于在平面上运动着的质点的位置向量（向径）$z(t)$，应有

$$z(t)=r(t)e^{i\theta(t)}.$$

对 $t$ 求导得

$$\dot{z}=\dot{r}(e^{i\theta})+r\dot{\theta}(ie^{i\theta}).$$

我们知道，$e^{i\theta}$ 是向径方向上的单位向量，而 $ie^{i\theta}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ 是与$e^{i\theta}$垂直的单位向量。速度$v(t)=\dot{z}(t)$沿这两方向分解为

$$v=v_r(e^{i\theta})+v_\theta(ie^{i\theta}),$$

这里

$$v_r=\dot{r},\qquad v_\theta=r\dot{\theta}.$$

将前面得到的$\dot{z}$的表示式再对 $t$ 求导一次，我们得到

$$\begin{aligned}\ddot{z}&=\ddot{r}(e^{i\theta})+\dot{r}\dot{\theta}(ie^{i\theta})+\dot{r}\dot{\theta}(ie^{i\theta})\\&\quad+r\ddot{\theta}(ie^{i\theta})-r\dot{\theta}^2(e^{i\theta})\\&=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)e^{i\theta}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})(ie^{i\theta}).\end{aligned}$$

加速度 $a=\ddot{z}$沿两方向$e^{i\theta}$和$ie^{i\theta}$分解为

$$a=a_r(e^{i\theta})+a_\theta(ie^{i\theta}),$$

这里

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}.$$

作用在质点上的力 $F$ 也沿这两方向分解：

$$F=F_r(e^{i\theta})+F_\theta(ie^{i\theta}).$$

我们把运动方程

$$m\ddot{z}=F$$

改写成

$$ma_r(e^{i\theta})+ma_\theta(ie^{i\theta})$$
$$=F_r(e^{i\theta})+F_\theta(ie^{i\theta}).$$

上式两边乘以$e^{-i\theta}$，然后比较实部和虚部，我们得到

$$ma_r=F_r,\qquad ma_\theta=F_\theta,$$

即

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r,\qquad m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=F_\theta.$$

这就是质点运动方程的极坐标形式（适用于质点的平面运动）.

## 6.b 从开普勒定律导出万有引力定律

开普勒第二定律说：从太阳中心指向一个行星的向径，在相等的时间内扫过相等的面积．换句话说就是：向径的面积速度等于常数．我们来推导面积速度的分析表示式．从时刻 $t$ 到时刻 $t+\Delta t$，向径从 $\theta(t)$ 位置转到 $\theta(t+\Delta t)$ 位置，所扫过的面积近似等于

$$\Delta A=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta=\frac{1}{2}r^2(\theta(t+\Delta t)-\theta(t)).$$

由此求得面积速度的分析表示式

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\dot{A}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}.$$

开普勒第二定律的数学表示即为：

(6.1) $$r^2\dot{\theta}=h\ (\text{常数}).$$

对上式求导得

$$2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0.$$

由此得到

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0.$$

这样，我们得到

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0,$$

$$F = F_r(e^{i\theta}) + F_\theta(ie^{i\theta}) = F_r e^{i\theta}.$$

这就是说，行星所受的力作用在太阳与行星的连线上。

其次，根据开普勒第一定律，行星绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳中心在椭圆的一个焦点上。我们用极坐标写出轨道的方程

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}.$$

由此得到

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon\cos\theta) = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\theta.$$

后一式两边对 $t$ 求导并利用（6.1）式可得

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\theta\cdot\dot{\theta},$$

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{p}(r^2\dot{\theta})\sin\theta = \frac{\varepsilon h}{p}\sin\theta.$$

这式两边再对 $t$ 求导得

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon h}{p}\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta} = \frac{\varepsilon h^2}{pr^2}\cos\theta.$$

这样，我们求得

$$\begin{aligned}
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
&= \ddot{r} - \frac{(r^2\dot{\theta})^2}{r^3} \\
&= \frac{\varepsilon h^2}{pr^2}\cos\theta - \frac{h^2}{r^3} \\
&= \frac{h^2}{r^2}\left(\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta - \frac{1}{r}\right) = -\frac{h^2}{p}\frac{1}{r^2},
\end{aligned}$$

$$F_r = ma_r$$

$$= -\frac{mh^2}{p}\frac{1}{r^2} = -km\frac{1}{r^2}.$$

下面我们指出 $k=h^2/p$ 是一个常数（对太阳系中所有的行星都是一样的）。我们注意到：面积速度 $A=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}h$ 与周期 $T$ 相乘应该得到椭圆的面积

$$\frac{1}{2}hT = \pi ab.$$

由此得到

$$h = \frac{2\pi ab}{T}, \qquad h^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2}.$$

根据开普勒第三定律，应有

$$T^2 = \lambda a^3,$$

这里的比值$\lambda$对太阳系中所有的行星都相同。于是

$$h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2}{\lambda}p,$$

$$k = \frac{h^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\lambda}\ （常数）.$$

我们得到

$$F_r = -km\frac{1}{r^2}\ （k是常数）.$$

这就是说：行星所受的力指向太阳，它的大小与行星的质量成正比，与行星到太阳的距离的平方成反比。

牛顿正是从这些结论出发，通过进一步的思考，总结出著名的万有引力定律的。

### 6.c 从万有引力定律推导开普勒定律

根据万有引力定律，行星受到指向太阳中心的引力的作用。行星在某一时刻的速度向量与太阳中心共同决定一张平面。容易

判断：行星以后的运动不会离开这一平面（因为在垂直于这平面的方向上既没有速度，又没有外力的作用）。我们在这平面上取以太阳中心为极点的极坐标系。于是，行星所受的力 $F$ 表示为

$$F = F_r(e^{i\theta}) + F_\theta(ie^{i\theta}),$$

其中

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}, \qquad F_\theta = 0.$$

这里 $M$ 是太阳的质量，$m$ 是行星的质量，$G$ 是万有引力常数。行星的运动方程可以写成

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -k/r^2, \qquad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

这里 $k = GM$。后一方程两边乘以 $r$ 得

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

这说明面积速度为常数

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h \text{（常数）}.$$

再来考察方程

(6.2) $$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -k/r^2.$$

记 $u = 1/r$，则从

$$r^2\dot{\theta} = h$$

可得

$$\dot{\theta} = hu^2.$$

我们有

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta},$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$= -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}.$$

方程(6.2)化成

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-h^2u^3=-ku^2,$$

即

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{h^2}. \tag{6.3}$$

这是一个二阶常系数线性微分方程。容易看出它的一个特解是 $u=k/h^2$。于是，这方程的一般解为

$$u=B\cos\theta+C\sin\theta+k/h^2.$$

这式又可写成

$$u=L\cos(\theta-\theta_0)+k/h^2,$$

其中

$$L=\sqrt{B^2+C^2},$$

$$\cos\theta_0=\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}},\qquad \sin\theta_0=\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}.$$

于是有

$$r=\frac{1}{u}$$

$$=\frac{1}{L\cos(\theta-\theta_0)+k/h^2}$$

$$=\frac{\frac{h^2}{k}}{1+\frac{h^2L}{k}\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)},$$

这里

$$\varepsilon=h^2L/k,\qquad p=h^2/k.$$

我们得到了圆锥曲线的一般方程

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}.$$

因为运转中的行星不会跑到无穷远去，它的轨道应该是一个椭

圆，所以$\varepsilon<1$。

最后，我们来推证开普勒第三定律。利用关系

$$\frac{1}{2}hT=\pi ab,\quad p=\frac{h^2}{k}=\frac{b^2}{a},$$

可得

$$T^2=\left(\frac{2\pi ab}{h}\right)^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2}$$

$$=\frac{\frac{4\pi^2}{k}a^2b^2}{\frac{h^2}{k}}$$

$$=\frac{\frac{4\pi^2}{k}a^2b^2}{\frac{b^2}{a}}=\frac{4\pi^2}{k}a^3$$

这里$k=GM$是一个常数。

圆，所以$\varepsilon<1$。

最后，我们来推证开普勒第三定律。利用关系

$$\frac{1}{2}hT=\pi ab,\quad p=\frac{h^2}{k}=\frac{b^2}{a},$$

可得

$$T^2=\left(\frac{2\pi ab}{h}\right)^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2}$$

$$=\frac{\frac{4\pi^2}{k}a^2b^2}{\frac{h^2}{k}}$$

$$=\frac{\frac{4\pi^2}{k}a^2b^2}{\frac{b^2}{a}}=\frac{4\pi^2}{k}a^3$$

这里$k=GM$是一个常数。

# 数学分析新讲

## 第二册

张筑生 编著



# 数学分析新讲

第二册

张筑生 编著

北京大学出版社

书　　名：数学分析新讲（第二册）
著作责任者：张筑生　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-01228-4/O・203
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168毫米　32开本　12.25印张　290千字
1990年10月第一版　1995年11月第二次印刷
印　　数：5,001—8,000册
定　　价：12.30 元

# 内 容 提 要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义．改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养．书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用（包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律）．从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排，使传统的材料以新的面貌出现．书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）．

全书共三册．第一册内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用．第二册内容是：一元微积分的进一步讨论，广义积分，多元函数微分学，重积分．第三册内容是：曲线、曲面与微积分，级数与含参变元的积分．

本书可作为大专院校数学系数学分析基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科学工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书．

# 目　录

## 第三篇　一元微积分的进一步讨论



## 第四篇　多元微积分

# 第　三　篇

## 一元微积分的进一步讨论

# 第八章　利用导数研究函数

## §1　柯西中值定理与洛必达法则

本节介绍拉格朗日中值定理的一种推广——柯西中值定理，并运用这种新形式的中值定理推导关于未定型极限的洛必达(L' Hospital) 法则.

### 1.a　柯西中值定理

我们知道，拉格朗日中值定理的几何意义是：在显式表示的可微曲线段上，至少存在一点，该点的切线平行于联结这曲线段两端的弦. 如果考察参数表示的可微曲线段

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

那么从几何直观上可以判断，在这曲线段上也至少存在一点（相应于介于$\alpha$和$\beta$之间的一个参数值$\tau$），该点的切线平行于联结这曲线段两端的弦，即：

$$\frac{\psi'(\tau)}{\varphi'(\tau)}=\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}.$$

这一结果就是著名的柯西中值定理.

**定理**（柯西中值定理）　设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，并且满足条件

(1.1)　　$$g'(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b),$$

则存在 $\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**证明**　由条件 (1.1) 可知

$$g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)\neq 0,$$

因而商式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

有意义．我们来考察辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

容易验证：$F$ 在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，并且

$$F(a)=F(b)=0.$$

于是，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=0.$$

由此得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad \square$$

### 1.b 未定式

如果已经知道

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\ \lim_{x\to a}g(x)=B,\ a,A,B\in\overline{\mathbf{R}},$$

那么除去某些例外情形，我们可以利用下面的运算法则去求和、差、积、商及幂-指数式的极限（假定在 $\check{U}(a)$之中函数的运算有意义）：

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B,$

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=A-B,$

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=AB,$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},$

(5) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B.$

对于以上各条，所说的例外情形分别是：

(i) 在(1)中 $A$ 与 $B$ 为异号无穷大；

(ii) 在(2)中 $A$ 与 $B$ 为同号无穷大；

(iii) 在(3)中 $A$ 与 $B$ 之一为0，另一为无穷大；

(iv) 在(4)中 $A$ 与 $B$ 同时为0或者 $A$ 与 $B$ 同时为无穷大；

(v) 在(5)中 $A=1$，$B=\infty$，或者 $A=0$，$B=0$，或者 $A=\infty$，$B=0$.

这些例外情形所涉及的极限类型统称为未定型. 类型(i)或(ii)被称为 $\infty-\infty$ 未定型. 类型(iii)被称为 $0\cdot\infty$ 未定型. (iv)中的两种极限类型分别被称为 $\frac{0}{0}$ 未定型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定型. (v) 中的三种类型分别被称为 $1^{\infty}$ 未定型，$0^0$ 未定型与 $\infty^0$ 未定型.

未定型的极限式被称为未定式. 对于未定式，上面列举的运算法则(1)—(5)失去效用，必须另寻解决问题的途径. 下面将要介绍的洛必达法则，在一定的条件下，提供了确定未定型极限的有效办法——通常称为未定式的定值法.

### 1.c 洛必达法则

下面的定理1和定理2都称为洛必达法则. 为了叙述方便，我们以 $\check{U}(a)$ 表示 $a$ 的某个去心邻域，它可以是以下几种情形之一：

$$a\in\mathbb{R},\ \check{U}(a)=(a-\eta,a+\eta);$$
$$a=+\infty,\check{U}(a)=(H,\ +\infty);$$
$$a=-\infty,\check{U}(a)=(-\infty,\ -H);$$
$$a=\infty,\ \check{U}(a)=(-\infty,\ -H)\cup(H,\ +\infty).$$

**定理1** 设 $a\in\overline{\mathbb{R}}$ 或 $a=\infty$；$l\in\overline{\mathbb{R}}$ 或 $l=\infty$. 如果函数 $f$ 和 $g$ 在 $a$ 点的去心邻域 $\check{U}(a)$ 上可导，$g'(x)\neq0$，$\forall x\in\check{U}(a)$，并且满足：

I： $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，

Ⅱ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$,

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

**定理2** 设 $a\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $a=\infty$; $l\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $l=\infty$. 如果函数 $f$ 和 $g$ 在 $a$ 点的去心邻域 $\check{U}(a)$ 上可导，$g'(x)\neq 0$，$\forall x\in\check{U}(a)$，并且满足：

Ⅰ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,

Ⅱ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$,

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

在证明上面两个定理之前，我们先对问题作一番分析，尽可能地减少所必须考虑的情形.

首先，在两定理的证明中，只须就 $l=0$ 或 $l$ 为无穷大($+\infty$, $-\infty$, $\infty$)这些情形加以讨论就可以了. 事实上，对于 $l\in\mathbf{R}$ 的其他情形，只要用 $\tilde{f}(x)=f(x)-lg(x)$ 来代替 $f(x)$，就可以化为 $\tilde{l}=0$ 的情形：

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right)=0.$$

如果对这情形证明了

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}=0,$$

那么立即就得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}+l\right)=l.$$

其次，为了证明

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

只须证明

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=l;$$

同样，为了证明

$$\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

只须证明

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

于是，在两定理的证明中，只须考虑以下四种极限过程：

$$x\to a-,\quad x\to a+\qquad (a\in \mathbf{R})$$

及

$$x\to -\infty,\qquad x\to +\infty.$$

对这四种极限过程，定理的证明是完全类似的．我们将只对 $x\to +\infty$的情形详细写出证明，并将在注记中简要地叙述其他三种情形下证明应作的改变．

在正式开始证明之前，再说几句话介绍将要采取的办法（就极限过程 $x\to+\infty$而言）．对于$(\Delta,+\infty)$中的任意两个不同的点 $x$ 和 $y$ 用柯西中值定理可得

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

这式子的左边可以改写成

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(y)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(y)}{g(x)}}.$$

于是我们得到

$$(1.2)\qquad \frac{f(x)}{g(x)}=\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(y)}{g(x)},$$

这里 $\xi$ 介于 $x$ 和 $y$ 之间. 我们将利用这一式子来考察 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限状况.

**定理 1 的证明** 考虑这样的情形

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l=0 \quad (\infty, -\infty, +\infty).$$

我们来证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad (\infty, -\infty, +\infty).$$

根据所设条件, 对于任意的 $\varepsilon>0$ ($E>0$), 存在 $\Delta>0$, 使得 $z\in(\Delta, +\infty)$ 时

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

(对 $l=\infty$ 的情形:

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|>2E+1;$$

对 $l=+\infty$ 的情形:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}>2E+1;$$

对 $l=-\infty$ 的情形:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}<-2E-1).$$

对任意取定的 $x\in(\Delta, +\infty)$, 因为

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0,$$

所以可取 $y\in(x, +\infty)$ 充分大, 以使得

$$\frac{1}{2}<1-\frac{g(y)}{g(x)}<\frac{3}{2},$$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(<\frac{1}{2}\right).$$

于是从(1.2)式可得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(对 $l=\infty$的情形：

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\geqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(2E+1)-\frac{1}{2}=E;$$

对于 $l=+\infty$的情形：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(2E+1)-\frac{1}{2}=E;$$

对于 $l=-\infty$的情形：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(-2E-1)+\frac{1}{2}=-E).$$

这就完成了所述情形下定理 1 的证明. □

**注记** 对于 $x\to a-$，$x\to a+$，或者 $x\to-\infty$ 的情形，上述定理 1 的证明所需要作的改变主要是：把 $x\in(\Delta,+\infty)$ 换成 $x\in(a-\delta,a)$，$x\in(a,a+\delta)$，或者 $x\in(-\infty,-\Delta)$；把 $y\in(x,+\infty)$ 换成 $y\in(x,a)$，$y\in(a,x)$，或者 $y\in(-\infty,x)$.

**定理 2 的证明** 与定理 1 的证明十分类似，我们可以简要地予以说明. 首先取$\Delta$充分大，使得 $z\in(\Delta,+\infty)$时有

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

(或对 $l=\infty,+\infty,-\infty$ 情形的相应不等式). 对任意取定的 $y\in(\Delta,+\infty)$, 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0,$$

所以可取 $x\in(y,+\infty)$充分大, 使得

$$\frac{1}{2}<1-\frac{g(y)}{g(x)}<\frac{3}{2},$$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(<\frac{1}{2}\right).$$

于是, 利用(1.2) 式就可得到

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(或对 $l=\infty,+\infty,-\infty$ 情形的相应估计). 这样, 我们证明了定理 2. □

为了求某些未定式的极限, 有时需要接连几次运用洛必达法则. 例如, 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式. 为了确定它的值,我们需要求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的极限. 如果这仍是未定式, 我们又需要求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$的极限. ……这样继续下去, 直至求得某个极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$. 我们把这过程写成一串等式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

计算过程中应注意随时约分化简或者分离出容易求极限的因式，以免越算越繁．若化简后已不再是未定式了，就可按通常的办法求极限．

**例1** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

**例2** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$.

**解** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{kx^{k-1}}{e^x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k!}{e^x}=0.$

**例3** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}(a>0)$.

**解** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{ax^a}=0.$

**例4** 设 $f(x)$在 $a$ 点有二阶导数 $f''(a)$，试证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

**证明** 根据假定，$f$ 在 $a$ 点有二阶导数，因而在 $a$ 点邻近应该具有一阶导数．按照洛必达法则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f'(a)+f'(a)]=f'(a).$$

**例5** 考察分段表示的函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & 如果\ x>0,\\ 0, & 如果\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

试证 $f$ 在$\mathbf{R}$上可导任意多次.

**证明** 显然函数 $f$ 在 $x\neq 0$ 处可导任意多次. 只须考察这函数在 $x=0$ 处的可导性. 首先注意到

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{e^{t}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$$

因此

$$f'(0)=0.$$

我们求得

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & 如果\ x>0,\\ 0, & 如果\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

假设

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & 如果\ x>0,\\ 0, & 如果\ x\leqslant 0\end{cases}$$

(这里 $P_{2k}(u)$是变元 $u$ 的 $2k$ 次多项式). 于是, 对于 $x>0$ 有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)-P'_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=P_{2(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

我们来考察 $f$ 在 $x=0$处的 $k+1$ 阶导数．利用洛必达法则可以求得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f^{(k+1)}(x)}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{P_{2(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

另外显然有

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=0.$$

这样，我们证明了

$$f^{(k+1)}(0)=0.$$

根据归纳原理，我们已经证明了：函数 $f$ 在R上可导任意多次，并且

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{2n}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

**注记** 设 $f$ 是例 5 中所定义的函数，我们来考察函数

$$\varphi(x)=f(1-x^2)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{如果}|x|<1,\\ 0, & \text{如果}|x|\geqslant 1.\end{cases}$$

由例 5 可知，这函数也在R上可导任意多次．函数 $\varphi$ 的图形中段隆起（$|x|<1$ 时 $\varphi(x)>0$），两侧水平展开（$|x|\geqslant 1$时 $\varphi(x)=0$）．人们把这样的函数叫做钟形函数或隆起函数（bump function）．像这样的无穷次可微函数在数学的许多分支中都有重要应用．针对不同的具体情形，还可构造满足特定要求的钟形函数．例如，我们可以构造一个无穷次可微函数 $\psi$，要求它满足这样一些条件（请参看图8-1）：

$$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

$$\psi(x)=1,\quad \text{如果 } |x|<1,$$

$$\psi(x)=0, \text{ 如果 } |x|\geqslant 2.$$

读者容易验证，由下式定义的函数 $\psi$ 就满足我们的要求：

$$\psi(x)=\frac{f(4-x^2)}{f(4-x^2)+f(x^2-1)}.$$

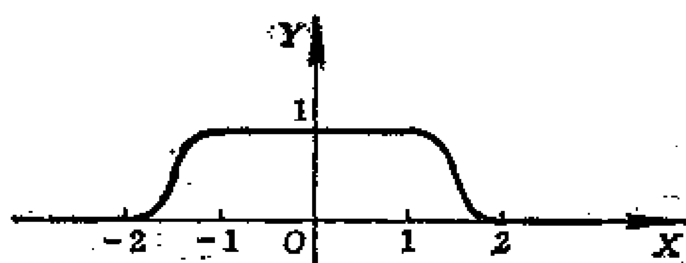



图 8-1

### 1.d 其他类型未定式的定值法

其他类型的未定式，一般都能转化为$\frac{0}{0}$型未定式或者$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，因而在一定的条件下也能利用洛必达法则来定值.

**0·∞型未定式** 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则极限式 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$是$0\cdot\infty$型未定式．我们可以把它写成

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

这就化成了$\frac{0}{0}$型未定式.

**∞－∞型未定式** 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$与$\lim\limits_{x\to a}g(x)$是同号的无穷大，则极限式 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$是$\infty-\infty$型未定式．我们可以把它写成

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

这也化成了$\frac{0}{0}$型未定式.

**$1^\infty$, $0^0$ 和 $\infty^0$ 型未定式** 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, 则极限式 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ 是$1^\infty$型未定式. 我们可以把它写成

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}.$$

于是, 问题归结为求$0\cdot\infty$型未定式的极限:

$$\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x).$$

对于$0^0$和$\infty^0$型未定式, 也可作类似的讨论.

请注意, 为了把其他形式的未定式转化成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式, 需要根据实际情况灵活地进行变换. 如果死套上面所说的一般程序, 有时会弄得十分繁琐.

**例 6** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

**解** 这是一个$\infty-\infty$型未定式, 它容易转化成$\frac{0}{0}$型未定式:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\right).$$

前一因式的极限为

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2.$$

为求得后一因式的极限, 我们用洛必达法则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}=\frac{1}{3}.$$

于是，所求的极限为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\frac{2}{3}.$$

**例 7** 我们把

$$M_t(x)=\left(\frac{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

称为是 $n$ 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $t$ 次方平均数，并记

$$G(x)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},$$

$$M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

$$m=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

试证

(i) $\lim\limits_{t\to 0}M_t(x)=G(x)$,

(ii) $\lim\limits_{t\to+\infty}M_t(x)=M$,

(iii) $\lim\limits_{t\to-\infty}M_t(x)=m$.

**证明** (i) 中的极限是 $1^\infty$ 型的. 通过取对数就可以把它转化成$\frac{0}{0}$型：

$$\ln M_t(x)=\frac{\ln(x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t)-\ln n}{t}.$$

利用洛必达法则，我们求得

$$\lim_{t\to 0}\ln M_t(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(x_1^t+\cdots+x_n^t)-\ln n}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{x_1^t\ln x_1+\cdots+x_n^t\ln x_n}{x_1^t+\cdots+x_n^t}$$

$$=\frac{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}{n}=\ln G(x),$$

$$\lim_{t\to 0}M_t(x)=\lim_{t\to 0}e^{\ln M_t(x)}=e^{\ln G(x)}=G(x);$$

(ii) 不妨设

$$x_1\leqslant\cdots\leqslant x_k<x_{k+1}=\cdots=x_n=M,$$

于是

$$\lim_{t\to+\infty}\ln M_t(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(x_1^t+\cdots+x_n^t)-\ln n}{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{x_1^t\ln x_1+\cdots+x_n^t\ln x_n}{x_1^t+\cdots+x_n^t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^t\ln x_1+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_n}\right)^t\ln x_n}{\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^t+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_n}\right)^t}$$

$$=\frac{(n-k)\ln M}{n-k}=\ln M,$$

$$\lim_{t\to+\infty}M_t(x)=M.$$

(iii) 不妨设

$$m=x_1=\cdots=x_h<x_{h+1}\leqslant\cdots\leqslant x_n,$$

于是

$$\lim_{t\to-\infty}\ln M_t(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{\ln(x_1^t+\cdots+x_n^t)-\ln n}{t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{x_1^t\ln x_1+\cdots+x_n^t\ln x_n}{x_1^t+\cdots+x_n^t}$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^t\ln x_1+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^t\ln x_n}{\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^t+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^t}$$

$$=\frac{h\ln m}{h}=\ln m,$$

$$\lim_{t\to-\infty}M_t(x)=m.\qquad\square$$

## §2 泰勒 (Taylor) 公式

在第四章 § 3 内，我们已经考察了无穷小增量公式与有限增

量公式．这些公式借助于线性式(即一次多项式)研究可导函数．在这一节里，我们推广上述公式，用 $n$ 次多项式来研究可导 $n$ 次的函数．

### 2.a 带小 $o$ 余项的泰勒公式

带小 $o$ 余项的泰勒公式是无穷小增量公式的推广．设函数 $f$ 在 $U(a,\eta)$ 有定义，在 $a$ 点可导，则据无穷小增量公式，存在一次多项式

$$A_0+A_1(x-a)$$
$$(A_0=f(a),\qquad A_1=f'(a))$$

使得

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+o(x-a).$$

我们提出这样的问题：如果 $f$ 在 $a$ 点 $n$ 次可导，那么能否有 $n$ 次多项式

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^n$$

使得

$$f(x)=P(x)+o((x-a)^n). \tag{2.1}$$

我们还问道：这样的 $n$ 次多项式 $P(x)$ 究竟能有多少个？

后一问题的解答比较简单．假设

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^n$$

和

$$Q(x)=B_0+B_1(x-a)+\cdots+B_n(x-a)^n$$

分别使得

$$f(x)=P(x)+o((x-a)^n)$$

和

$$f(x)=Q(x)+o((x-a)^n),$$

那么

$$P(x)=Q(x)+o((x-a)^n),$$

即

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}&A_0+A_1(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^n\\&=B_0+B_1(x-a)+\cdots\\&\quad+B_n(x-a)^n+o((x-a)^n).\end{aligned}$$

在这式中让 $x\to a$ 即得到

$$A_0=B_0.$$

从 (2.2) 式两边消去相等的项 $A_0=B_0$，再除以 $x-a$，我们得到

$$\begin{aligned}&A_1+A_2(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^{n-1}\\&=B_1+B_2(x-a)+\cdots\\&\quad+\cdots+B_n(x-a)^{n-1}+o((x-a)^{n-1}).\end{aligned}$$

再让 $x\to a$，又可得到

$$A_1=B_1.$$

继续这样的手续，最后得到

$$A_i=B_i,\qquad i=0,1,2,\cdots,n.$$

我们证明了：满足 (2.1) 式的 $n$ 次多项式

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^n$$

如果存在就必定是唯一的.

下面再来探讨这样的多项式 $P(x)$ 的存在性问题. 为此，先证明两个引理.

**引理 1** 设 $\varphi(x)$ 在 $U(a,\eta)$ 有定义，并且在 $a$ 点有 $n$ 阶导数. 如果

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0,$$

那么

$$\varphi(x)=o((x-a)^n).$$

**证明** 因为 $\varphi(x)$ 在 $a$ 点有 $n$ 阶导数，所以它在 $a$ 点邻近应该有直到 $n-1$ 阶的导数. 我们可以用洛必达法则求以下极限：

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{n(x-a)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots 2(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{1}{n!}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)-\varphi^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(a)=0.$$

这证明了

$$\varphi(x)=o((x-a)^n). \qquad \square$$

**引理 2** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $U(a,\eta)$ 有定义，在 $a$ 点有 $n$ 阶导数．如果

$$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a), \qquad k=0,1,\cdots,n,$$

那么

$$f(x)=g(x)+o((x-a)^n).$$

**证明** 函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ 满足引理 1 中的条件，因而

$$\varphi(x)=o((x-a)^n),$$

即

$$f(x)=g(x)+o((x-a)^n). \qquad \square$$

现在，我们来选择多项式

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+\cdots+A_n(x-a)^n,$$

使它满足引理 2 中关于 $g(x)$ 的条件，即要求：

$$A_0=P(a)=f(a),$$
$$A_1=P'(a)=f'(a),$$
$$2A_2=P''(a)=f''(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k!A_k=P^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n!A_n = P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

于是得到

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

我们把这样的多项式称为是函数 $f$ 在 $a$ 点的 $n$ 次*泰勒多项式*.

综合上面的讨论，我们实际上已经证明了以下的重要定理：

**定理1** 设函数 $f$ 在 $U(a,\eta)$ 有定义，在 $a$ 点有 $n$ 阶导数，那么

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

这定理中的表示式称为带小 $o$ 余项的泰勒公式，又称带皮亚诺（Peano）余项的泰勒公式．特别地，当 $a=0$ 时，我们称相应的表示式为带小 $o$ 余项的马克劳林（Maclaurin）公式或者带皮亚诺余项的马克劳林公式.

**例1** 试求 $f(x)=e^x$ 的马克劳林展式.

**解** 我们有

$$f^{(k)}(x) = e^x, \qquad f^{(k)}(0) = 1 \qquad (k=0,1,\cdots,n),$$

于是

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

**例2** 求函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的马克劳林展式.

**解** 我们有：

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \qquad f^{(2k)}(0) = 0,$$

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\quad k=0,1,2,\cdots;$$

$$g^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),\qquad g^{(2k)}(0)=(-1)^k,$$

$$g^{(2k+1)}(0)=0,\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

于是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$$

**例 3** 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的马克劳林展式.

**解** 我们有

$$f(x)=\ln(1+x),\qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f'(0)=1,$$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$(k=2,3,\cdots).$$

于是得出

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

**例 4** 求函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的马克劳林展式.

**解** 计算导数得

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

我们引入记号

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

用这记号可以把 $(1+x)^\alpha$ 的马克劳林展式写成更紧凑的形式：

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n).$$

为了求函数 arctg$x$ 和 arcsin$x$ 的马克劳林展式，我们将要用到以下引理.

**引理 3** 设函数 $f(x)$ 在 $U(0,\eta)$ 有定义，在 0 点 $n$ 次可导，如果

$$f'(x)=A'_0+A'_1x+\cdots+A'_{n-1}x^{n-1}+o(x^{n-1})$$
$$(A'_0,A'_1,\cdots,A'_{n-1}\in \mathbf{R}),$$

那么

$$f(x)=f(0)+A'_0x+\frac{A'_1}{2}x^2+\cdots+\frac{A'_{n-1}}{n}x^n+o(x^n).$$

**证明** 在所给的条件下，应该有

$$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+o(x^{n-1}).$$

因为函数 $f'(x)$ 的马克劳林展式是唯一的，所以必须有

$$f'(0)=A'_0,\ f''(0)=A'_1,\ f'''(0)=2A'_2,\ \cdots$$
$$f^{(n)}(0)=(n-1)!A'_{n-1}.$$

于是，根据定理 1，我们得到

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=f(0)+A_0'x+\frac{A_1'}{2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{A_{n-1}'}{n}x^n+o(x^n). \qquad \square$$

**例 5** 求函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x$ 的马克劳林展式.

**解** 我们知道，函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x$ 在 0 点可导任意多次，并且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

因而

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}).$$

**例 6** 求函数 $f(x)=\arcsin x$ 的马克劳林展式.

**解** 我们知道，$f(x)=\arcsin x$ 在 0 点可导任意多次，$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. 利用例 4 中的展式可以得到

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n+o(x^{2n})$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3!!}{4!!}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

这里我们引用了“双阶乘符号”——$m!!$，它定义如下

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1),$$

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n).$$

利用引理3，我们求得 $f(x)=\arcsin x$ 的马克劳林展式如下：

$$f(x)=x+\frac{1}{3\cdot 2}x^3+\frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5+\cdots$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

**例7**　在原点邻近，试将函数 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 展开到4阶项．

**解**　因为奇函数的导函数是偶函数，偶函数的导函数是奇函数，并且任何奇函数在原点的值都是0，所以容易看出

$$f(0)=f''(0)=f^{(4)}(0)=0.$$

尚须求出函数 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 在原点的1，3阶导数．计算得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x)=\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x},$$

$$f'(0)=1,\qquad f'''(0)=2.$$

于是，我们得到

$$\mathrm{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4).$$

**例8**　试将函数 $f(x)=e^{\cos x}$ 在原点展开到4阶项．

**解**　我们有

$$e^{\cos x}=e\cdot e^{\cos x-1}.$$

$$=e\left[1+(\cos x-1)+\frac{1}{2}(\cos x-1)^2+o((\cos x-1)^2)\right]$$

$$=e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2\right)\right]$$

$$=e\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]$$

$$=e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^4).$$

**例9** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}x-\arcsin x}$.

**解** 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-\left(x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{\left(x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}=1.$$

**例10** 求 $\lim n^2\left(1-n\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

**解** 我们有

$$\lim n^2\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)=\lim n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim n^3\left\{\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]\right\}$$

$$= \lim \left[\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{6}.$$

**例11** 求 $K = \lim \dfrac{e^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$

**解** 我们有

$$\lim \ln \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left[n - n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim n^2 \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim n^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim \left[\frac{1}{2} + o(1)\right] = \frac{1}{2}$$

因而

$$K = \lim e^{\ln \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

作为带小 $o$ 余项的泰勒公式的一个应用，我们来推导极值的第三充分条件.

**引理 4** 设 $A \neq 0$，并且

$$\varphi(h) = Ah^n + o(h^n),$$

则对充分小的 $h$，应该 $\varphi(h)$ 与 $Ah^n$ 同号.

**证明** 因为

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{Ah^n} = 1,$$

所以对绝对值充分小的 $h \neq 0$，应有 $\dfrac{\varphi(h)}{Ah^n} > 0$，因而 $\varphi(h)$ 与

$Ah^n$ 有相同的符号. □

**定理（极值的第三充分条件）** 设函数 $f$ 在 $U(x_0,\eta)$ 有定义，在 $x_0$ 点可导 $n$ 次，并且

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则有

(i) 如果 $n$ 是偶数，那么函数 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格极值——当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格极小值，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时 $f$ 在 $x_0$ 点取得严格极大值；

(ii) 如果 $n$ 是奇数，那么 $x_0$ 不是函数 $f$ 的极值点.

**证明** 我们写出函数 $f'(x)$ 在 $x_0$ 点的泰勒展式：

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+o((x-x_0)^{n-1}).$$

由引理 4 可知，对充分接近 $x_0$ 的 $x$，$f'(x)$ 与 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$ 有相同的符号. 因而

(i) 如果 $n$ 是偶数，那么在 $x_0$ 点的左右两侧导函数 $f'(x)$ 有相反的符号，因而函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点取得严格极值（$f^{(n)}(x_0)>0$ 时是严格极小值，$f^{(n)}(x_0)<0$ 时是严格极大值）；

(ii) 如果 $n$ 是奇数，那么在 $x_0$ 的两侧导函数 $f'(x)$ 有相同的符号，因而 $x_0$ 点不是函数 $f(x)$ 的极值点. □

### 2.b 有限增量的泰勒公式

带小 $o$ 余项的泰勒公式只适宜于讨论当 $x$ 趋近于 $a$ 时函数的渐近状况. 为了研究函数在较大范围内的性质，需要引入有限增量的泰勒公式. 我们把 $n$ 次可导的函数 $f$ 表示成

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x),$$

这里

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

是函数 $f$ 在 $a$ 点的泰勒多项式，而

$$R_{n+1}(x)=f(x)-P_n(x)$$

称为是泰勒公式的余项．在一定的条件下，我们可以把余项 $R_{n+1}(x)$ 表示成易于估计的形式．

**引理5** 设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $I$ 有直到 $n$ 阶的连续导数，在 $I^{\circ}$ 有 $n+1$ 阶导数，$a,x\in I$．如果

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0,$$

那么存在介于 $a$ 和 $x$ 之间的实数 $\xi$，使得

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**证明** 记 $\psi(x)=(x-a)^{n+1}$，则我们有

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\cdots=\varphi^{(n)}(a)=0,$$

$$\psi(a)=\psi'(a)=\cdots=\psi^{(n)}(a)=0.$$

对

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}$$

用柯西中值定理，可以得到

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}.$$

再对

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}=\frac{\varphi'(\xi_1)-\varphi'(a)}{\psi'(\xi_1)-\psi'(a)}$$

用柯西中值定理，又可得到

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}=\frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}.$$

继续这样的手续，最后得到

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}=\frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}=\cdots$$

$$=\frac{\varphi^{(n)}(\xi_n)}{\psi^{(n)}(\xi_n)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}.$$

即

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \qquad \square$$

**定理 2**（带拉格朗日余项的泰勒公式） 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有直到 $n$ 阶的连续导数，在 $I^\circ$ 有 $n+1$ 阶导数，$a,x\in I$，则

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

换句话说就是：泰勒公式的余项 $R_{n+1}(x)$ 可以表示成

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

——这称为拉格朗日型余项.

**证明** 对函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

应用引理 5 即得证. $\square$

**注记** 与拉格朗日中值定理那里的讨论类似，如果令

$$\theta=\frac{\xi-a}{x-a},$$

那么

$$\xi=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

于是拉格朗日型余项可以写成

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

利用分部积分法也能导出泰勒公式余项的一种表示——余项的积分表示。我们先证明以下引理，它是牛顿-莱布尼兹公式的推广.

**引理 6** 设函数 $\psi(t)$ 在 $[0,1]$ 上有 $n+1$ 阶连续导数，则

$$\psi(1)=\psi(0)+\frac{\psi'(0)}{1!}+\cdots+\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}$$
$$+\frac{1}{n!}\int_0^1\psi^{(n+1)}(t)(1-t)^n\mathrm{d}t.$$

**证明** 根据牛顿-莱布尼兹公式，我们有

$$\psi(1)=\psi(0)+\int_0^1\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

对上式做分部积分 $n$ 次，我们得出

$$\begin{aligned}\psi(1)&=\psi(0)-\int_0^1\psi'(t)\mathrm{d}(1-t)\\
&=\psi(0)+\psi'(0)+\int_0^1\psi''(t)(1-t)\mathrm{d}t\\
&=\psi(0)+\psi'(0)-\frac{1}{2}\int_0^1\psi''(t)\mathrm{d}(1-t)^2\\
&=\psi(0)+\psi'(0)+\frac{1}{2}\psi''(0)+\frac{1}{2}\int_0^1\psi'''(t)(1-t)^2\mathrm{d}t\\
&=\psi(0)+\psi'(0)+\frac{1}{2}\psi''(0)-\frac{1}{3!}\int_0^1\psi'''(t)\mathrm{d}(1-t)^3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=\psi(0)+\frac{\psi'(0)}{1!}+\frac{\psi''(0)}{2!}+\cdots\\
&\quad+\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^1\psi^{(n+1)}(t)(1-t)^n\mathrm{d}t.\end{aligned}$$ □

**定理 3** (带积分余项的泰勒公式) 设函数 $f$ 在区间 $I$ 有

$n+1$ 阶连续导数，$a,x\in I$，则

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(x-a))\mathrm{d}t.$$

换句话说，在这种情形下，泰勒公式的余项表示成

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(x-a))\mathrm{d}t$$

——这称为积分形式的余项.

**证明** 考察 $t$ 的函数

$$\psi(t)=f(a+t(x-a)).$$

逐次对 $t$ 求导数得

$$\psi'(t)=f'(a+t(x-a))(x-a),$$
$$\psi''(t)=f''(a+t(x-a))(x-a)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi^{(k)}(t)=f^{(k)}(a+t(x-a))(x-a)^k$$
$$(k=1,2,3,\cdots).$$

对 $\psi(t)$ 用引理 6 就得到所求证的公式. □

在上一定理中，对余项

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(x-a))\mathrm{d}t$$

用积分中值定理可得

$$R_{n+1}(x)=\frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

这种形式的余项称为柯西型余项. 我们得到了带柯西型余项的泰勒公式：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+\frac{(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}$$

$$(0\leqslant\theta\leqslant1).$$

**例12** 对于 $f(x)=e^x$，我们有马克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),$$

这里的余项 $R_{n+1}(x)$ 可以表示为拉格朗日形式

$$R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1),$$

或者柯西形式

$$R_{n+1}(x)=\frac{(1-\bar{\theta})^n}{n!}e^{\bar{\theta}x}x^{n+1}\quad(0\leqslant\bar{\theta}\leqslant1),$$

或者积分形式

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^ne^{tx}\mathrm{d}t.$$

作为泰勒公式的一个应用，我们来证明 $e$ 是无理数．

**例13** 试证 $e$ 是无理数．

**证明**（用反证法） 假设 $e$ 是有理数，它表示成分母为 $N$ 的分数，取 $n>\max\{N,3\}$．根据函数 $e^x$ 的拉格朗日形式的泰勒公式，我们有

$$e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}=\frac{e^\theta}{(n+1)!},$$

这里 $0<\theta<1$，因而 $1<e^\theta<3$．上式两边乘以 $n!$ 得到

$$n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)=\frac{e^\theta}{n+1}.$$

但上式左边是整数，而右边

$$0<\frac{e^\theta}{n+1}<1.$$

这一矛盾说明 $e$ 不能是有理数． □

**例14** 对于函数 $f(x)=\sin x$，我们有马克劳林公式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}+R_{2n+1}(x),$$

这里的余项可以表示为

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{(1-\bar{\theta})^{2n}\cos\bar{\theta}x}{(2n)!}x^{2n+1}\quad(0\leqslant\bar{\theta}\leqslant1),$$

或者

$$R_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1(1-t)^{2n}\cos tx\,dt.$$

**例15** 对于函数$f(x)=\cos x$，我们有马克劳林公式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x).$$

这里的余项可以表示为

$$R_{2n+2}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}\quad(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{2n+2}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(1-\bar{\theta})^{2n+1}\cos\bar{\theta}x}{(2n+1)!}x^{2n+2}\quad(0\leqslant\bar{\theta}\leqslant1),$$

或者

$$R_{2n+2}(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}\int_0^1(1-t)^{2n+1}\cos tx\,dt.$$

**例16** 对于函数$f(x)=\ln(1+x)$，我们有马克劳林展式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

这里的余项可以表示为

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\quad(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{(1-\tilde{\theta})^n x^{n+1}}{(1+\tilde{\theta}x)^{n+1}}\quad(0\leqslant\tilde{\theta}\leqslant 1),$$

或者表示为积分形式.

**例17** 对于函数$f(x)=(1+x)^a(x>-1)$，我们有马克劳林展式

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

这里的余项可以表示为

$$R_{n+1}(x)=\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{n+1}(x)=\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}(1-\tilde{\theta})^n(1+\tilde{\theta}x)^{a-n-1}x^{n+1}$$

$$(0\leqslant\tilde{\theta}\leqslant 1),$$

或者表示为积分形式.

### 2.c 泰勒级数

设函数 $f$ 在区间 $I$ 可求导任意多次，$a,x\in I$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}$，我们可以写出展开式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_{n+1}(x).$$

如果对取定的 $x$，当 $n\to+\infty$时余项是无穷小

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0,$$

那么就有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(x).$$

我们引入记号$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$表示上式左端的极限，即规定

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

于是，在$\lim\limits_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0$的条件下，就有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

这时我们说函数 $f(x)$ 展成了泰勒级数，或者说泰勒级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ 收敛于 $f(x)$.

特别地，$a=0$情形的泰勒级数，又称为马克劳林级数。

下面的引理给出了保证

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0$$

的一个充分条件.

**引理7** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 可导任意多次，$a\in I$,

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

如果存在正实数 $H,Q$ 和自然数 $N$，使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant HQ^n,\qquad \forall x\in I,\ n>N,$$

那么就有

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0,\quad \forall x\in I,$$

即函数 $f$ 在区间 $I$ 上可以展成泰勒级数：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

特别地，如果存在正实数 $H$ 和自然数 $N$，使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant H,\qquad \forall x\in I,\ n>N,$$

那么函数 $f$ 在区间 $I$ 上可以展开成泰勒级数.

**证明** 把余项表示成拉格朗日形式，可得如下的估计：

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$

$$\leqslant H\frac{(Q|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(\forall x\in I,\ n\geqslant N).$$

由此易得

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0. \qquad \square$$

**例18** 根据引理7，我们可以在 $(-\infty,+\infty)$ 把函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 展开成马克劳林级数：

$$\sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

**例19** 在任何区间$[-\Delta,\Delta]$，函数 $f(x)=e^x$ 满足条件

$$|f^{(n)}(x)|=|e^x|\leqslant e^{\Delta}.$$

根据引理7，我们可以把函数 $f(x)=e^x$ 展开成马克劳林级数

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

**例20** 我们来估计函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的马克劳林公式的余项．对于$0\leqslant x\leqslant 1$，利用余项的拉格朗日形式可得

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

对于$-1<x<0$，利用余项的柯西形式可得

$$|R_{n+1}(x)|=\left|(-1)^n\frac{(1-\bar\theta)^n}{(1+\bar\theta x)^{n+2}}x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{1-\bar\theta}{1+\bar\theta x}\right)^n\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

（因为 $x>-1$时，$1+\bar\theta x\geqslant1-\bar\theta$）。对于 $0\leqslant x\leqslant1$和 $-1<x<0$两种情形，由以上估计都容易证明

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0.$$

因而，对于 $-1<x\leqslant1$，函数 $f(x)=\ln(1+x)$可以展成马克劳林级数

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

特别地，对于 $x=1$，我们得到 $\ln 2$ 的级数表示式

$$\ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

**例21** 考察函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的马克劳林级数展式，这里的 $\alpha$ 是任意实数(不妨设 $\alpha$ 不是0或自然数)．为此，写出函数 $f(x)$ 的马克劳林公式的柯西型余项：

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^{n+1}.$$

我们来证明：对于 $x\in(-1,1)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0.$$

为此，作如下的估计：

首先，对任何 $x\in(-1,1)$ 都有

$$0<1+\theta x<2,$$

$$0\leqslant\frac{1-\theta}{1+\theta x}\leqslant1;$$

其次，对任何取定的 $x\in(-1,1)$，存在 $q\in(0,1)$，使得

$$|x|<q<1,$$

于是，又存在$N\in\mathbf{N}$，使得 $n>N$ 时

$$\left|\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x\right|<q.$$

综合以上讨论，我们得到

$$\begin{aligned}|R_{n+1}(x)|&=\left|\alpha(1-\alpha)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n|x|^{n+1}\\&\leqslant 2^{\alpha-1}\left|\alpha(1-\alpha)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)\right||x|^{N+1}\\&\quad\cdot\left|\left(1-\frac{\alpha}{N+1}\right)x\right|\cdots\left|\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x\right|\\&\leqslant 2^{\alpha-1}\left|\alpha(1-\alpha)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)\right|q^{n+1}.\end{aligned}$$

这证明了：对于任何 $x\in(-1,1)$ 都有

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x)=0,$$

因而对这样的 $x$ 有

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha&=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\\&=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots\\&\quad+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\end{aligned}$$

——这展式可以看成是二项式定理的推广.

**注记** 一个函数的泰勒级数并不一定总是收敛于这函数自身. 请看上节例 5 中的函数：

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

这函数在原点的各阶导数都等于 0：

$$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ \cdots,\ f^{(k)}(0)=0,\ \cdots.$$

因而

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\equiv 0,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\equiv 0.$$

对于这样的函数 $f$，只要 $x>0$，就有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\neq f(x).$$

## §3 函数的凹凸与拐点

### 3.a 凸函数

设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义．我们来考察它的图形：$y=f(x)$ $(x\in I)$．如果这图形上任意两点 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 之间的曲线段都在联结这两点的弦的下方（这意味着图形是向下方凸出的），那么我们就说 $f$ 是一个*凸函数*．类似地可以定义凹函数（即图形向上方凸出的函数）．

把上面的几何描述用式子表示出来，就得到关于凸函数（凹函数）的正式定义．我们注意到，联结函数图形 $y=f(x)$ 上两点

$$P_1=(x_1,f(x_1))\ 和\ P_2=(x_2,f(x_2))$$

的弦可以表示为参数方程

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1))\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

而函数图形介于 $P_1,P_2$ 两点间的曲线段可以表示为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=f(x)=f(x_1+t(x_2-x_1))\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

条件"图形 $y=f(x)$ 介于 $P_1,P_2$ 两点间的曲线段在联结这两点

的弦的下方”可以用式子表示为

$$f(x_1+t(x_2-x_1))\leqslant f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1))$$
$$(\forall t\in[0,1])$$

或者

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$
$$(\forall t\in[0,1]).$$

如果记 $\alpha_1=1-t$，$\alpha_2=t$，那么上式可以写成更对称的形式

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$
$$(\alpha_1,\alpha_2\geqslant0,\ \alpha_1+\alpha_2=1).$$

**定义**（凸函数） 设函数 $f$ 在区间 $I$ 有定义. 如果对任意的 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，和任意的 $\alpha_1,\alpha_2\geqslant0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$，都有

$$(3.1)\qquad f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2),$$

那么我们就说函数 $f$ 在区间 $I$ 是（下）凸的.

如果对任意的 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，和任意的 $\alpha_1,\alpha_2>0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$，上面的不等式（3.1）总是严格的，那么我们就说函数 $f$ 在区间 $I$ 是严格（下）凸的.

**注记** 将上面定义中（3.1）式的不等号反过来，就得到了凹函数的定义.

下面的定理列举了凸函数定义的若干等价的陈述方式.

**定理1** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有定义，则以下各项陈述互相等价：

（1）$f$ 在区间 $I$ 是（下）凸函数；

（2）对任何 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，和介于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间的任何 $x$，都有

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2);$$

（3）对任何 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，和介于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间的任何 $x$，都有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0;$$

(4) 对任何 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 和介于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间的任何 $x$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x};$$

(5) 对任何 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 和介于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间的任何 $x$, 都有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

如果把 (1) 中的"(下) 凸"改成"严格 (下) 凸", 并把(2), (3), (4)和(5)中的各个不等号改成严格的不等号, 那么修改后的各条陈述也仍然是互相等价的.

**证明** 我们循以下路线证明所列的各条陈述是互相等价的:

"(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒
(4) ⇒ (5) ⇒ (1)".

先来证明"(1) ⇒ (2)". 对于介于 $x_1$ 和 $x_2$ 之间的 $x$, 我们记

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

显然有

$$\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$
$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

由凸函数的定义可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &\leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \end{aligned}$$

其次证明“(2) $\Rightarrow$ (3)”．以 $(x_2-x_1)$ 乘(2)中的不等式可得：

$$(x_2-x)f(x_1)-(x_2-x_1)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geqslant 0.$$

这就是

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

再来证明“(3) $\Rightarrow$ (4)”．　我们有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 0 & x-x_1 & f(x)-f(x_1) \\ 0 & x_2-x_1 & f(x_2)-f(x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) -(x_2-x_1)(f(x)-f(x_1)),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1-x_2 & f(x_1)-f(x_2) \\ 0 & x-x_2 & f(x)-f(x_2) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x)) -(x_2-x)(f(x_2)-f(x_1)).$$

利用条件 (3) 就得到

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

“(4) $\Rightarrow$ (5)”是显然的．我们最后来证明“(5) $\Rightarrow$ (1)”．　设 $x_1,x_2\in I, x_1<x_2$，$\alpha_1,\alpha_2\geqslant 0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$．我们记

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)x_2$$
$$=(1-\alpha_2)x_1+\alpha_2x_2.$$

显然有

$$\alpha_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\qquad \alpha_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

（5）中的不等式

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

可以改写成

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

这就是

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).\qquad\square$$

**注记** 我们来考察凸函数 $y=f(x)$ 图形上的任意三点：

$$P_1(x_1,f(x_1)),\ P(x,f(x)),\ P_2(x_2,f(x_2)),$$

这里设 $x_1<x<x_2$. 上面定理中的 (4) 意味着：

$$\overline{P_1P}\text{的斜率}\leqslant\overline{P_1P_2}\text{的斜率}\leqslant\overline{PP_2}\text{的斜率}.$$

——这在几何上正好表示函数的图形向下方凸出（参看图8-2）.

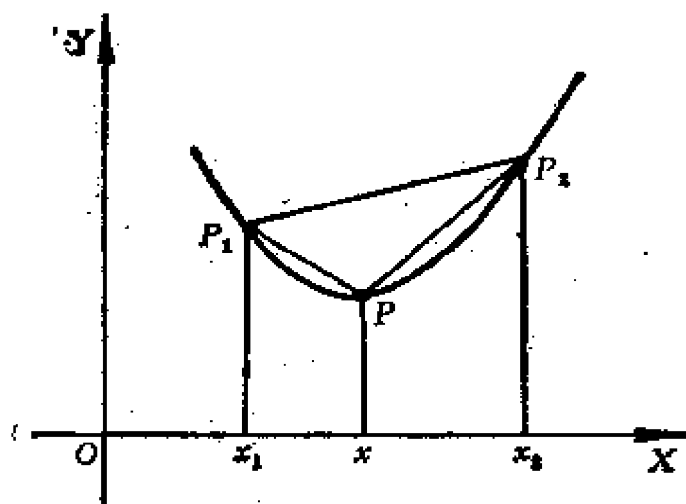



图 8-2

人们通常把下面定理中的不等式叫做颜森（Jensen）不等式.

**定理2** 设 $f$ 在区间 $I$ 是凸函数. 则对于任何 $x_1,\cdots,x_m\in I$ 和

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m>0,\qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_m=1,$$

都有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_mf(x_m),$$

即

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_if(x_i).$$

如果 $f$ 是严格凸函数，$x_1,\cdots,x_m$ 不全相同，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m>0$，$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=1$，那么

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_ix_i\right)<\sum_{i=1}^{m}\alpha_if(x_i).$$

**证明** 用归纳法. 对于 $m=2$，颜森不等式显然成立（这就是凸函数的定义）. 设对于 $m=k\geqslant2$不等式成立. 我们来考察 $m=k+1$ 的情形. 设 $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\in I$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}>0$，并且

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}=1.$$

记

$$\lambda_i=\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}},\quad i=1,2,\cdots,k,$$

则有

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_k>0,\quad \lambda_1+\cdots+\lambda_k=1,$$

和

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k\in I.$$

于是

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k+\alpha_{k+1}x_{k+1})\\
&\quad=f((1-\alpha_{k+1})(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k)+\alpha_{k+1}x_{k+1})\\
&\quad\leqslant(1-\alpha_{k+1})f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})
\end{aligned}$$

$$\leqslant(1-\alpha_{k+1})(\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_k f(x_k))+\alpha_{k+1}f(x_{k+1})$$
$$=\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_k f(x_k)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1}).$$

我们指出：如果 $f$ 是严格凸函数，并且 $x_1,\cdots,x_m$ 不全相等，那么应有严格的不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)<\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x_i).$$

为说明这一事实，我们重新审查上面的归纳证明．首先，对于 $m=2$的情形，显然有严格的不等式(这就是严格凸函数的定义)．再来考察 $m=k+1$的情形．这时有两种可能：一种是 $x_1,\cdots,x_k$ 不全相等；另一种是 $x_1=\cdots=x_k$，但 $x_{k+1}$ 与这些数不同．对前一种可能情形，上面的归纳证明中的最后一个不等号应该是严格的（根据归纳法的假设）．对后一种可能情形应有

$$x_{k+1}\neq\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k,$$

因而上面的归纳证明中的倒数第二个不等号应是严格的． □

**推论** 设 $f$ 在区间 $I$ 是凸函数，则对于任何 $x_1,\cdots,x_m\in I$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m>0$，都有

$$f\left(\frac{\beta_1 x_1+\cdots+\beta_m x_m}{\beta_1+\cdots+\beta_m}\right)\leqslant\frac{\beta_1 f(x_1)+\cdots+\beta_m f(x_m)}{\beta_1+\cdots+\beta_m}.$$

最后，我们指出：$g$ 为凹函数（严格凹函数）的充分必要条件是 $f=-g$ 为凸函数（严格凸函数）．因此，以上关于凸函数（严格凸函数）的一切结果，都可以翻译成关于凹函数（严格凹函数）的相应结果．我们这里不再细说了．请读者自己加以补充．

### 3.b 利用导数判别凹凸与拐点

**定理3** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，在 $I^{\circ}$ 可导．则 $f$ 在区间 $I$ 为凸函数（严格凸函数）的充分必要条件是 $f'$ 在 $I^{\circ}$ 单调上升（严格单调上升）．

**证明** 先证条件的必要性． 设 $x_1,x_2\in I^{\circ}$，$x_1<x_2$．只要 $x$

和 $x'$ 满足

$$x_1 < x < x' < x_2,$$

根据定理 1 中的（4），就一定有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}.$$

在上式中让 $x \to x_1$，$x' \to x_2$，我们得到

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2).$$

（对于 $f$ 为严格凸函数的情形，我们取 $x_{12}$ 满足

$$x_1 < x_{12} < x_2.$$

于是有

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_{12})-f(x_1)}{x_{12}-x_1}$$

$$< \frac{f(x_2)-f(x_{12})}{x_2-x_{12}} \leqslant f'(x_2).$$

——这样就得到了严格的不等式

$$f'(x_1) < f'(x_2).）$$

再来考察条件的充分性． 设 $f'$ 在 $I^{\circ}$ 单调上升．对任意 $x_1, x, x_2 \in I$，$x_1 < x < x_2$，根据拉格朗日中值定理应有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad x_1 < \xi_1 < x,$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2), \qquad x < \xi_2 < x_2.$$

因为$\xi_1 < x < \xi_2$，所以

$$f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2).$$

因而

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

根据定理 1，我们断定 $f$ 是凸函数（对 $f'$ 在 $I^{\circ}$ 严格单调上升

的情形，可以证明 $f$ 是严格凸函数）． □

引用第四章§3中根据导数判别函数单调性的法则，我们得到以下定理.

**定理 4** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 连续，在 $I^0$ 可导二次，则 $f$ 在区间 $I$ 为凸函数的充分必要条件是：

$$f''(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in I^0.$$

而 $f$ 在区间 $I$ 为严格凸函数的充分必要条件是：

$$f''(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in I^0,$$

并且 $f''$ 不在 $I^0$ 的任何开子区间上恒等于 0．

**注记** 关于二次可导函数为凹函数的条件，也有相应的结果. 请读者自己加以讨论.

函数凹凸性改变的点称为拐点. 更确切地说，就是：

**定义** 设函数 $f$ 在 $U(x_0, \eta)$ 有定义，并且在 $x_0$ 的左右两侧有不同的凹凸性，则称 $x_0$ 为 $f$ 的一个拐点.

根据定理 3，对于可导函数 $f$ 来说，拐点就是 $f'$ 改变单调性的地方（因而也就必须是 $f'$ 的极值点）. 从这一考察出发，我们得到以下的关于拐点的必要条件与充分条件.

**定理 5**（拐点的必要条件） 设函数 $f$ 在 $U(x_0, \eta)$ 有定义，在 $x_0$ 点有二阶导数. 如果 $x_0$ 是 $f$ 的一个拐点，那么必有

$$f''(x_0) = 0 .$$

**定理 6**（拐点的第一充分条件） 设函数 $f$ 在 $U(x_0, \eta)$ 有二阶导数，$f''(x_0) = 0$. 如果 $f''(x)$ 经过 $x_0$ 时改变符号，那么 $x_0$ 点是函数 $f$ 的拐点.

**定理 7**（拐点的第二充分条件） 设函数 $f$ 在 $x_0$ 点有三阶导数. 如果

$$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

那么 $x_0$ 点是函数 $f$ 的拐点.

**注记** 仿照极值的第三充分条件，还可陈述关于拐点的第三

充分条件．我们这里不再细说了．有兴趣的读者可自己进行讨论．

## §4 不等式的证明

利用微积分的方法证明不等式，常常通过以下几种途径：

一、应用中值定理或泰勒公式；

二、考察函数的单调性或极值；

三、考察函数的凹凸性；

四、比较图形的面积．

请看下面的例子．

**例1** 对于 $x\geqslant 0$，我们有不等式

$$\frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x,$$

等号仅当 $x=0$ 时成立．

**证明** 根据拉格朗日中值定理，应该有

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)=\frac{x}{1+\theta x},$$

$$0<\theta<1.$$

因为

$$\frac{1}{1+x}\leqslant\frac{1}{1+\theta x}\leqslant 1$$

（等号仅当 $x=0$ 时成立），

所以

$$\frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$$

（等号仅当 $x=0$ 时成立）． □

作为例1的应用，我们来证明：对于 $x>0$，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

是递增的，而函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$是递减的．为此，我们考察函数

$$f(x)=x(\ln(x+1)-\ln x),$$
$$g(x)=(x+1)(\ln(x+1)-\ln x).$$

因为

$$f'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}>0,$$

$$g'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}<0,$$

所以，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是递增的，$g(x)$ 是递减的。因而，当 $x>0$ 时

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{f(x)}\ \text{是递增的},$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e^{g(x)}\ \text{是递减的}.$$

**例2** 求证：$e^x\geqslant 1+x$，$\forall x\in\mathbf{R}$，等号仅当 $x=0$ 时成立．

**证明** 利用泰勒公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}e^{\theta x},$$

可得

$$e^x\geqslant 1+x,$$

这式中的等号仅当 $x=0$ 时成立．　　□

**例3**（推广的伯努里不等式） 对于 $\alpha>1$，$x>-1$，我们有

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x,$$

等号仅当 $x=0$ 时成立.

**证明** 我们有

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\theta x)^{\alpha-2}x^{2}$$

$$\geqslant 1+\alpha x,\quad \forall x>-1.$$

上式中的等号仅当 $x=0$ 时成立. □

**注记** 例 3 中的不等式可以改写成

$$u^{\alpha}-1\geqslant\alpha(u-1),\quad \forall u>0,$$

这式中的等号仅当 $u=1$ 时成立.

**例4** 求证

$$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi},\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

**证明** 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{如果 } x\neq 0,\\ 1, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

这函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 可导，并且

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^{2}}$$

$$=\frac{\cos x}{x^{2}}(x-\operatorname{tg}x)<0,\quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

我们看到，函数 $f$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 是单调下降的，因而

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

由此得到

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}, \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad \square$$

**例5** 求证：$e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}, \qquad \forall x < 1.$

**证明** 记 $f(x) = (1-x)e^x$，则有

$$f'(x) = -xe^x.$$

导函数 $f'(x)$ 经过 $x=0$ 这一点从正变为负，因而 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 取得最大值的点．我们得到

$$(1-x)e^x \leqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

因而

$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x}, \quad \forall x < 1. \qquad \square$$

**例6** 考察函数

$$f(x) = -\ln x, \quad x > 0.$$

因为

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0,$$

所以 $f$ 在 $(0, +\infty)$ 是严格凸函数．因而，对于 $x_1, \cdots, x_m \in (0, +\infty)$，以下的颜森不等式成立

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_m f(x_m),$$

即

$$-\ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) \leqslant -\alpha_1 \ln x_1 - \cdots - \alpha_m \ln x_m,$$

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_m > 0, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1.$$

由此得到

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_m > 0, \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1.$$

上式中的等号仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ 时成立．这里得到的不等式，是算术平均数与几何平均数不等式的推广．对于$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m$

$=\frac{1}{m}$，上面的不等式即为算术平均数与几何平均数不等式.

**例7** 设 $p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 试证

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y,\qquad \forall x,y\geqslant 0,$$

等号仅当 $x=y$ 时成立.

**证明** 这是上一例中 $m=2$ 的情形. □

**例8** 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是不全为 0 的非负实数，$b_1,\cdots,b_n$ 也是不全为 0 的非负实数，$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 对于

$$x_i=\frac{a_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^p},\qquad y_i=\frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}b_j^q},$$

用例 7 中的不等式得

$$\frac{a_ib_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}b_j^q}.$$

上式两边对 $i=1,2,\cdots,n$ 求和，就得到

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

这后一不等式对于 $a_1,\cdots,a_n$ 全为0，或者 $b_1,\cdots,b_n$ 全为0的情形，显然也成立. 我们证明了霍尔德（Hölder）不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$a_1,\cdots,a_n \geqslant 0, \quad b_1,\cdots,b_n \geqslant 0.$$

常遇到的一种特殊情形是： $p=q=2$. 这情形下的霍尔德不等式就是柯西不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**注记** 柯西不等式还有许多其他证法. 一种常见的证法用到以下二次三项式的判别式：

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + b_i)^2$$

$$= \lambda^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

另一种常见的证法用到这样的恒等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2.$$

**例9** 设 $c>0$，函数 $\varphi$ 在区间 $[0,c]$ 严格递增并且连续，$\psi$ 是 $\varphi$ 的反函数，

$$\varphi(0)=0, \quad a \in [0,c], \quad b \in [0,\varphi(c)].$$

通过图形面积的比较可得（参看图 8－3）：

$$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^b \psi(y)\mathrm{d}y.$$

这不等式称为杨格（Young）不等式.

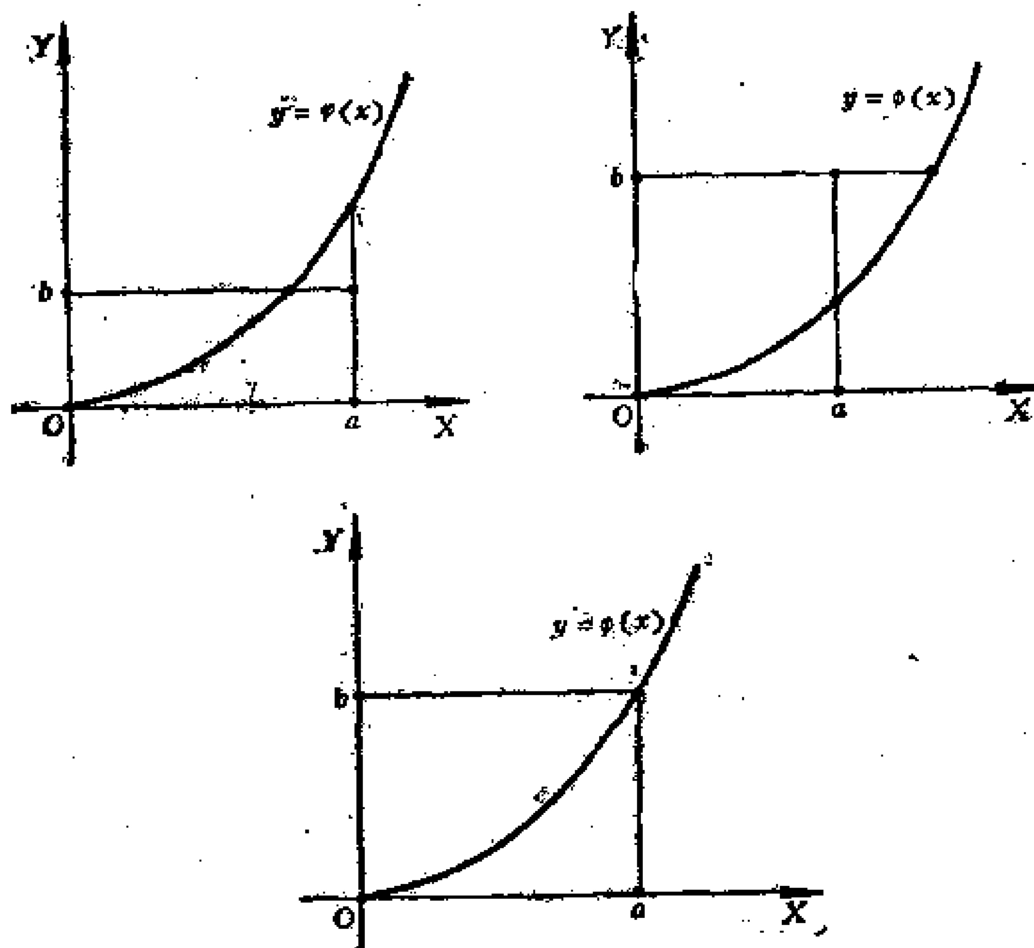



图 8-3

例如，函数

$$\varphi(x)=x^{p-1} \quad (p>1)$$

的反函数为

$$\psi(y)=y^{q-1} \quad \left(q=\frac{p}{p-1}>1\right).$$

对这一对函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 用杨格不等式可得

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

取 $a=A^{\frac{1}{p}}$，$b=B^{\frac{1}{q}}$，我们重又得到了例 7 中的不等式

$$A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} A + \frac{1}{q} B$$

$$\left(p>0,\ q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

## §5 函数的作图

为了形象地表示一个函数的变化状况，有必要利用函数的图形．按照定义，函数 $y=f(x)$ 的图形，就是 $OXY$ 坐标系中一切坐标为

$$(x,\ f(x))$$

这样的点的集．因此，作函数图形最直接的办法是描点绘图法．但为了标出图形上的每一个点，都需要计算一次函数值．为了得到较准确的图形表示，计算工作量是很大的．我们希望尽可能地减少这一工作量．为此，就要有选择地进行描点，使得所标出的点是最能反映函数变化特征的“关键点”．例如：函数的升降和凹凸等性质转变的点，等等．为了寻找这样的点，可以利用我们前面已经讨论过的求极值点和求拐点的办法．描点作图当然只能在有限的范围内进行．为了对函数图形的全貌有较好的了解，还需要考察动点沿函数图形趋于无穷远时的渐近状况．

### 5.a 求渐近线

考察曲线

$$\gamma:\ y=f(x)$$

和直线

$$\lambda:\ Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0).$$

如果 $x\to a$ 时，点 $P(x,\ f(x))$ 沿曲线 $\gamma$ 趋向无穷远，并且这点到直线 $\lambda$ 的距离趋于 0，那么我们就说：$x\to a$ 时曲线 $\gamma$ 以直线 $\lambda$ 为渐近线．

我们来探讨渐近线存在的条件．首先注意到：点 $P(x,f(x))$

到直线 $\lambda$ 的距离可以表示为

$$d(x)=\frac{|Ax+Bf(x)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

因此，$x\to a$ 时曲线 $\gamma$ 以直线 $\lambda$ 为渐近线的充分必要条件是：当 $x\to a$ 时，点 $P$ 沿曲线 $\gamma$ 趋向无穷远，并且

$$\lim_{x\to a}(Ax+Bf(x)+C)=0.$$

以下分三种情形讨论.

**情形 1** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，这里 $a\in\mathbb{R}$. 对这情形，要使

$$\lim_{x\to a}(Ax+Bf(x)+C)=0,$$

必须而且只须

$$B=0,\quad Aa+C=0.$$

当这条件满足时，渐近线 $\lambda$ 的方程为

$$Ax+C=0,$$

也就是

$$x=-\frac{C}{A}=a.$$

这时我们说曲线 $y=f(x)$ 有竖直渐近线

$$x=a.$$

**情形 2** $x\to+\infty$. 对这情形，要使

$$\lim_{x\to+\infty}(Ax+Bf(x)+C)=0,$$

必须而且只须：

$$B\neq 0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(A+B\frac{f(x)}{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{Ax+Bf(x)+C}{x}-\frac{C}{x}\right)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(Ax+Bf(x))=-C.$$

这些条件等价于

$$B\neq 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\frac{A}{B}=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{A}{B}x\right)$$

$$=-\frac{C}{B}=b.$$

当这些条件满足时，渐近线 $\lambda$ 的方程为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=kx+b.$$

这时我们说曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线

$$y=kx+b.$$

**情形 3** $x\to-\infty$. 对这情形的讨论与情形 2 完全类似，因此就不重复了.

通过以上分析，我们得到结论：

Ⅰ. 曲线 $y=f(x)$ 有竖直渐近线 $x=a$ 的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 $a$ 点有无穷间断，也就是

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

(这里设 $a\in\mathbb{R}$)；

**Ⅱ.** 曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k,$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}}(f(x)-kx)=b.$$

请注意，这里所说的“斜渐近线”，包括 $k=0$ 的情形，即包括

了水平渐近线．容易看出：曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$ 的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} f(x)=b.$$

**例1** 求曲线

$$y=\frac{x^2}{1+x}$$

的渐近线（参看图8-4）．

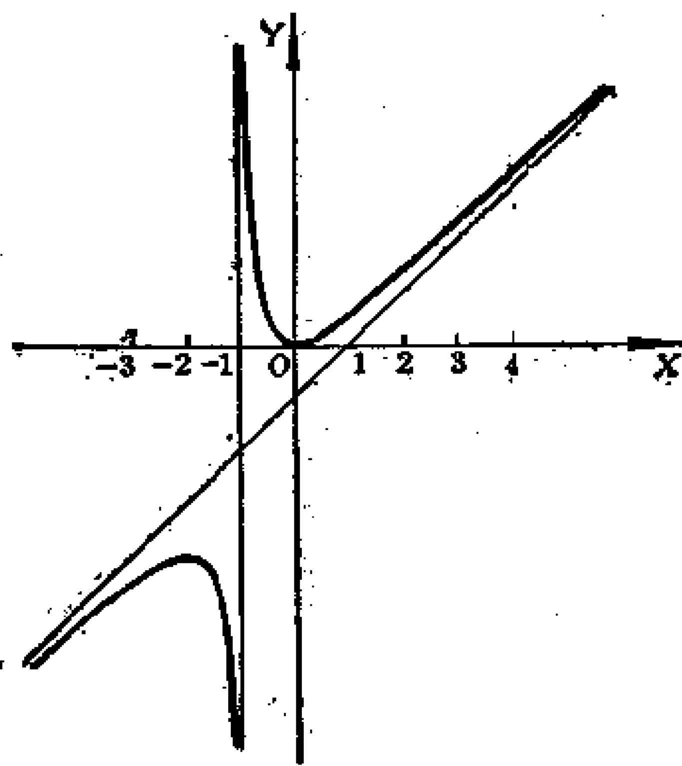



图 8-4

**解** 首先注意到

$$\lim_{x\to-1} y=\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{1+x}=\infty,$$

由此得知曲线 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 有竖直渐近线

$$x=-1.$$

其次，因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1,$$

所以曲线$y=\frac{x^2}{1+x}$还有斜渐近线$y=x-1$.

**例 2** 求曲线 $y=e^{-x^2}$ 的渐近线.

**解** 因为

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0,$$

所以曲线 $y=e^{-x^2}$ 有水平渐近线 $y=0$（图 8－5）.

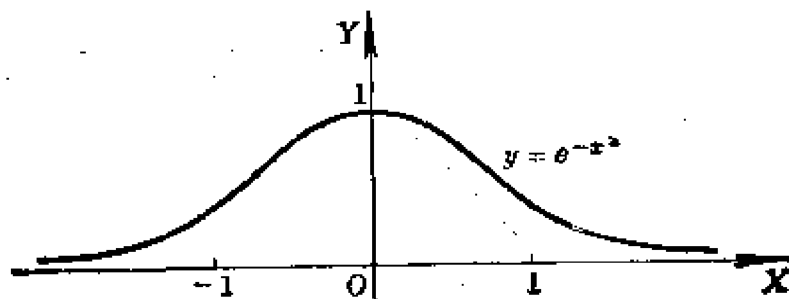



图 8－5

### 5.b 描点作图

在开始作图之前，应对函数的一般状况作一个大致的考察，并找出最能反映函数变化特征的一些关键性的点．具体步骤如下：

一、考察函数的定义域，以确定在怎样的范围内选点；

二、考察函数的奇偶性与周期性，以减少描点时的计算工作量；

三、求函数图形的渐近线；

四、求 $f'(x)=0$ 的根，并判别 $f'(x)$ 在其各根间的符号，以了解函数 $f(x)$ 在各段的升降与极值的情况；

五、求 $f''(x)=0$ 的根，并判别 $f''(x)$ 在其各根间的符号，以了解函数 $f(x)$ 在各段的凹凸与拐点的情况；

六、再有选择地标出一些有代表性的点，例如图形与各坐标轴的交点等.

**例 3** 作函数 $y=e^{-x^2}$ 的图形.

**解** 这函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，它是偶函数. 因为

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}=0,$$

所以函数的图形以 $x$ 轴为水平渐近线. 计算这函数的导数得

$$y'=-2xe^{-x^2},\quad y''=(-2+4x^2)e^{-x^2}.$$

我们列表讨论函数 $y=e^{-x^2}$ 的升降与极值，凹凸与拐点：

| $x$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ | 0 | $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | − | − |
| $y''$ | − | − | − | 0 | + |
| $y$ | ↗ | 1 | ↘ | 0.6 | ↘ |
| 备注 | | 极 大 | | 拐 点 | |

这函数的图形描绘在图 8－6 中。

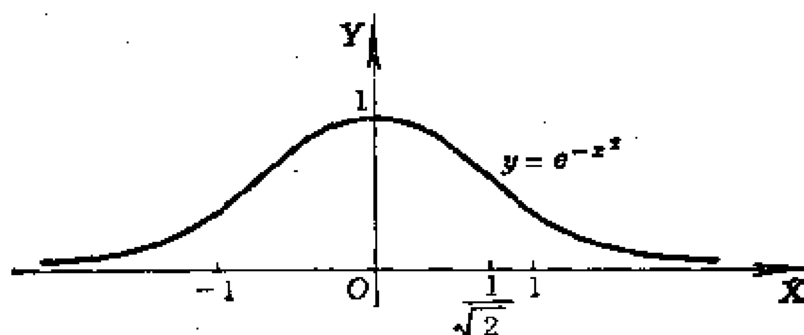



图 8－6

**注记** 在这例和以下各例中，我们采用以下的方便的符号来表示函数的升降与凹凸：

| ↗ | ↗ | ↘ | ↘ |
|---|---|---|---|
| 上升，凸 | 上升，凹 | 下降，凹 | 下降，凸 |

**例 4** 作函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的图形.

**解** 这函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是一个奇函数. 因为

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

所以图形以 $x$ 轴为水平渐近线. 计算函数的导数得

$$y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};\quad y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

我们列表讨论函数 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的升降与极值，凹凸与拐点：

| $x$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,\sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $y''$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $y$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↘ |
| 备注 | | 拐点 | | 极大 | | 拐点 | |

这函数的图形描绘在图 8－7 中.

**例 5** 作函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的图形.

**解** 这函数的定义域为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

因为

$$\lim_{x\to-1} y=\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{1+x}=\infty,$$

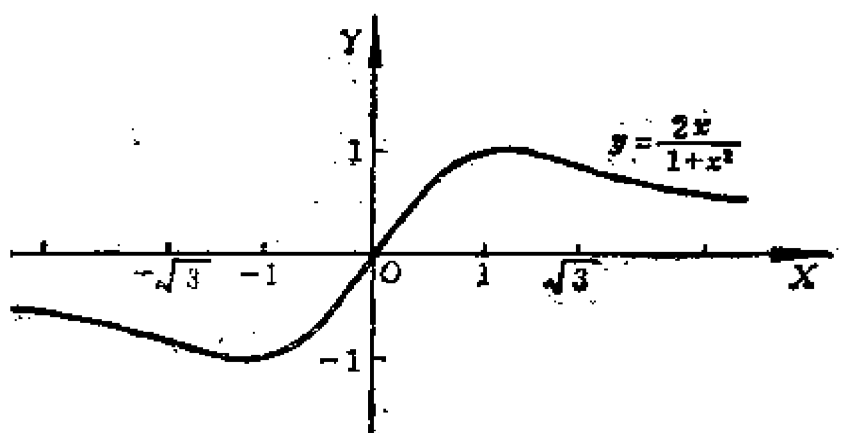



图 5-7

所以图形有竖直渐近线 $x=-1$. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1,$$

所以图形有斜渐近线 $y=x-1$. 计算函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$的导数得

$$y'=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}=1-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y''=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

我们列表讨论函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$的升降与极值，凹凸与拐点。

| $x$ | $(-\infty,-2)$ | $-2$ | $(-2,-1)$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | − | 0 | + |
| $y''$ | − | − | − | + | + | + |
| $y$ | ↗ | −4 | ↘ | ↘ | 0 | ↗ |
| 备注 | | 极大 | | | 极小 | |

这函数的图形描绘在图 8-8 中.

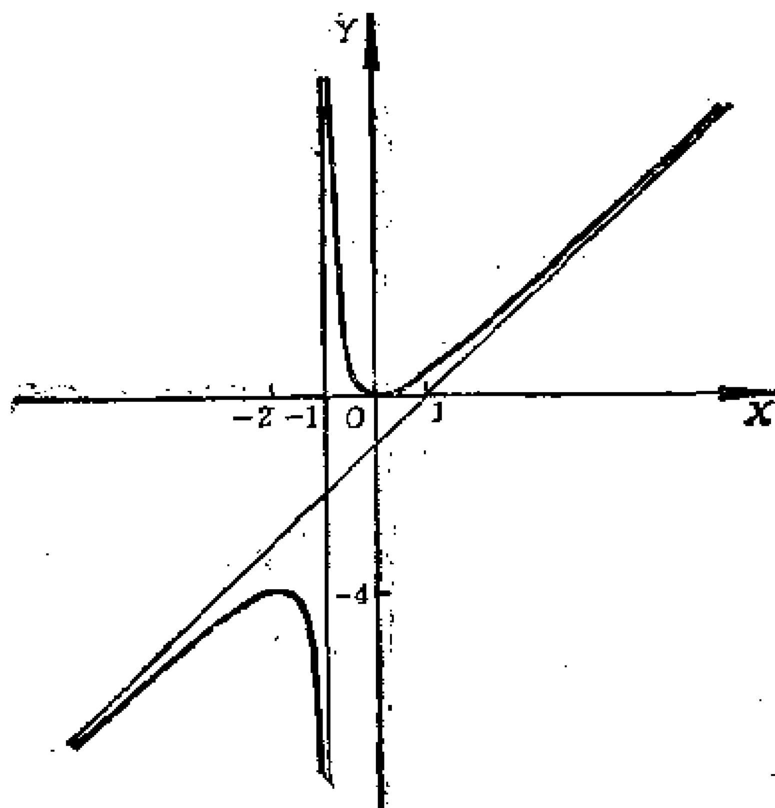



图 8-8

**例 6** 作函数 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 的图形.

**解** 这函数的定义域是 $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. 它是一个奇函数. 因为

$$\lim_{x\to\pm 1} y=\lim_{x\to\pm 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty,$$

所以函数的图形以 $x=\pm 1$ 为竖直渐近线. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0,$$

所以图形以 $y=x$ 为斜渐近线. 为了便于计算导数, 我们把这函数的表示式写成

$$y=x+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}.$$

于是求得

$$y'=1-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x+1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

$$y''=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

我们列表讨论函数的升降与极值，凹凸与拐点：

| $x$ | $(-1,\ 0)$ | $0$ | $(0,\ 1)$ | $(1,\ \sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3},\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $0$ | ↘ | ↘ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ |
| 备注 | | 拐点 | | | 极小 | |

这函数的图形描绘在图 8－9 中.

## §6 方程的近似求解

从各种实际问题中，人们得到形式多样的方程．研究方程的求解，是一项有久远历史的数学课题．最初人们关注于代数方程，尽力寻求解的公式表示．对于一次和二次的代数方程，这种努力在古代就已获得成功．到了十六世纪，对于三次和四次的代数方程，也找到了用四则运算和根号表示解的公式．但对于更高次的代数方程，类似的努力却毫无进展．到了十九世纪，由于阿贝尔（Abel）和伽罗瓦（Galois）的研究，人们才了解到：对于高于四次的代数方程，不存在用四则运算及根号表示解的一般公式．其实，即使对于三次和四次的代数方程，解的公式表示就已经相当复杂了，除了某些简单情形而外，一般并不适宜于作具体

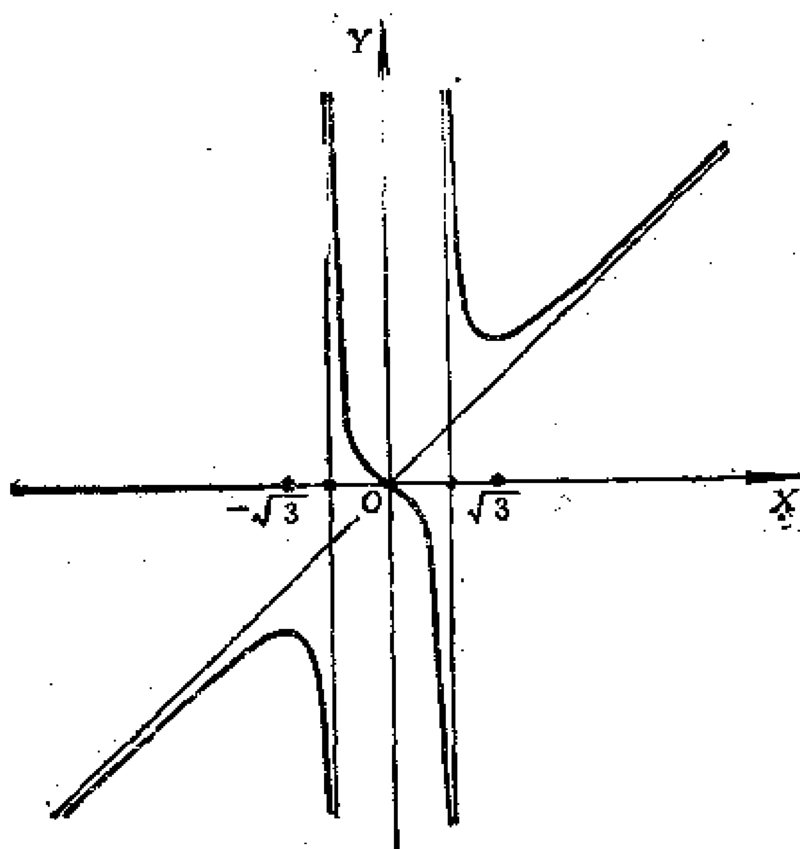



图 8-9

计算．对于高于四次的代数方程以及所谓的“超越”方程（例如像 $x\ln x-1=0$ 这样的方程），就更有必要探讨近似求解的有效方法．

近似求解方程的办法有很多种，其一般格局是：设计一定的程序，使得按这程序能够产生一个收敛于方程的根的序列 $\{x_n\}$．于是，我们可以取 $n$ 充分大时的 $x_n$ 作为方程的根的近似值．

牛顿法（又称切线法）是一种得到广泛应用的近似求解方程的方法．只要初始点选择得当，由这种方法产生的迭代序列能以很快的速度收敛于方程的根．下面就来介绍这种方法．

设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续可微并且满足条件：

$$f(a)\cdot f(b)<0;$$

$$f'(x)\neq 0,\qquad \forall x\in[a,b].$$

于是，由连续函数的介值定理可知，方程

$$f(x)=0$$

在 $(a,b)$ 中至少有一个解．又因为函数 $f$ 在 $[a,b]$ 是严格单调的，所以在这区间中方程的解是唯一的．记这唯一解为 $c$．下面，我们来构造逼近这解的序列．

曲线 $y=f(x)$ 在某点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

为了近似求解方程 $f(x)=0$，我们用这切线与 $x$ 轴的交点 $x_1$ 代替曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴的交点 $c$．换句话说，就是用方程

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

的解 $x_1$ 作为方程 $f(x)=0$ 的解 $c$ 的近似值．我们求出

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

以 $x_1$ 代替 $x_0$，重复上面的手续，又得到

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

如果这样的迭代手续可以一直进行下去，那么就能得到一个数列 $\{x_n\}$：

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\qquad n=1,2,\cdots.$$

近似求解方程的这种迭代方法是牛顿首先提出的，所以叫做牛顿法．我们需要考察：在怎样的条件下，由牛顿法产生的迭代序列收敛于方程 $f(x)=0$ 的解 $c$．

为了便于讨论，我们假设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶连续可微并且满足条件

$$f(a)\cdot f(b)<0,$$

$$f'(x)\cdot f''(x)\neq 0,\qquad \forall x\in[a,b].$$

在这样的条件下，关于函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 的凹凸与升降，有以下四种情形（参看图8-10）：

Ⅰ．凸上升 $(f''>0,\ f'>0)$；

Ⅱ. 凹上升 ($f'>0$, $f''<0$);

Ⅲ. 凸下降 ($f'<0$, $f''>0$);

Ⅳ. 凹下降 ($f'<0$, $f''<0$).

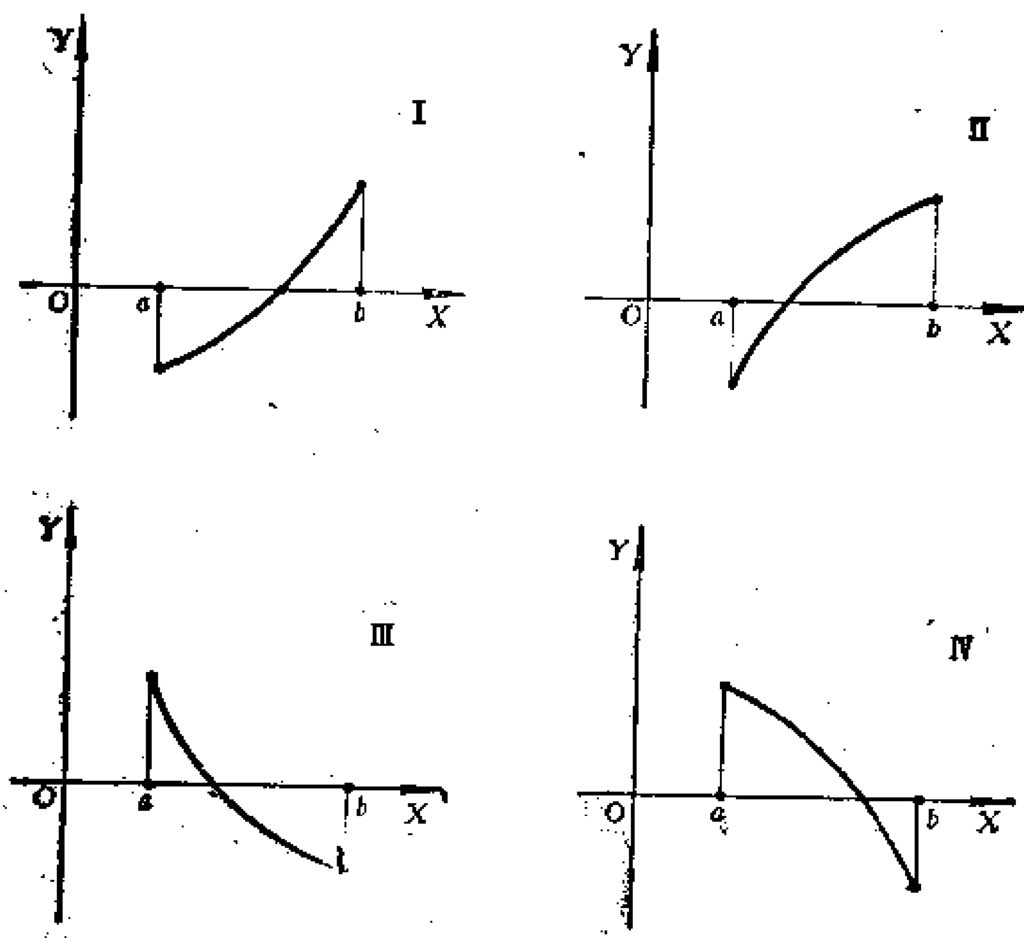



图 8-10

分析以上四种情况的典型图形，我们确信：只要选择 $x_0$ 满足

$$f(x_0)f''(x_0)>0,$$

就能保证

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

与 $x_0$ 在 $c$ 的同侧，并且 $x_1$ 比 $x_0$ 离 $c$ 更近。因为在 $c$ 的同一侧 $f$ 的符号不改变，所以 $x_1$ 也满足

$$f(x_1)f''(x_1)>0,$$

于是又能保证

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

与 $x_1$ 在 $c$ 的同侧，并且 $x_2$ 比 $x_1$ 离 $c$ 更近．这样的迭代过程可以不断进行下去而得到一串数

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

单调有界序列 $\{x_n\}$ 的极限 $x_*$ 应满足

$$x_* = x_* - \frac{f(x_*)}{f'(x_*)},$$

即

$$f(x_*) = 0.$$

因而 $x_*$ 应是方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 中的唯一解 $c$．

根据以上分析，我们来证明：

**定理1** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶连续可微并且满足条件

$$f(a)\cdot f(b) < 0,$$

$$f'(x)\cdot f''(x) \neq 0, \qquad \forall x \in [a,b].$$

如果 $x_0 \in [a,b]$ 使得

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0,$$

那么由迭代程序

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

所产生的数列 $\{x_n\}$ 单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中的唯一解 $c$.

**证明** 为确定起见，不妨设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 是凸上升的，即 $f'>0$，$f''>0$（其他情形可类似地讨论）．对这情形，关于初始点的条件

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$$

意味着

$$f(x_0)>0,$$

也就是

$$x_0>c.$$

显然有

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<x_0.$$

若记

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

则有

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

我们看到

$$\begin{aligned}x_1-c&=\varphi(x_0)-\varphi(c)\\&=\varphi'(\xi)(x_0-c)\\&=\frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2}(x_0-c)>0\end{aligned}$$

——这里用到了拉格朗日中值定理，式中的 $\xi$ 满足条件 $x_0>\xi>c$。

在 $f'>0$，$f''>0$ 的条件下，我们证明了：只要 $x_0>c$，就有

$$x_0>x_1>c.$$

利用归纳法可进一步证明

$$x_{n-1}>x_n>c, \quad n=1,2,\cdots.$$

数列 $\{x_n\}$ 单调下降并且有下界，因而必定收敛于极限 $x_*$. 在前面的讨论中，我们已经看到，这样的 $x_*$ 应是方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 中的唯一解 $c$. □

对于实际计算来说，仅仅知道近似序列收敛于根 $c$ 是不够

的，还需要了解这收敛的速度．收敛速度很慢的近似序列是根本不适宜于作实际计算的．对于牛顿法来说，只要初始近似选择得比较好，收敛的速度将是很快的．这从以下定理可以看出．

**定理2** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续并有连续的一阶和二阶导数，$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 不改变符号，$c\in(a,b)$ 是 $f(x)=0$ 的根，则按牛顿法产生的迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

满足

$$|x_{n+1}-c|\leqslant q|x_n-c|^2,$$

这里

$$q=\frac{M}{2m},\qquad m=\inf_{x\in[a,b]}|f'(x)|,$$

$$M=\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

**证明** 利用泰勒公式

$$f(c)=f(x_n)+f'(x_n)(c-x_n)+\frac{f''(\xi)}{2}(c-x_n)^2,$$

我们得到

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-c=\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c-x_n)^2,$$

即

$$x_{n+1}-c=\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c-x_n)^2.$$

由此即可得到

$$|x_{n+1}-c|\leqslant q|x_n-c|^2.\qquad\square$$

于是，只要初始近似 $x_0$ 选择的比较好，逼近序列 $\{x_n\}$ 将以很快的速度收敛于根 $c$：如果 $|x_n-c|$ 的数量级为 $10^{-k}$，那么 $|x_{n+1}-c|$ 的数量级差不多可达 $10^{-2k}$．

**定理3** 用牛顿法求根时，有以下简便的误差估计

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m},$$

这里

$$m = \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

**证明** 利用中值公式

$$f(x_n) - f(c) = f'(\xi)(x_n - c),$$

可得

$$x_n - c = \frac{f(x_n)}{f'(\xi)}.$$

因而

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}. \qquad \square$$

**例1** 设 $a>0$. 试写出用牛顿法求算术平方根$\sqrt{a}$的迭代公式.

**解** 记 $f(x)=x^2-a$，则有

$$f'(x)=2x>0, \qquad f''(x)=2>0, \qquad \forall x>0.$$

用牛顿法求解方程 $x^2-a=0$ 的迭代公式应为：

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ &= x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

在第二章§3 的例3 中，我们已经看到过这一公式.

**例2** 试用牛顿法解方程

$$x\ln x - 1 = 0.$$

**解** 记 $f(x)=x\ln x-1$，则有

$$f'(x)=\ln x+1,\qquad f''(x)=\frac{1}{x}.$$

容易看出，在 $(0,1)$ 中 $f(x)<0$，因而方程无根．对于 $x\geqslant 1$，因为 $f'(x)>0$，所以方程 $f(x)=0$ 至多只能有一个根．又因为

$$f(1)=-1<0,$$

$$f(2)=2\ln 2-1=\ln 4-1>0,$$

所以方程 $f(x)=0$ 的唯一根在开区间 $(1,2)$ 之中．我们用牛顿法近似求这个根．因为 $f(2)$ 与 $f''(2)$ 同号，所以可取 $x_0=2$．牛顿法的迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n\ln x_n-1}{\ln x_n+1}=\frac{x_n+1}{\ln x_n+1}.$$

从 $x_0=2$ 开始，逐次迭代得

$$x_1=\frac{3}{\ln 2+1}=1.77185,$$

$$x_2=\frac{2.77185}{\ln 1.77185+1}=1.76324,$$

$$x_3=\frac{2.76324}{\ln 1.76324+1}=1.76323.$$

我们利用定理 3 来估计误差，因为

$$m=\inf_{x\in[1,2]}|f'(x)|=1,$$

所以

$$|x_3-c|\leqslant|f(x_3)|\leqslant 0.00000026.$$

我们只迭代了三次就达到相当高的精确度．

# 第九章　定积分的进一步讨论

## §1　定积分存在的一般条件

我们把定积分定义为极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0} \sigma(f,P,\xi).$$

本节就来探讨这样的极限存在的条件．在第六章§1 中，我们已经指出，要使上述极限存在，函数 $f$ 在$[a,b]$上必须是有界的．这是定积分存在的一个必要条件．以下，我们在 $f$ 有界的前提下作进一步的探讨．于是，对于$[a,b]$的分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

函数 $f$ 在每一子区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上具有有穷的下确界和上确界

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),\qquad M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

我们记

$$\omega_k=M_k-m_k.$$

为方便起见，还引入记号

$$m=\inf_{x\in[a,b]} f(x),\qquad M=\sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

和

$$\omega=M-m.$$

**定义**　我们分别把和数

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

与

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

称为函数 $f$ 关于分割 $P$ 的下和与上和.

对下和与上和进行研究是法国数学家达布（Darboux）倡议的，所以这样的和数又称为达布和（达布下和与达布上和）.

我们注意到：函数 $f$ 关于分割 $P$ 的一切积分和（黎曼和）$\sigma(f,P,\xi)$ 都介于达布下和与达布上和之间

$$L(f,P)\leqslant\sigma(f,P,\xi)\leqslant U(f,P).$$

还容易看出：对于给定的分割 $P$，应该有

$$\inf_{\xi}\sigma(f,P,\xi)=L(f,P),$$

$$\sup_{\xi}\sigma(f,P,\xi)=U(f,P).$$

这里的 $\inf\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)$ 和 $\sup\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)$ 分别表示对一切可能的 $\xi$ 取 $\sigma(f,P,\xi)$ 的下确界和上确界.

我们将通过对达布下和与上和的考察，探讨函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积的充分必要条件.

**引理1** 对于 $[a,b]$ 的分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

和由 $P$ 添加一个分点 $x'\in[x_{k-1},x_k]$ 而成的分割 $P'$，我们有

(1) $L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+\omega|P|$,

(2) $U(f,P)\geqslant U(f,P')\geqslant U(f,P)-\omega|P|$.

**证明** 下和 $L(f,P)$ 与 $L(f,P')$ 不同之处仅仅在于前者的项

$$m_k(x_k-x_{k-1})$$

被代之以

$$m_k'(x'-x_{k-1})+m_k''(x_k-x'),$$

这里

$$m_k'=\inf_{x\in[x_{k-1},x']}f(x),\quad m_k''=\inf_{x\in[x',x_k]}f(x).$$

因而

$$
\begin{aligned}
&L(f,P')-L(f,P)\\
&\quad=m_k'(x'-x_{k-1})+m_k''(x_k-x')-m_k(x_k-x_{k-1})\\
&\quad=(m_k'-m_k)(x'-x_{k-1})+(m_k''-m_k)(x_k-x').
\end{aligned}
$$

但显然有

$$
m_k\leqslant \begin{matrix} m_k' \\ m_k'' \end{matrix} \leqslant M_k,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant L(f,P')-L(f,P)\\
&\leqslant (M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\\
&\leqslant (M-m)|P|=\omega|P|.
\end{aligned}
$$

这证明了结论（1）：

$$
L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+\omega|P|.
$$

至于结论（2），可以用类似的方法来证明；也可以利用关系式

$$
U(f,P)=-L(-f,P),
$$

从结论（1）推出。 □

**推论** 设分割 $P'$ 是由分割 $P$ 添加 $l$ 个分点而成，则

(1) $L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+l\omega|P|$,

(2) $U(f,P)\geqslant U(f,P')\geqslant U(f,P)-l\omega|P|$.

**引理2** 设 $P_1$ 和 $P_2$ 是 $[a,b]$ 的任意两个分割，则有

$$
L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2).
$$

**证明** 以 $P'$ 表示由 $P_1$ 的分点与 $P_2$ 的分点合在一起作成的分割，则有

$$
\begin{aligned}
L(f,P_1)&\leqslant L(f,P')\\
&\leqslant U(f,P')\leqslant U(f,P_2).
\end{aligned}
$$
□

以下我们记

$$
\underline{I}=\sup_P L(f,P),\quad \overline{I}=\inf_P U(f,P).
$$

这里的 $\sup\limits_P L(f,P)$ 与 $\inf\limits_P U(f,P)$ 分别表示对 $[a,b]$ 的一切

可能的分割 $P$ 取 $L(f,P)$ 的上确界与 $U(f,P)$ 的下确界. $\underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 分别称为 $f$ 在 $[a,b]$ 的达布下积分与达布上积分. 由引理 2 可知

$$\underline{I}\leqslant\overline{I}.$$

**引理3** 我们有

(1) $\lim\limits_{|P|\to 0} L(f,P)=\underline{I}$,

(2) $\lim\limits_{|P|\to 0} U(f,P)=\overline{I}$.

**证明** 因为

$$\underline{I}=\sup_P L(f,P),$$

所以，对任何 $\varepsilon>0$，存在分割

$$P_0:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_l=b,$$

使得

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<L(f,P_0)\leqslant\underline{I}.$$

下面，我们指出：只要分割 $P$ 满足

$$|P|<\delta=\frac{\varepsilon}{2l\omega+1}$$

（这里 $l$ 是 $P_0$ 的分点个数），就一定有

$$\underline{I}-\varepsilon<L(f,P)\leqslant\underline{I}.$$

事实上，如果把由 $P_0$ 和 $P$ 的分点合在一起作成的分割记为$P'$，那么

$$\begin{aligned}\underline{I}&\geqslant L(f,P)\\ &\geqslant L(f,P')-l\omega|P|\\ &\geqslant L(f,P_0)-l\omega|P|\\ &>\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=\underline{I}-\varepsilon.\end{aligned}$$

以上的讨论已经证明了

$$\lim_{|P|\to 0} L(f,P)=\underline{I}.$$

同样可证

$$\lim_{|P|\to 0} U(f,P)=\overline{I}. \qquad \square$$

在作了以上准备之后，我们来探讨有界函数 $f$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 可积的充分必要条件.

**定理1** 设 $a,b\in\mathbb{R}$，函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并且有界，则以下三条件互相等价：

(1) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割 $P$，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon;$$

(2) 函数 $f$ 在 $[a,b]$ 的达布下积分与达布上积分相等：

$$\underline{I}=\overline{I};$$

(3) 函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积.

**证明** 我们将循以下途径来证明这三条件的等价性：

"(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)".

先来证明"(1) ⇒ (2)". 因为

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}\leqslant U(f,P)-L(f,P),$$

所以条件 (1) 蕴含

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon,\quad \forall\varepsilon>0.$$

由此即可得到

$$\overline{I}=\underline{I}.$$

再来证明"(2) ⇒ (3)". 记 $I=\underline{I}=\overline{I}$，则有

$$\lim_{|P|\to 0} L(f,P)=\lim_{|P|\to 0} U(f,P)=I.$$

又因为

$$L(f,P)\leqslant\sigma(f,P,\xi)\leqslant U(f,P),$$

所以

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I.$$

最后，我们来证明"(3) ⇒ (1)". 按照可积性的定义，存在极限

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I.$$

于是，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|P|<\delta$，就有

$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma(f,P,\xi)<I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

取定一个这样的分割 $P$，让 $\xi$ 变动取积分和的下确界与上确界，我们得到

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant L(f,P)\leqslant U(f,P)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此得到

$$U(f,P)-L(f,P)\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon. \qquad \square$$

**注记** 从上面定理的证明可以看出，对于在 $[a,b]$ 可积的函数 $f$，应有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\underline{I}=\overline{I}.$$

下面，我们把定理 1 改写为更便于应用的形式．为此，先介绍一些记号．对于 $[a,b]$ 的分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

我们记

$$\Omega(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,$$

这里

$$\omega_i=M_i-m_i.$$

显然有

$$\Omega(f,P)=U(f,P)-L(f,P),$$

因而

$$\lim_{|P|\to 0}\Omega(f,P)=\overline{I}-\underline{I}.$$

采用这样的记号，我们把定理 1 改写如下：

**定理1′** 设 $a,b\in\mathbb{R}$，函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并且

有界，则以下三条件互相等价

(1) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分割 $P$，使得

$$\Omega(f,P)<\varepsilon;$$

(2) $\lim\limits_{|P|\to 0}\Omega(f,P)=0;$

(3) $f$ 在 $[a,b]$ 可积.

**例1** 狄里克莱函数定义为

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x \text{是有理数},\\ 0, & \text{如果 } x \text{是无理数}.\end{cases}$$

设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$. 我们来考察函数 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 是否可积. 对于 $[a,b]$ 的任意分割 $P$，显然有

$$\begin{aligned}\Omega(D,P)&=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\\&=b-a.\end{aligned}$$

因而狄里克莱函数 $D$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上都不可积.

**例2** 黎曼函数定义为

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{如果 } x=\dfrac{p}{q}\ (q>0)\ \text{是既约分数},\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

我们来证明函数 $R$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 可积.

**证明** 设 $\varepsilon$ 是任意正数. 考察闭区间 $[a,b]$ 中的所有的既约分数 $\dfrac{p}{q}$ $(q>0)$，我们可以断定：在这些既约分数里，至多只有有限多个能够使得

$$\frac{1}{q}\geqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

把这有限个既约分数记为

$$r_1,\ \cdots,\ r_l.$$

取 $[a,b]$ 的分割 $P$，使得

$$|P|<\frac{\varepsilon}{4l}.$$

对这分割 $P$，我们把 $\Omega(R,P)$ 分成两部分：

$$\Omega(R,P)=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_j{}''\omega_j\Delta x_j,$$

其中$\sum'\omega_i\Delta x_i$ 所涉及的子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 不含有任何一个 $r_k$，而$\sum''\omega_j\Delta x_j$ 所涉及的子区间 $[x_{j-1},x_j]$含有 $r_k$. 因为$\sum''$的加项不超过 $2l$ 个，所以

$$\begin{aligned}\Omega(R,P)&=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_j{}''\omega_j\Delta x_j\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i{}'\Delta x_i+\sum{}''\Delta x_j\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2l|P|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这证明了黎曼函数 $R$ 的可积性. □

## §2　可积函数类

我们利用上节中推导的充分必要条件考察可积函数类. 将指出：这函数类对于相加、相乘和取绝对值等运算是封闭的. 还将指出：任何连续的函数或者单调的函数都属于可积函数类. 我们看到，可积函数类的范围是相当广的.

先证明一个引理.

**引理 1**　设函数 $\varphi$ 在区间 $I$ 有定义. 我们记

$$M(\varphi)=\sup_{x\in I}\varphi(x),\qquad m(\varphi)=\inf_{x\in I}\varphi(x),$$

$$\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi).$$

则有

$$\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=\omega(\varphi).$$

**证明** 对于 $\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)=0$ 的情形，显然有

$$\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=0=\omega(\varphi).$$

以下设 $\omega(\varphi)=M(\varphi)-m(\varphi)>0$.

对任何 $x',x''\in J$，显然有

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x')-\varphi(x'')\\ \varphi(x'')-\varphi(x')\end{array}\right\}\leqslant M(\varphi)-m(\varphi)=\omega(\varphi),$$

因而

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant\omega(\varphi).$$

另一方面，对于任何 $0<\varepsilon<\omega(\varphi)$，存在 $x',x''\in J$，满足条件

$$\varphi(x')>M(\varphi)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$>m(\varphi)+\frac{\varepsilon}{2}>\varphi(x'').$$

于是

$$\varphi(x')-\varphi(x'')>M(\varphi)-m(\varphi)-\varepsilon=\omega(\varphi)-\varepsilon,$$

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|>\omega(\varphi)-\varepsilon.$$

通过以上讨论，我们已经证明了

$$\sup_{x',x''\in J}|\varphi(x')-\varphi(x'')|=\omega(\varphi).\qquad\square$$

**定理1** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$\lambda$ 是常数，则

(1) $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(2) $\lambda f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(3) $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积；

(4) $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积；

(5) 如果存在常数 $d>0$，使得

$$|f(x)|\geqslant d,\quad\forall x\in[a,b],$$

那么函数$\dfrac{1}{f(x)}$也在 $[a,b]$ 可积.

**证明** 结论 (1) 和 (2) 的证明已见于第六章 §1 之中. 这里我们证明结论 (3), (4), (5).

以下用 $J_i=[x_{i-1}, x_i]$ 表示分割 $P$ 的第 $i$ 个子区间.

(3) 因为

$$\begin{aligned}\omega_i(|f|)&=\sup_{x',x''\in J_i}\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\\&\leqslant\sup_{x',x''\in J_i}|f(x')-f(x'')|\\&=\omega_i(f),\end{aligned}$$

所以有

$$\Omega(|f|,P)\leqslant\Omega(f,P).$$

利用这一关系，根据可积性的充分必要条件，就可得到结论 (3).

(4) 可积函数必定是有界的，可设

$$|f(x)|\leqslant K,\quad |g(x)|\leqslant L,\quad \forall x\in[a,b].$$

对于任何 $x',x''\in J_i$，应有

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&\quad=|(f(x')-f(x''))g(x')+f(x'')(g(x')-g(x''))|\\&\quad\leqslant L|f(x')-f(x'')|+K|g(x')-g(x'')|.\end{aligned}$$

于是

$$\omega_i(fg)\leqslant L\omega_i(f)+K\omega_i(g),$$

因而

$$\Omega(fg,P)\leqslant L\Omega(f,P)+K\Omega(g,P).$$

据此即可得到结论 (4).

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\omega_i\left(\frac{1}{f}\right)&=\sup_{x',x''\in J_i}\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|\\&=\sup_{x',x''\in J_i}\left|\frac{f(x'')-f(x')}{f(x')f(x'')}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{d^2} \sup_{x',x''\in I_i} |f(x')-f(x'')|$$

$$= \frac{1}{d^2}\omega_i(f).$$

于是

$$\Omega\left(\frac{1}{f}, P\right) \leqslant \frac{1}{d^2}\Omega(f,P).$$

据此即可得到结论（5）． □

**注记** 上面定理结论（3）的逆命题并不成立．请看以下反例：

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{如果 } x\text{是有理数}, \\ -1, & \text{如果 } x\text{是无理数}. \end{cases}$$

这函数在闭区间［0，1］不可积，但其绝对值 $|f(x)|\equiv 1$ 却是［0,1］上的可积函数．

**定理 2** 设 $[a,b]$ 是 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 的任意闭子区间．如果函数 $f$ 在 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 可积，那么 $f$ 也在 $[a,b]$ 可积．

**证明** 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 的分割 $\tilde{P}$，满足

$$\Omega(f,\tilde{P}) = U(f,\tilde{P}) - L(f,\tilde{P}) < \varepsilon.$$

给 $\tilde{P}$ 添加分点，$\Omega(f,\tilde{P})$ 不会增加．不妨设 $\tilde{P}$ 的分点中已包括了 $a,b$ 两点．$\tilde{P}$ 在 $[a,b]$ 中的分点给出 $[a,b]$ 的一个分割，我们把这分割记为 $P$．则显然有

$$\Omega(f,P) \leqslant \Omega(f,\tilde{P}) < \varepsilon.$$

这证明了函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积． □

**定理 3** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并且单调，则 $f$ 在 $[a,b]$ 可积．

**证明** 设 $f$ 是单调上升的．对任意的 $\varepsilon>0$，可取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}.$$

只要 $[a,b]$ 的分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

满足

$$|P|<\delta,$$

就有

$$\Omega(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\delta\sum_{i=1}^{n}\omega_i$$

$$=\delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

$$=\delta[f(b)-f(a)]<\varepsilon.$$

这证明了 $f$ 的可积性.

对单调下降函数可作类似的讨论. □

**定理 4** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 $f$ 在 $[a,b]$ 可积.

**证明** 因为函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 一致连续，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $x',x''\in[a,b]$，$|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

考察 $[a,b]$ 的任意分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

只要 $|P|<\delta$，就有

$$\omega_i=M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a},\qquad i=1,\cdots,n.$$

对这样的 $P$ 就有

$$\Omega(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

$$=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

这证明了 $f$ 在 $[a,b]$ 的可积性. □

**定理5** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 有界，并且除去有限个间断点而外，在其他各点连续. 则 $f$ 在 $[a,b]$ 可积.

**证明** 设 $f$ 的间断点为 $c_1,c_2,\cdots,c_l$. 对任何事先给定的充分小的 $\eta>0$，取 $l$ 个开区间

$$J_k=(c_k-\eta,\ c_k+\eta),\quad k=1,\cdots,l.$$

这些开区间盖住了全体间断点. 在 $[a,b]$ 减去 $J_1,\cdots,J_l$ 所余下的有限个闭子区间上，函数 $f$ 是一致连续的. 因而存在 $\delta>0$，使得只要

$$x',x''\in[a,b]\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{l}J_k\right),\quad |x'-x''|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\eta.$$

取 $[a,b]$ 的分割 $P$，使得

$$|P|<\min\ \{\delta,\eta\}.$$

在分割 $P$ 的各闭子区间中，至多只有总长度不超过 $4l\eta$ 的一些子区间能与某个 $J_k$ 相交. 我们把和数 $\Omega(f,P)$ 分成两部分：

$$\Omega(f,P)=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_j{}''\omega_j\Delta x_j,$$

其中第一部分 $\sum'\omega_i\Delta x_i$ 所涉及的子区间$[x_{i-1},x_i]$不与任何 $J_k$ 相交，第二部分$\sum''\omega_j\Delta x_j$ 所涉及的每一子区间 $[x_{j-1},x_j]$ 都与某个 $J_k$ 相交. 对第一部分，应有 $\omega_i<\eta$. 对第二部分，应有 $\sum''\Delta x_j<4l\eta$. 于是

$$\begin{aligned}\Omega(f,P)&=\sum_i{}'\omega_i\Delta x_i+\sum_j{}''\omega_j\Delta x_j\\&<\eta\sum_i{}'\Delta x_i+\omega\sum_j{}''\Delta x_j\\&\leqslant\eta(b-a)+\omega\cdot4l\eta\\&=[(b-a)+4l\omega]\eta.\end{aligned}$$

对于任何事先给定的 $\varepsilon>0$，我们可以选取 $\eta$，使得

$$0<\eta<\frac{\varepsilon}{b-a+4l\omega}.$$

对这样的 $\eta$，按上述手续选取的 $P$ 就能满足：

$$\Omega(f,P)<[(b-a)+4l\omega]\eta<\varepsilon.$$

这证明了 $f$ 在 $[a,b]$ 可积． □

最后我们指出：改变函数 $f$ 在有限个点处的函数值，不影响 $f$ 的可积性，也不影响积分的值．请看下面的定理．

**定理 6** 设函数 $g$ 与函数 $f$ 都在闭区间 $[a,b]$ 有定义，并设除去在有限个点 $c_1,\cdots,c_l$ 而外，$g$ 与 $f$ 的函数值都相等，即

$$g(x)=f(x),\quad \forall x\in[a,b]\backslash\{c_1,\cdots,c_l\}.$$

如果 $f$ 在 $[a,b]$ 可积，那么 $g$ 也在 $[a,b]$ 可积，并且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 记

$$K=\max\{|g(c_1)-f(c_1)|,\cdots,|g(c_l)-f(c_l)|\}.$$

设 $P$ 是 $[a,b]$ 的任意分割，则这分割的各闭子区间之中，至多只有 $2l$ 个能含有某个 $c_k$．于是

$$|\sigma(g,P,\xi)-\sigma(f,P,\xi)|\leqslant 2lK|P|.$$

由此得知：当 $|P|\to 0$ 时，$\sigma(g,P,\xi)$ 与 $\sigma(f,P,\xi)$ 有相同的极限值．这证明了定理的结论． □

## §3 定积分看作积分上限的函数，牛顿-莱布尼兹公式的再讨论

为方便起见，不管 $a<b$ 或是 $a>b$，我们都用记号 $[a,b]$ 表示介于 $a$ 与 $b$ 之间（连同 $a,b$ 在内）的所有实数的集合，并仍称之为闭区间．

**引理** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积，并设

$$|f(x)|\leqslant K, \qquad \forall x\in[a,b],$$

则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant K|b-a|.$$

**证明** 先设 $a<b$. 则从

$$-K\leqslant f(x)\leqslant K, \qquad \forall x\in[a,b],$$

可得

$$-K(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant K(b-a),$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant K|b-a|.$$

再来看 $a>b$ 的情形. 这时应有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant K|a-b|\\&=K|b-a|.\end{aligned}$$ □

设 $f$ 在 $[a,b]$ 可积，则对任何 $x\in[a,b]$ 可以定义

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

（这里为了避免与积分上限相混淆，改用 $t$ 表示积分变元）. 换句话说，我们可以把定积分看做积分上限的函数.

**定理 1** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积，则函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 连续.

**证明** 可积函数是有界的. 设

$$|f(t)|\leqslant K, \quad \forall t\in[a,b].$$

对任意 $x_0\in[a,b]$，我们有

$$|\Phi(x)-\Phi(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant K|x-x_0|.$$

这证明了$\Phi$在 $x_0$ 点的连续性. □

**定理 2** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积, $x_0\in(a,b)$. 如果 $f$ 在 $x_0$ 点连续, 那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $x_0$ 点可导, 并且

$$\Phi'(x_0)=f(x_0).$$

**证明** 因为函数 $f$ 在 $x_0$ 点连续, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要

$$|t-x_0|<\delta,$$

就有

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是, 只要

$$x\in[a,b],\quad 0<|x-x_0|<\delta,$$

就有

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - f(x_0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t\right|$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\cdot\varepsilon|x-x_0| = \varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0). \qquad \square$$

用类似的办法可以证明: 对于 $a<b$ 的情形, 如果函数 $f$ 在

闭区间 $[a,b]$ 可积，在 $a$ 点右连续（在 $b$ 点左连续），那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在 $a$ 点右侧可导（在 $b$ 点左侧可导），并且

$$\Phi'_+(a)=f(a)\quad(\Phi'_-(b)=f(b)).$$

因此，如果函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就在闭区间 $[a,b]$ 连续可微，并且

$$\Phi'(x)=f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

对于以积分下限为变元的函数

$$\Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t,$$

也有相应的结果. 只要 $f$ 在 $[a,b]$ 可积，这样的函数就在$[a,b]$连续. 如果 $f$ 在 $x_0\in(a,b)$ 连续（在 $a$ 点右连续，或在 $b$ 点左连续），那么 $\Psi$ 就在 $x_0$ 点可导（在 $a$ 点右侧可导，或在 $b$ 点左侧可导），并且

$$\Psi'(x_0)=-f(x_0)$$

$$(\Psi'_+(a)=-f(a)\ \text{或}\ \Psi'_-(b)=-f(b)).$$

因此，如果函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，那么函数 $\Psi$ 就在闭区间 $[a,b]$ 连续可微，并且

$$\Psi'(x)=-f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

所有这些结果都可以仿照前面的讨论予以证明.

我们还可以考察如下形状的函数的可微性：

$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可微，并且满足条件

$$A\leqslant \begin{matrix}u(x)\\ v(x)\end{matrix}\leqslant B,\quad \forall x\in[a,b].$$

如果函数 $f$ 在闭区间 $[A,B]$ 连续，那么函数

$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

也就在闭区间 $[a,b]$ 可微．事实上，我们可以取 $c\in(A,B)$ 而把函数 $F(x)$ 表示为

$$F(x)=\int_{c}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_{c}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

上式右端的每一项都是可微函数的复合．因而函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可微分，并且根据复合函数的微分法则可得

$$F'(x)=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

利用上面讨论的结果，我们重新再来考察牛顿-莱布尼兹公式．记得在第六章§2中介绍牛顿-莱布尼兹公式的时候，当时为了便于证明，附加了“原函数存在”这一额外的条件．其实，根据本节已经进行了的讨论，我们能够作出这样的判断：任何连续函数都必定具有原函数．

我们将这一重要结论写成定理的形式．

**定理 3** 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则

$$\Phi(x)=\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

就是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数．由此可知，函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的任何一个原函数 $\Psi$ 都可以表示成如下的形式：

$$\Psi(x)=\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t+C,$$

这里的 $C$ 是一个常数．

在第五章§4中我们曾谈到，有不少初等函数，它们的原函数不能表示为初等函数．例如，以下这些不定积分就不能表示为初等函数：

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int \sin x^2\mathrm{d}x,\quad \int \cos x^2\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{x}{\ln x}dx.$$

但一个不定积分不能用初等函数来表示，绝不意味着这不定积分不存在．根据本节的讨论，我们看到：任何连续函数都具有原函数，这原函数可以用变动上限的定积分来表示．

本节的定理3，实际上蕴含了牛顿-莱布尼兹公式（第六章§2的定理1）．事实上，设 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，$F$ 是 $f$ 的任何一个原函数，则根据本节定理3应有

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx+C.$$

由此可得

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx,$$

也就是

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

## §4 积分中值定理的再讨论

下面的定理是第六章§1定理4的推广．

**定理1**（第一中值定理——一般形式） 设函数 $f$ 和 $g$ 在 $[a,b]$ 可积，并且满足以下条件

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad g(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in[a,b],$$

则有

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

特别地，如果 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，$g$ 在 $[a,b]$ 可积并且 $g(x)\geqslant 0$，$\forall x\in[a,b]$，那么

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $c$ 是$[a,b]$中适当的点.

**证明** 由定理的条件可得

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

乘积 $f(x)g(x)$ 也在 $[a,b]$ 可积. 利用积分的单调性就得到

$$(4.1)\qquad m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 那么在(4.1)式中可取

$$m=\min_{x\in[a,b]}f(x),\quad M=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

考察连续函数

$$\psi(x)=f(x)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

我们可以把(4.1)式写成

$$\min_{x\in[a,b]}\psi(x)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[a,b]}\psi(x).$$

根据连续函数的介值定理, 存在 $c\in[a,b]$, 使得

$$\psi(c)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

应用这定理于 $g(x)\equiv1$的情形, 我们重新得到第六章§1的定理 4: 设函数 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 可积 (因而 $f$ 在 $[a,b]$ 有界). 如果

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad \forall x\in[a,b],$$

那么

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

特别地，如果 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，那么存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

对这后一结论，可作如下的几何解释：由连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 所围成的图形的面积，等于以$[a,b]$为底，以$f(c)$为高的矩形的面积，这里 $c$ 是 $[a,b]$ 中适当的点（参看图 9－1）.

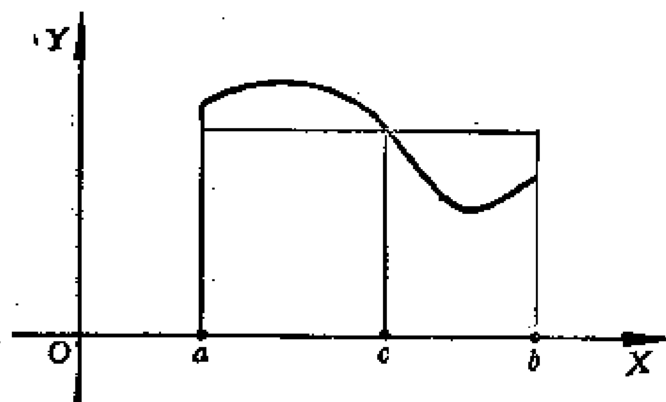



图 9－1

以下结论从几何上看也是明显的：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$单调下降并且非负，那么由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 所围成的图形的面积，应该等于以 $f(a)$ 为高，以 $[a,c]$ 为底的某个矩形的面积，这里 $c$ 是 $[a,b]$ 中适当的点（参看图 9－2）. 这一事实可证明如下：考察连续函数

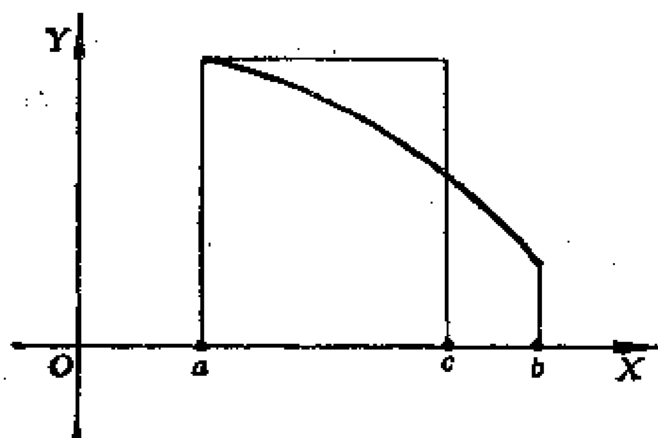



图 9－2

$$\psi(x)=f(a)(x-a).$$

因为

$$\psi(a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\psi(b),$$

所以存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\psi(c)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(c-a).$$

上述结果可以毫无困难地推广到以下情形：设 $f$ 在 $[a,b]$ 单调下降并且非负，$g$ 在 $[a,b]$ 可积并且非负，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

为证明这结论，只须考察连续函数

$$\psi(x)=f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

并验证

$$\psi(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\psi(b).$$

通过更细致的分析，人们发现，这里对 $g$ 所加的条件还可以放宽——函数 $g$ 非负的限制可以取消．这更一般的结果，就是所谓“第二中值定理”．

**定理Ⅱ₁**（第二中值定理的一种情形） 设函数 $f$ 在$[a,b]$单调下降并且非负，函数 $g$ 在 $[a,b]$ 可积，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 考察连续函数

$$\psi(x)=f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

从前面的分析得到启发，我们试图证明

$$\min_{x\in[a,b]}\psi(x)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[a,b]}\psi(x).$$

为此，作一些技术性的变换．

对于 $[a,b]$ 的任意分割

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

我们有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由此得到

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})||g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant L\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i,$$

这里 $L$ 是 $|g(x)|$ 在 $[a,b]$ 的上界. 从这估计可知，当 $|P|\to 0$ 时，应当有

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x\to\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

我们来证明

$$\min_{x\in[a,b]}\psi(x)\leqslant\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\max_{x\in[a,b]}\psi(x).$$

为此，引入记号

$$G(x)=\int_a^x g(x)\mathrm{d}x,$$

并作如下变换:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i)-\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)G(x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})G(x_i)-\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]G(x_i)+f(x_n)G(x_n).$$

因为

$$f(x_{i-1})-f(x_i)\geqslant 0,\qquad f(x_n)\geqslant 0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]G(x_i)+f(x_n)G(x_n)$$

$$\geqslant\left\{\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]+f(x_n)\right\}\min_{x\in[a,b]}G(x)$$

$$=f(a)\min_{x\in[a,b]}G(x).$$

同样可证

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)\max_{x\in[a,b]}G(x).$$

我们证明了不等式

$$f(a)\min_{x\in[a,b]}G(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant f(a)\max_{x\in[a,b]} G(x),$$

即

$$\min_{x\in[a,b]}\psi(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\max_{x\in[a,b]}\psi(x).$$

在这式子中让 $|P|\to 0$ 取极限，就得到

$$\min_{x\in[a,b]}\psi(x)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\max_{x\in[a,b]}\psi(x).$$

因此，存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\psi(c)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

也就是

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**注记** 在定理 $\mathrm{II}_1$ 的证明中，关键的一步是作这样的变换：

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]G(x_i)+f(x_n)G(x_n).$$

一般地，对于任意实数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $B_0,B_1,\cdots,B_n$，我们有这样的恒等式：

$$\text{(A)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}(B_i-B_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)B_i+\alpha_nB_n-\alpha_0B_0.$$

这式又可以写成

$$\text{(A}'\text{)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}\Delta B_i=\alpha_iB_i\Big|_{i=0}^{n}-\sum_{i=1}^{n}B_i\Delta\alpha_i$$

$$(\Delta B_i=B_i-B_{i-1},\quad \Delta\alpha_i=\alpha_i-\alpha_{i-1}),$$

与分部积分的公式相类比，我们把恒等式(A)或者（A′）称做分部求和公式（或称 Abel 和差变换公式）.

**定理Ⅱ₂**（第二中值定理的另一种情形）　设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 单调上升并且非负，函数 $g$ 在 $[a,b]$ 可积，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**　记 $f_1(x)=f(-x)$，$g_1(x)=g(-x)$，则 $f_1(x)$ 在 $[-b,-a]$ 单调下降并且非负，$g_1(x)$ 在 $[-b,-a]$ 可积. 于是，根据定理 Ⅱ₁，存在 $-c\in[-b,-a]$，使得

$$\int_{-b}^{-a} f_1(x)g_1(x)\mathrm{d}x=f_1(-b)\int_{-b}^{-c} g_1(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.\qquad\square$$

**定理Ⅱ**（第二中值定理——一般情形）　设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 单调，函数 $g$ 在 $[a,b]$ 可积，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**　设 $f$ 是单调下降的，则 $f(x)-f(b)$ 单调下降并且非负. 于是，根据定理 Ⅱ₁，存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b [f(x)-f(b)]g(x)\mathrm{d}x=[f(a)-f(b)]\int_a^c g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对 $f$ 单调上升的情形，可作类似的讨论.　　$\square$

**注记**　设函数 $f$ 和 $g$ 满足定理 Ⅱ₁ 的条件. 又设 $A\in\mathbb{R}$ 满足

$$A\geqslant f(a+).$$

如果令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} A, & x=a \\ f(x), & x\in(a,b], \end{cases}$$

那么 $\tilde{f}$ 和 $g$ 也满足定理 $\mathrm{II}_1$ 的条件，因而存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b \tilde{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\tilde{f}(a)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+)\int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

（请注意，对各种不同的情形，相应的 $c$ 也不一样．但为了记号简便，我们仍用同样的字母表示．）

对于定理 $\mathrm{II}_2$ 和一般的定理 II，也可作类似的讨论．例如，对于 $f$ 在 $[a,b]$ 单调上升并且非负的情形，存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b-)\int_c^b g(x)\mathrm{d}x.$$

## §5 定积分的近似计算

设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 可积．如果知道了 $f$ 的原函数，那么当然可以利用牛顿-莱布尼兹公式来计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．但对许多情况来说，或者 $f$ 的原函数不易求得，或者所求出的原函数表示很复杂．这时用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分就不方便了．特别是在许多实际问题中，对于所涉及的被积函数，人们只知道按一定间隔测量而得的离散数值，并不了解其分析表示式．这时

就更无可能通过原函数来计算定积分了．但按照定积分的定义，它是积分和的极限．人们可以用适当的积分和来作为定积分的近似值．这就发展出各种数值积分法．本节对数值积分的某些方法作一个简单的介绍．

**5.a 矩形公式、梯形公式与抛物线公式**

为了计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，我们作区间 $[a,b]$ 的分割

$$P: \ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

为了便于作近似计算，可以采取等距分割的办法，即令

$$x_i=a+i\,\frac{b-a}{n},\qquad i=0,1,\cdots,n.$$

所求的定积分可以表示成 $n$ 项之和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x.$$

在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上，用较简单的图形的面积来代替 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$，这是定积分近似计算的基本想法．为了叙述方便，我们把这类较简单的图形叫做**基本图形**．基本图形的面积应该是很容易计算的．选取适当的矩形，适当的梯形，或者适当的以抛物线为顶的条形作为基本图形，我们分别得到近似计算积分的矩形公式、梯形公式与抛物线公式．

**矩形公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx R_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right).$$

**梯形公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\Delta x_i$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)].$$

**抛物线公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx S_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\lambda_i x^2+\mu_i x+\nu_i)\mathrm{d}x,$$

这里，我们选择系数 $\lambda_i, \mu_i, \nu_i (i=1,\cdots,n)$，使得抛物线 $y=\lambda_i x^2 + \mu_i x+\nu_i$ 通过以下三点：

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})),\quad \left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}, f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\right),\quad (x_i, f(x_i)).$$

计算得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\lambda_i x^2+\mu_i x+\nu_i)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\lambda_i(x_i^3-x_{i-1}^3)+\frac{1}{2}\mu_i(x_i^2-x_{i-1}^2)+\nu_i(x_i-x_{i-1})$$

$$= \left[\frac{1}{3}\lambda_i(x_i^2+x_i x_{i-1}+x_{i-1}^2)\right.$$

$$\left. +\mu_i\frac{x_i+x_{i-1}}{2}+\nu_i\right](x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{1}{6}[2\lambda_i(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)$$
$$+3\mu_i(x_i+x_{i-1})+6\nu_i](x_i-x_{i-1})$$
$$=\frac{1}{6}\Big\{(\lambda_ix_i^2+\mu_ix_i+\nu_i)$$
$$+4\left[\lambda_i\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^2+\mu_i\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+\nu_i\right]$$
$$+(\lambda_ix_{i-1}^2+\mu_ix_{i-1}+\nu_i)\Big\}(x_i-x_{i-1})$$
$$=\frac{1}{6}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f(x_{i-1})\right]\Delta x_i.$$

于是，按照抛物线公式，积分近似地表示为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx S_n,$$

这里

$$S_n=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f(x_{i-1})\right]\Delta x_i$$
$$=\frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+f(x_{i-1})\right].$$

我们看到，抛物线公式是矩形公式与梯形公式的线性组合

$$S_n=\frac{2}{3}R_n+\frac{1}{3}T_n.$$

**注记** 我们这里介绍的矩形公式，取区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中点的函数值 $f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)$ 作为矩形的高．通常称这种矩形公式为中点矩形公式或中矩形公式．实际用于计算的，除了中矩形公式而外，还有左矩形公式和右矩形公式等．

抛物线公式又称为辛卜生（Simpson）公式．

## 5.b 误差估计

为了估计上段中所列各近似积分公式的误差，需要考察

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$

和

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_{i-1})\right](x_i - x_{i-1}).$$

为书写简单起见，我们记

$$c = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \qquad h = \frac{x_i - x_{i-1}}{2},$$

$$\psi(u) = \int_{c-u}^{c+u} f(x)\mathrm{d}x.$$

显然有

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(u) = f(c+u) + f(c-u).$$

通过简单的演算即可得到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x = \psi(h),$$

$$f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = h\psi'(0),$$

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = h\psi'(h),$$

$$\frac{1}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(x_{i-1})\right](x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})\right] +$$

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})\right]$$

$$=\frac{2}{3}h\psi'(0)+\frac{1}{3}h\psi'(h).$$

所要考察的三个式子可以分别写成

$$\psi(h)-h\psi'(0),\qquad \psi(h)-h\psi'(h)$$

和

$$\psi(h)-\frac{2}{3}h\psi'(0)-\frac{1}{3}h\psi'(h).$$

我们将利用积分形式余项的泰勒公式来估计这些式子．为了这个目的，进一步计算 $\psi(u)$ 的各阶导数：

$$\psi''(u)=f'(c+u)-f'(c-u),$$
$$\psi'''(u)=f''(c+u)+f''(c-u),$$
$$\psi^{(4)}(u)=f'''(c+u)-f'''(c-u),$$
$$\psi^{(5)}(u)=f^{(4)}(c+u)+f^{(4)}(c-u).$$

另外，还引入记号

$$M_k=\sup_{x\in[a,b]}|f^{(k)}(x)|.$$

**矩形公式的误差估计**

考察单条矩形公式

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\approx f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)(x_i-x_{i-1}).$$

用上面介绍的记号，这公式可以写成

$$\psi(h)\approx h\psi'(0).$$

我们来估计其误差

$$\psi(h)-h\psi'(0).$$

为此写出积分形式余项的泰勒公式

$$\psi(h)=\psi(0)+h\psi'(0)+\frac{h^2}{2}\psi''(0)$$

$$+\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\psi'''(th)\mathrm{d}t.$$

注意到 $\psi(0)=\psi''(0)=0$，即得到

$$\psi(h)-h\psi'(0)=\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\psi'''(th)\mathrm{d}t,$$

$$|\psi(h)-h\psi'(0)|\leqslant\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2|\psi'''(th)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{h^3}{2}\sup_{0\leqslant u\leqslant h}|\psi'''(u)|\int_0^1(1-t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h^3}{6}\sup_{0\leqslant u\leqslant h}|\psi'''(u)|\leqslant\frac{h^3}{3}M_2.$$

回忆起

$$\psi(u)=\int_{c-u}^{c+u}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$c=\frac{x_i+x_{i-1}}{2},\qquad h=\frac{x_i-x_{i-1}}{2},$$

我们得到

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)(x_i-x_{i-1})\right|\leqslant\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{24}M_2.$$

由此可进一步得到

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-R_n\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2.$$

这样，关于矩形公式的误差估计，我们证明了以下结果：

**定理1** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数，

$$M_2=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,$$

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\qquad i=0,1,\cdots,n,$$

则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2.$$

**梯形公式的误差估计**

考察单条梯形公式

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1}).$$

它可以写成

$$\psi(h)\approx h\psi'(h).$$

我们来估计其误差

$$\psi(h)-h\psi'(h).$$

把 $\psi$ 和 $\psi'$ 都按泰勒公式展开得：

$$\psi(h)=h\psi'(0)+\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\psi''(th)\mathrm{d}t,$$

$$\psi'(h)=\psi'(0)+h^2\int_0^1(1-t)\psi''(th)\mathrm{d}t.$$

由此得到

$$\psi(h)-h\psi'(h)=h^3\int_0^1\left[\frac{1}{2}(1-t)^2-(1-t)\right]\psi''(th)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t^2)\psi''(th)\mathrm{d}t,$$

$$|\psi(h)-h\psi'(h)|\leqslant\frac{h^3}{2}\sup_{0\leqslant u\leqslant h}|\psi''(u)|\int_0^1(1-t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h^3}{3}\sup_{0\leqslant u\leqslant h}|\psi''(u)|\leqslant\frac{2h^3}{3}M_2,$$

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})\right|\leqslant\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{12}M_2,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-T_n\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

这样，关于梯形公式的误差估计，我们得到

**定理2** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数,

$$M_2=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,$$

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\qquad i=0,1,\cdots,n,$$

则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

**抛物线公式的误差估计**

函数 $\psi(u)$ 的各偶数阶导数在 $u=0$ 处都为0．因此，差 $\psi(h)-h\psi'(0)$ 和 $\psi(h)-h\psi'(h)$ 都是 $h^3$ 阶的小量．再来考察

$$\psi(h)-\frac{2}{3}h\psi'(0)-\frac{1}{3}h\psi'(h),$$

我们发现其中的三阶项正好抵消掉，这差为 $h^5$ 阶的小量．正因为如此，抛物线公式比矩形公式和梯形公式更为精确．

事实上，我们有

$$\psi(h)=h\psi'(0)+\frac{h^3}{3!}\psi'''(0)+\frac{h^5}{4!}\int_0^1(1-t)^4\psi^{(5)}(th)\mathrm{d}t,$$

$$\psi'(h)=\psi'(0)+\frac{h^2}{2!}\psi'''(0)+\frac{h^4}{3!}\int_0^1(1-t)^3\psi^{(5)}(th)\mathrm{d}t,$$

$$\psi(h)-\frac{2h}{3}\psi'(0)-\frac{h}{3}\psi'(h)$$

$$=-\frac{h^5}{3!}\int_0^1\left[\frac{1}{3}(1-t)^3-\frac{1}{4}(1-t)^4\right]\psi^{(5)}(th)\mathrm{d}t.$$

由此得到

$$\left|\psi(h)-\frac{2h}{3}\varphi'(0)-\frac{h}{3}3\psi'(h)\right|$$

$$\leqslant \frac{h^5}{3!} \sup_{0 \leqslant u \leqslant h} |\psi^{(5)}(u)| \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}(1-t)^3 - \frac{1}{4}(1-t)^4 \right] dt$$

$$= \frac{h^5}{180} \sup_{0 \leqslant u \leqslant h} |\psi^{(5)}(u)|$$

$$\leqslant \frac{h^5}{90} M_4,$$

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{1}{6} \left[ f(x_i) + 4f\left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(x_{i-1}) \right] (x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant \frac{(x_i - x_{i-1})^5}{2880} M_4,$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4.$$

这样，关于抛物线公式的误差估计，我们得到

**定理3** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有 4 阶连续导数，

$$M_4 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(4)}(x)|,$$

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, 1, \cdots, n,$$

则有

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M_4,$$

这里

$$S_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[ f(x_i) + 4f\left( \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) + f(x_{i-1}) \right].$$

## §6 瓦利斯公式与司特林公式

瓦利斯（Wallis）公式把 $\frac{\pi}{2}$ 表示为有理数列的极限：

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right]^2.$$

司特林（Stirling）公式给出 $n$ 充分大时 $n!$ 的渐近表示式：

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}\quad(n\to+\infty).$$

这两个公式的陈述都不涉及定积分．之所以把这两公式放在本章里介绍，是因为我们的证明用到定积分作为工具．

### 6.a 瓦利斯公式的证明

先来计算定积分

$$J_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

利用分部积分公式可得

$$J_m=-\int_0^{\pi/2}\sin^{m-1}x\,d\cos x$$

$$=-(\sin^{m-1}x)\cos x\Big|_0^{\pi/2}+(m-1)\int_0^{\pi/2}(\sin^{m-2}x)\cos^2x\,dx$$

$$=(m-1)\int_0^{\pi/2}(\sin^{m-2}x)(1-\sin^2x)d\,x$$

$$=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m.$$

由此得到递推公式

$$J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

按照这递推公式，区别 $m$ 为奇数与 $m$ 为偶数的情形，$J_m$ 的计算最后归结到：

$$J_0=\int_0^{\pi/2}1d\,x=\frac{\pi}{2},$$

$$J_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,d\,x=1.$$

这样，我们得到

$$J_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1}=\frac{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1},$$

$$n=0,1,2,\cdots.$$

如果引入记号 $m!!$ 表示那些不超过 $m$ 而又与 $m$ 同奇偶性的自然数的乘积，那么我们可以把 $J_m$ 表示为

$$J_m=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{如果 } m \text{ 为偶数,}\\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{如果 } m \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

在作了以上准备之后，我们来证明瓦利斯公式。对于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，以下不等式显然成立：

$$\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x.$$

从 0 到 $\pi/2$ 积分就得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx.$$

由此得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

$$\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

我们来估计上式两端式子之差：

$$\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\leqslant\frac{\pi}{4n}.$$

由此可知

$$\lim\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\lim\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$

这就证明了瓦利斯公式：

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

### 6.b 司特林公式

在理论研究与实际应用中，常常需要估计 $n!$ 的无穷大的阶．一个比较容易得到的估计是：$n!$ 的无穷大的阶介于 $n^n e^{-n}$ 的阶与 $n^{n+1}e^{-n}$ 的阶之间．为说明这一事实，需要利用以下熟知的不等式

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

也就是

$$\frac{(k+1)^k}{k^k}<e<\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}.$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 写出上面的不等式，然后将这些不等式两端分别相乘，我们得到

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}<e^{n-1}<\frac{n^n}{(n-1)!}.$$

由此即可得到

$$en^n e^{-n}<n!<en^{n+1}e^{-n}.$$

司特林公式进一步指出，$n!$ 的无穷大的阶相当于 $n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$．这公式断定

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n=\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

下面，我们就来证明司特林公式．证明中需要用到这样一个不等式

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

为了证明这不等式，我们将利用上节中为估计近似积分的误差而推导的几个公式：对于

$$\psi(u)=\int_{c-u}^{c+u} f(x)\mathrm{d}x$$

应有

$$\psi(h)-h\psi'(0)=\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\psi''(th)\mathrm{d}t,$$

$$\psi(h)-h\psi'(h)=-\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t^2)\psi''(th)\mathrm{d}t.$$

如果

$$f''(x)>0,\quad \forall x\in[c-h,c+h],$$

那么

$$\psi''(u)=f''(c+u)+f''(c-u)>0,\quad \forall u\in[0,h].$$

于是有

$$h\psi'(0)<\psi(h)<h\psi'(h). \tag{6.1}$$

这不等式说明，对于下凸函数，定积分的准确值大于按照(中点)矩形公式计算的近似值，小于按照梯形公式计算的近似值.

现在考察这样的情形

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad c=n+\frac{1}{2},\quad h=\frac{1}{2}.$$

我们有

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}>0,\quad \forall x>0,$$

$$\psi(h)=\int_{c-h}^{c+h} f(x)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\psi'(0)=2f(c)=\frac{2}{n+\frac{1}{2}},$$

$$\psi'(h)=f(c+h)+f(c-h)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}.$$

对这情形，不等式 (6.1) 成为

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right).$$

由此得到

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)},$$

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)},$$

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

我们来考察数列

$$a_n=\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}.$$

显然有

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1.$$

利用上面证明的不等式即得到

$$0<\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

我们看到：序列 $a_n$ 严格单调下降，而序列 $a_ne^{-\frac{1}{4n}}$ 严格单调上升，并且显然有

$$a_ne^{-\frac{1}{4n}}<a_n$$

和

$$\begin{aligned}0&<a_n-a_ne^{-\frac{1}{4n}}\\&=a_n\left(1-e^{-\frac{1}{4n}}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant a_1(1-e^{-\frac{1}{4n}}) \to 0.$$

由闭区间套原理可知：存在唯一实数 $a$，满足

$$a_n e^{-\frac{1}{4n}} < a < a_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

我们证明了

(6.2) $$n! \sim a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n\to+\infty).$$

为了求得 $a$ 的具体数值，我们将利用瓦利斯公式：

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

$$= \lim \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$= \lim \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$= \lim \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}^2$$

从 (6.2) 式得到

$$n! \sim a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \qquad (2n)! \sim a(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}.$$

将 $n!$ 与 $(2n)!$ 的渐近等价表示式代入瓦利斯公式就得到

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n} a^2 n^{2n+1} e^{-2n}}{a(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}\right\}^2$$

$$= \lim \frac{1}{2n+1}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\, a\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4},$$

从而得到

$$a = \sqrt{2\pi},$$

这样，我证明了们司特林公式

$$\lim \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}=\sqrt{2\pi},$$

也就是

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}$$

或者

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

我们实际上证明了

$$a_n e^{-\frac{1}{4n}}<\sqrt{2\pi}<a_n,$$

也就是

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{4n}}.$$

若记

$$\theta=\theta_n=4n\ln\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

则有

$$0<\theta<1.$$

于是，司特林公式又可以写成

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{4n}},\quad 0<\theta<1.$$

对上面的证明稍作改进，可以得到更精细的表示式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\tilde{\theta}}{12n}},\quad 0<\tilde{\theta}<1.$$

我们把这部分讨论放在附录中.

## 附　录

设函数 $f$ 在 $[c-h,c+h]$ 有 4 阶连续导数，记

$$\psi(u)=\int_{c-u}^{c+u}f(x)\mathrm{d}x.$$

上一节中讨论矩形公式与抛物线公式的误差时，曾导出以下二式

$$\psi(h)-h\psi'(0)=\frac{h^3}{2}\int_0^1(1-t)^2\psi'''(th)\mathrm{d}t,$$

$$\psi(h)-\frac{2}{3}h\psi'(0)-\frac{1}{3}h\psi'(h)$$

$$=-\frac{h^5}{3!}\int_0^1\left[\frac{1}{3}(1-t)^3-\frac{1}{4}(1-t)^4\right]\psi^{(5)}(th)\mathrm{d}t.$$

对于

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad c=n+\frac{1}{2},\quad h=\frac{1}{2},$$

我们有

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}>0,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}>0,\qquad \forall x>0;$$

$$\psi'''(u)=f''(c+u)+f''(c-u)>0,$$

$$\psi^{(5)}(u)=f^{(4)}(c+u)+f^{(4)}(c-u)>0,\qquad \forall u\in[0,h].$$

因而

$$h\psi'(0)<\psi(h)=\int_{c-h}^{c+h}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{2h}{3}\psi'(0)+\frac{h}{3}\psi'(h),$$

即

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)},$$

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)},$$

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{3}\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)}-1\right].$$

我们证明了不等式

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

从这一不等式出发，重复前面进行过的讨论，即可证明：

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\bar{\theta}}{12n}},\qquad 0<\bar{\theta}<1.$$

# 第十章　广义积分

## §1　广义积分的概念

在第六章和第九章中，我们讨论了作为积分和的极限的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sigma(f,P,\xi).$$

为了构造积分和，就要限制积分区间 $[a,b]$ 是有界的；为了积分和具有有穷的极限，又必须限制被积函数 $f$ 是有界的．

本章定义的广义积分，将从两方面突破原有的限制．我们将讨论展布于无界区间上的积分（具有无穷积分限的积分——简称无穷限积分）以及无界函数的积分（瑕积分）．

### 1.a　具有无穷积分限的积分

**定义 1**　设函数 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，并设对任何 $H>a$，这函数在 $[a,H]$ 可积（按照第六章中给出的定义可积，或曰常义可积）．如果存在有穷极限

$$\lim_{H\to+\infty}\int_a^H f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.1}$$

那么我们就说函数 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 广义可积，或者说无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并把极限值 (1.1) 定义为广义积分的值，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty}\int_a^H f(x)\mathrm{d}x.$$

不收敛的积分称为发散积分. 如果极限值 (1.1) 为$+\infty$ (或$-\infty$), 那么我们也说积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散于 $+\infty$ (或$-\infty$), 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty \text{ (或} -\infty\text{)}.$$

**注记** 对下限为$-\infty$的积分, 可作类似的讨论. 我们定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H'\to-\infty}\int_{H'}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**定义 2** 设函数 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义. 如果存在 $c\in(-\infty,+\infty)$, 使得积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛, 那么我们就说积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 并定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

为了说明这定义的合理性, 必须指出所定义的积分值不依赖于 $c$ 的选择. 事实上, 如果$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 那么对任何 $c'\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$\int_{c'}^H f(x)\mathrm{d}x = \int_{c'}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^H f(x)\mathrm{d}x,$$

因而$\int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，并且

(1.2) $$\int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{c'}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

同样，如果$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么对于任何 $c'\in(-\infty,+\infty)$ 也有$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

(1.3) $$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{c'} f(x)\mathrm{d}x.$$

从 (1.2) 和 (1.3) 两式即可得到

$$\int_{-\infty}^{c'} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

**注记** 按照定义，为了考察函数 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的可积性，必须检验以下两个极限是否存在并且有限：

$$\lim_{H\to+\infty}\int_{c}^{H} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{H'\to-\infty}\int_{H'}^{c} f(x)\mathrm{d}x.$$

请注意，这里的极限过程 $H\to+\infty$ 与 $H'\to-\infty$ 是彼此独立的。我们实际上是要检验以下极限是否存在并有限：

$$\lim_{\substack{H\to+\infty\\ H'\to-\infty}}\int_{H'}^{H} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果只考虑展布在对称区间 $[-H,H]$ 上的积分的极限：

(1.4) $$\lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H} f(x)\mathrm{d}x,$$

那就定义了另一种在较弱意义下的收敛性．如果极限 (1.4) 存在并且有限，那么我们就说广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$在柯西主值意义

下收敛，并把极限值（1.4）称为广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的柯西主值，记为

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x.$$

**1.b 瑕积分**

本段讨论某些无界函数的积分．我们主要考察以下两种典型情形，以及可以归结为这两种情形的更一般的情形．

情形 1　函数 $f$ 在 $[a,b)$ 有定义，并且对任何 $0<\eta<b-a$，这函数在 $[a,b-\eta]$ 常义可积．对这种情形，函数 $f$ 只可能在 $b$ 点邻近无界．如果 $f$ 在 $b$ 点邻近无界，那么我们就说 $b$ 是 $f$ 的一个瑕点．

情形 2　函数 $f$ 在 $(a,b]$ 有定义，并且对任何$0<\eta<b-a$，这函数在 $[a+\eta,b]$ 常义可积．对这种情形，$a$ 点是可能的瑕点．

**定义 3**　设函数 $f$ 在$[a,b)$有定义，并设对任何 $0<\eta<b-a$，这函数在 $[a,b-\eta]$ 常义可积．如果存在有穷的极限

$$\lim_{\eta\to0+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

那么我们就说 $f$ 在 $[a,b)$广义可积，或者说积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$收敛，并把极限值（1.5）定义为广义积分的值，即定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x.$$

**注记**　关于在下限 $a$ 处有瑕点的函数 $f$ 的广义积分，可以用类似的方式来定义：

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

**定义 4** 设 $a<c<b$，函数 $f$ 在 $[a,c)$ 和 $(c,b]$ 有定义，并设对任何 $0<\eta<c-a$，$0<\eta'<b-c$，这函数在 $[a,c-\eta]$ 和 $[c+\eta',b]$ 常义可积．如果积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么我们就说广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**注记** 按照定义，为了考察有唯一瑕点 $c\in(a,b)$ 的函数 $f$ 在 $[a,b]$ 的广义可积性，必须检验以下两个极限是否存在并且有限：

$$\lim_{\eta\to0+}\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{\eta'\to0+}\int_{c+\eta'}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

请注意，这里的两个极限过程 $\eta\to0+$ 与 $\eta'\to0+$ 是彼此独立的．如果只考虑 $c-\eta$ 和 $c+\eta$ 从 $c$ 的两侧对称地趋于 $c$ 的情形，只检验是否存在有穷的极限

$$\lim_{\eta\to0+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right), \tag{1.6}$$

那么就定义了另一种在较弱意义下的收敛性——柯西主值意义下的收敛性，这时我们把极限值（1.6）称为广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的**柯西主值**，记为

$$\mathrm{VP}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\left(\int_a^{c-\eta}+\int_{c+\eta}^b\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

## §2 牛顿-莱布尼兹公式的推广，分部积分公式与换元积分公式

我们将牛顿-莱布尼兹公式推广到广义积分的情形.

**定理 1** 设函数 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义并且连续，而函数 $F$ 是 $f$ 在 $[a,+\infty)$的原函数. 如果存在（有穷或无穷）的极限

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \quad (\text{这极限记为 } F(+\infty)),$$

那么就有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

**证明** 对任意 $H>a$，我们有

$$\int_a^H f(x)\mathrm{d}x = F(H) - F(a).$$

让 $H\to+\infty$取极限，我们得到

$$\lim_{H\to+\infty}\int_a^H f(x)\mathrm{d}x = \lim_{H\to+\infty} F(H) - F(a),$$

即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \qquad \square$$

**注记** 对于积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

也有相应的牛顿-莱布尼兹公式. 其证明与定理 1 类似，这里就不再重复了，仅将结论陈述如下：

设函数 $f$ 在 $(-\infty,b]$ 连续，函数 $F$ 是 $f$ 在 $(-\infty,b]$ 的原函数. 如果存在极限

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty),$$

那么

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^b.$$

设函数 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，函数 $F$ 是 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的原函数. 如果存在极限

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty) \quad 和 \quad \lim_{x\to-\infty} F(x)=F(-\infty),$$

并且 $F(+\infty)-F(-\infty)$ 有意义（即 $F(+\infty)$ 与 $F(-\infty)$ 不为同号无穷大），那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(+\infty)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

关于瑕积分，也有相应的牛顿-莱布尼兹公式. 例如，对于以 $b$ 点为瑕点的积分，我们有：

**定理 2** 设函数 $f$ 在 $[a,b)$ 连续，函数 $F$ 是 $f$ 在 $[a,b)$ 的原函数. 如果存在极限

$$\lim_{x\to b-} F(x)=F(b-),$$

那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-)-F(a).$$

对于广义积分(无穷限积分和瑕积分)，也有分部积分公式. 例如，对于无穷上限的积分，我们有：

**定理 3** 设 $u,v\in C^1[a,+\infty)$，则

$$\int_a^{+\infty} u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} v(x)\mathrm{d}u(x).$$

（这就是说：如果上式右端的式子有意义，那么上式左端也有意义，并且等于右端的值.）

**证明** 我们有常义积分的分部积分公式

$$\int_a^H u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^H-\int_a^H v(x)\mathrm{d}u(x).$$

在这式中让 $H\to+\infty$，就得到要证的结果. □

对常义积分的换元公式取极限，可以证明广义积分的换元公式. 例如，对于以上限为瑕点的积分，我们有：

**定理 4** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 有连续导数. 如果 $\varphi'(t)>0$，$\forall t\in(\alpha,\beta)$，$\varphi((\alpha,\beta))$

$\subset(a,b)$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta-)=b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(这就是说：如果上式右端的式子有意义，那么左端的式子也有意义，并且等于右端的值).

**证明** 对任何 $h\in(0,b-a)$，记

$$\eta=\beta-\varphi^{-1}(b-h).$$

于是有

$$\varphi^{-1}(b-h)=\beta-\eta$$

及

$$\lim_{h\to0+}\eta=0.$$

利用定积分的换元公式可得

$$\int_a^{b-h} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^{\varphi^{-1}(b-h)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_\alpha^{\beta-\eta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

在这式中让 $h\to0+$ 取极限就得到要证的结果. □

下面介绍广义积分的一些例子.

**例1** 设质量为 $m$ 的火箭从地面发射. 试求这火箭飞离地球引力范围所需做的功.

**解** 记地球的半径为 $R$，则在离地心距离为 $r$ 的地方，火箭所受到的地球引力 $F$ 应满足

$$\frac{F}{mg}=\frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{R^2}}.$$

由此得到

$$F=\frac{mgR^2}{r^2}.$$

于是，这火箭飞离地球引力范围所需做的功为

$$W=\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\lim_{r\to+\infty} mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)=mgR.$$

如果火箭达到速度 $v$ 之后就熄火靠惯性继续飞行，为使这火箭能飞离地球引力范围，它的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 至少要等于克服地球引力所需的功 $mgR$：

$$\frac{1}{2}mv^2=mgR.$$

由此可知，速度 $v$ 至少为

$$v=\sqrt{2gR}.$$

以

$$g=9.81\mathrm{m/s^2},\qquad R=6371\times10^3\mathrm{m}$$

代入上式，我们求得

$$v=11.2\times10^3\mathrm{m/s}.$$

每秒 11.2km——这就是物体从地面飞出地球引力圈所必须具有的速度．人们把这样一个速度叫做第二宇宙速度。

**例 2** 我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

如果作变元替换 $x=\operatorname{tg}t$，那么这积分就转化为常义积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

**例 3** 我们有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

如果作变元替换 $x=\sin t$，那么这积分也转化为常义积分：

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

**例 4** 计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\quad(a>0).$$

**解** 函数 $f(x)=e^{-ax}\sin bx$ 的原函数为：

$$F(x)=-e^{-ax}\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}+C,$$

因而

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\ \sin\ bx\ \mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^{+\infty}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

**例5** 计算积分

$$\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x.$$

**解** 据牛顿-莱布尼兹公式，我们得到

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1.$$

**例6** 考察积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\qquad(a>0).$$

**解** 因为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\ln x+C, & \text{若 } p=1,\\ \dfrac{-1}{(p-1)x^{p-1}}+C, & \text{若 } p\neq1,\end{cases}$$

所以

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & \text{若 } p\leqslant1,\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & \text{若 } p>1.\end{cases}$$

我们看到：所给的积分当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant1$ 时发散. 例如，以下积分都收敛：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},\qquad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}},$$

而以下的积分都是发散的：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x},\qquad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$

**例 7** 考察积分

$$\int_0^b \frac{dx}{x^q}.$$

**解** 因为

$$\int \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} \ln x + C, & 若\ q = 1, \\ \dfrac{1}{1-q} x^{1-q} + C, & 若\ q \neq 1, \end{cases}$$

所以

$$\int_0^b \frac{dx}{x^q} = \begin{cases} +\infty, & 若\ q \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-q} b^{1-q}, & 若\ q < 1. \end{cases}$$

我们看到：所给的积分当 $q<1$ 时收敛，而当 $q\geq 1$ 时发散．例如，以下积分收敛：

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},$$

而以下积分发散：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

**例 8** 与上一例的情形类似，容易求得

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \begin{cases} +\infty, & 若\ q \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}, & 若\ q < 1. \end{cases}$$

因而瑕积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geq 1$ 时发散．

**例 9** 与上两例的情形类似，容易求得

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q} = \begin{cases} +\infty, & 若\ q \geq 1, \\ \dfrac{1}{1-q}(b-a)^{1-q}, & 若\ q < 1. \end{cases}$$

因而瑕积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^q}$$

当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

**例10** 从上面的讨论可知，积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

是发散的. 但这积分在柯西主值意义下收敛：

$$\begin{aligned}\mathrm{VP}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}&=\lim_{\eta\to0+}\left(\int_{-1}^{-\eta}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\eta}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\\&=\lim_{\eta\to0+}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\eta}-\ln|x|\Big|_{1}^{\eta}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

**例11** 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$$

发散. 但这积分在柯西主值意义下收敛：

$$\int_{-H}^{H}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{-H}^{H}=0,$$

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{H\to+\infty}\int_{-H}^{H}\sin x\,\mathrm{d}x=0.$$

## §3 广义积分的收敛原理及其推论

按照定义，广义积分

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

是下面的函数当 $H\to+\infty$ 时的极限：

$$\Phi(H)=\int_{a}^{H}f(x)\mathrm{d}x.$$

依据关于函数极限的收敛原理，这极限存在并且有穷的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>0$，使得只要 $H'\geqslant H>\Delta$，就有

$$|\Phi(H)-\Phi(H')|<\varepsilon.$$

我们把这陈述为：

**无穷限积分的收敛原理** 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>0$，使得只要 $H'\geqslant H>\Delta$，就有

$$\left|\int_H^{H'} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

利用这收敛原理，容易证明以下的比较判别法则

**无穷限积分的比较判别法** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，在任何闭子区间 $[a,H]$ 上常义可积，并且对充分大的 $\Delta$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant g(x), \quad \forall x\in[\Delta,+\infty).$$

如果积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

收敛，那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

**证明** 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta'\geqslant\Delta$，使得只要 $H'\geqslant H>\Delta'$，就有

$$\int_H^{H'} g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

对这样的 $H'$ 和 $H$，自然也有

$$\left|\int_H^{H'} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_H^{H'}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_H^{H'} g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon. \qquad \square$$

**推论** 设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 有定义，在其任何闭子区间 $[a,H]$ 上常义可积．如果积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛．

**证明** 记 $g(x)=|f(x)|$，则显然 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足不等式
$|f(x)|\leqslant g(x),\quad \forall x\in[a,+\infty)$． □

**注记** 这推论的逆命题不成立．下一节中的例题 4 就是一个反例．

**定义** 如果广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛．如果广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，但广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛．

本节以上的讨论，所涉及的都是无穷上限的积分．但类似的结果对无穷下限的积分以及双无穷限的积分都成立．读者可仿照无穷上限积分的情形，陈述相应的结果，并给出证明．

关于瑕积分，亦可进行类似的讨论．相应的结果陈述如下：

**瑕积分的收敛原理** 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b)$ 有定义，在其任何闭子区间$[a,b-\eta]$上常义可积，则瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$0<\eta'<\eta<\delta$，就有

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

**瑕积分的比较判别法** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[a,b)$ 有定义，在其任何闭子区间$[a,b-\eta]$常义可积，并且在 $b$ 点邻近满足不等式

$$|f(x)|\leqslant g(x),\qquad \forall x\in[b-\delta,b).$$

如果瑕积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

**推论** 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b)$ 有定义，在其任何闭子区间$[a,b-\eta]$常义可积. 如果积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

**定义** 如果瑕积分$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 如果积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，但积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么我们就说瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

## §4 广义积分收敛性的一些判别法

### 4.a 无穷限积分收敛性的判别法

上一节中已经介绍了无穷限积分的比较判别法：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 有定义，在其任何闭子区间$[a,H]$常义可积，并且对充分大的 $\Delta$ 满足不等式

$$|f(x)|\leqslant g(x),\qquad \forall x\in[\Delta,+\infty).$$

如果积分$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

具体地取 $g(x)=\dfrac{C}{x^p}$ 作为比较的标准，我们得到以下判别法：

**定理 1** 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 有定义，在其任何闭子区间$[a,H]$上常义可积.

(1) 如果存在 $\Delta>a$，$p>1$，$C>0$，使得

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^p}, \quad \forall x \geqslant \Delta,$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$$

绝对收敛;

(2) 如果存在 $\Delta > a$, $p \leqslant 1$, $C > 0$, 使得

$$|f(x)| \geqslant \frac{C}{x^p}, \quad \forall x \geqslant \Delta,$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

发散.

为了对充分大的 $x$, 比较 $|f(x)|$ 与 $\frac{C}{x^p}$, 我们考察以下比值的极限状况:

$$\frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}} = x^p |f(x)|.$$

**推论** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 有定义, 在其任何闭子区间 $[a, H]$ 常义可积, 并设存在极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^p |f(x)| = B,$$

则有

(1) 如果 $p > 1$, $B < +\infty$, 那么

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

收敛;

(2) 如果 $p \leqslant 1$, $B > 0$, 那么

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$$

发散.

**证明** (1) 对于 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>0$，使得

$$|f(x)|<\frac{B+\varepsilon}{x^p}, \qquad \forall x>\Delta.$$

(2) 对于 $0<\varepsilon<B$，存在 $\Delta>0$，使得

$$|f(x)|>\frac{B-\varepsilon}{x^p}, \qquad \forall x>\Delta. \qquad \square$$

**例 1** 判别积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ 是否收敛。

**解** 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ 绝对收敛。

**例 2** 判断积分 $\int_1^{+\infty}x^n e^{-x}dx$ 是否收敛。

**解** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2(x^n e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}x^{2+n}e^{-x}=0,$$

所以积分 $\int_1^{+\infty}x^n e^{-x}dx$ 收敛。

**例 3** 判断积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^p}dx$ 是否收敛。

**解** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2},$$

所以，对于 $p>1$，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^p}dx$ 收敛；对于 $p\leqslant1$，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^p}\,dx$ 发散。

定理 1 只适用于判别积分是否绝对收敛. 为了判别条件收敛性, 我们需要另外一些法则.

**定理 2** (狄里克莱判别法) 设函数 $f$ 和 $g$ 在区间$[a,+\infty)$有定义, 在其任何闭子区间$[a,H]$上常义可积. 如果

(1) 存在 $\Delta>a$, 使得$f$在$[\Delta,+\infty)$ 上是单调的, 并且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;$$

(2) 存在 $K\geqslant 0$, 使得

$$\left|\int_a^H g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant K,\quad \forall H\geqslant a,$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

**证明** 对充分大的 $H$ 和 $H'>H$, 我们来估计

$$\left|\int_H^{H'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|.$$

根据第二中值定理

$$\int_H^{H'} f(x)\,g(x)\mathrm{d}x=f(H)\int_H^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+f(H')\int_{\xi}^{H'} g(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\left|\int_H^{H'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|f(H)|\left|\int_H^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$+|f(H')|\left|\int_{\xi}^{H'} g(x)\mathrm{d}x\right|.$$

容易看到

$$\left|\int_H^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x-\int_a^H g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\left|\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^H g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant 2K,$$

同样有

$$\left|\int_{\xi}^{H'} g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2K.$$

我们得到

$$\left|\int_{H}^{H'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2K(|f(H)|+|f(H')|).$$

但

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta'\geqslant\Delta$，使得只要

$$H'>H>\Delta',$$

就有

$$\left|\int_{H}^{H'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2K(|f(H)|+|f(H')|)<\varepsilon.$$

这证明了积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

的收敛性. □

**定理 3**（阿贝尔判别法） 设函数 $f$ 和 $g$ 在区间 $[a,+\infty)$ 有定义，在其任何闭子区间 $[a,H]$ 常义可积. 如果

(1) 存在 $\Delta>a$，使得 $f$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 单调并且有界；

(2) 积分 $\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，

那么积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

**证明** 因为函数 $f$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 单调并且有界，所以存在有穷极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-l)=0.$$

根据狄里克莱判别法（定理 2），我们断定积分

$$\int_a^{+\infty}(f(x)-l)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 再利用积分

$$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

的收敛性，即可断定积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛. □

**注记** 定理 3 也可根据收敛原理直接证明（用第二中值定理估计），请读者自己练习.

**例 4** 考察积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

判断这积分是否收敛，是否绝对收敛.

**解** 因为

(1) 当 $x\to+\infty$时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 单调下降趋于 0，

(2) 函数 $g(x)=\sin x$ 满足

$$\left|\int_1^H \sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2,\quad \forall H\geqslant 1,$$

所以积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛.

另一方面，我们有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}.$$

通过类似的讨论（用狄里克莱判别法），可以断定积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

收敛．但已知以下积分发散于$+\infty$：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x}=+\infty.$$

所以积分

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}\right)\mathrm{d}x$$

也发散．由此得知：积分

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$

发散．

#### 4.b 瑕积分收敛性的判别法

这里的许多讨论，与上一段中的很相似，证明就不一一写出了．

**定理1′** 设函数$f$在区间$(a,b]$有定义，在其任何闭子区间$[a+\eta,b]$常义可积．则

(1) 如果存在$\delta>0$，$0\leqslant q<1$，$C>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant\frac{C}{(x-a)^q},\qquad \forall x\in(a,a+\delta),$$

那么积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛．

(2) 如果存在$\delta>0$，$q\geqslant1$，$C>0$，使得

$$|f(x)|\geqslant\frac{C}{(x-a)^q},\qquad \forall x\in(a,a+\delta),$$

那么积分$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$发散．

为了对充分接近于$a$的$x$，比较$|f(x)|$与$\dfrac{C}{(x-a)^q}$，可以考察比值

$$\frac{|f(x)|}{\dfrac{1}{(x-a)^q}}=(x-a)^q\ |f(x)|$$

的极限状况.

**推论** 设函数 $f$ 在区间 $(a,b]$ 有定义，在其任何闭子区间 $[a+\eta,b]$ 常义可积，并设存在极限

$$\lim_{x\to a+}(x-a)^q|f(x)|=B,$$

则有

(1) 如果 $0\leqslant q<1$，$B<+\infty$，那么积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，

(2) 如果 $q\geqslant 1$，$B>0$，那么积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

**注记** 对于在上限处有瑕点的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，以 $\frac{C}{(b-x)^q}$ 为比较函数，可以陈述并证明类似的判别法，请读者自己加以讨论.

**例 5** 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 是否收敛.

**解** 这积分既是无穷限积分，在 0 点又有一个瑕点. 要判断它的收敛性，应分别考察以下两个积分是否收敛：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\qquad \int_0^1\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

我们已知道前一积分是绝对收敛的（见本节上一段中的例1）. 还容易看到

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right|=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

据此可以判断积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 也是绝对收敛的. 因而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

**例 6** 考察积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

**解** 因为

$$\lim_{x\to1-}(1-x)^0\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|=\lim_{x\to1-}\frac{-\ln x}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0+}x^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|=\lim_{x\to0+}\frac{-x^{\frac{1}{2}}\ln x}{1-x^2}=0,$$

所以积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$是绝对收敛的.

**例7** 考察积分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

的收敛性，其中$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

**解** 因为

$$\lim_{x\to0+}x^{1-\alpha}|x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}|$$

$$=\lim_{x\to0+}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

$$\lim_{x\to1-}(1-x)^{1-\beta}|x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}|$$

$$=\lim_{x\to1-}x^{\alpha-1}=1,$$

所以，当$1-\alpha<1$，$1-\beta<1$时，也就是$\alpha>0$，$\beta>0$时，积分$B(\alpha,\beta)$收敛. 对其他情形，这积分发散.

**例8** 考察积分

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx$$

的收敛性.

**解** 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2|e^{-x}x^{p-1}|=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}x^{p+1}=0,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{1-p}|e^{-x}x^{p-1}| = \lim_{x\to 0+} e^{-x}=1,$$

所以积分 $\Gamma(p)$ 当$1-p<1$ 时即 $p>0$ 时收敛，而当$1-p\geqslant 1$即$p\leqslant 0$时发散.

以下介绍瑕积分条件收敛性的判别法.

**定理2′**（狄里克莱判别法） 设函数 $f$ 和 $g$ 在区间 $(a,b]$有定义，在其任何闭子区间$[a+\eta,b]$常义可积. 如果

(1) 存在 $\delta>0$，使得 $f$ 在 $(a,a+\delta)$ 是单调的，并且有

$$\lim_{x\to a+} f(x)=0;$$

(2) 存在 $K\geqslant 0$，使得

$$\left|\int_{a+\eta}^{b} g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant K,\qquad \forall\eta>0,$$

那么积分

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

**证明** 只须用第二中值定理估计

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|,$$

请读者仿照定理 2 中的作法完成本定理的证明. □

**定理3′**（阿贝尔判别法） 设函数 $f$ 和 $g$ 在区间 $(a,b]$ 有定义，在其任何闭子区间$[a+\eta,b]$常义可积. 如果

(1) 存在 $\delta>0$，使得 $f$ 在 $(a,a+\delta)$ 单调并且有界；

(2) 积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，

那么积分

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

请读者仿照定理 3 证明中的作法，自己写出定理3′的证明.

**注记** 关于在上限处有瑕点的积分，也有类似的狄里克莱判别法与阿贝尔判别法. 请读者自己陈述有关的定理并给出证明.

**例 9** 考察积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,dx \quad (0<p\leqslant 2)$$

的收敛性.

**解** 对于$0<p<1$，因为

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p},$$

所以这时积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,dx$$

绝对收敛.

对于 $1\leqslant p<2$，因为函数 $f(x)=x^{2-p}$ 当 $x\to 0+$时单调趋于 0，而函数

$$g(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

满足

$$\left|\int_\eta^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx\right| \leqslant \left|\cos 1-\cos\frac{1}{\eta}\right| \leqslant 2,$$

所以积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,dx=\int_0^1 x^{2-p}\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

收敛．我们指出，对这种情形，绝对值的积分

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| dx$$

是发散的．容易验证

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| \geqslant \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x^p} = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos\frac{2}{x}}{2x^p}.$$

通过与上面所述的相类似的讨论，可以说明：对 这 种 情 形（即 $1 \leqslant p < 2$ 的情形），积分

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{2}{x}}{x^p} dx$$

收敛．又容易看出，积分 $\int_0^1 \frac{dx}{2x^p}$ 是发散的．这样，我们证明了积分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2x^p} - \frac{\cos\frac{2}{x}}{2x^p}\right) dx$$

是发散的．因而积分

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| dx$$

也是发散的．

最后来考察 $p=2$ 的情形．因为

$$\int_\eta^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx = \cos 1 - \cos\frac{1}{\eta},$$

当 $\eta \to 0+$ 时上式无极限，所以积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$$

发散．

# 第 四 篇

## 多 元 微 积 分

# 第十一章 多维空间

## §1 概 说

自然界中，量的相互依赖关系是多种多样的．一元函数仅仅是其中最简单的一种．为了更深入地认识复杂的客观世界，需要进一步考察一个变量依另外几个变量的变化而变化的现象．这就需要引入多元函数的概念．先请看下面几个例子．

**例 1** 一定质量理想气体的压强$P$依温度$T$与体积$V$的变化而变化．这几个量之间的相互依赖关系表现为气态方程

$$P=\mu R\frac{T}{V},$$

其中的$\mu$和$R$是常量．

**例 2** 地理学中用海拔高度这个量来表示地形的起伏变化．我们知道，海拔高度$h$随着地理坐标（经度$x$与纬度$y$）的变化而变化：

$$h=h(x,y).$$

人们通过各种测量手段来认识这种依赖关系，并把所获得的结果画在地形图上．

**例 3** 直圆柱体的体积$V$和表面积$S$都随底圆半径$R$和高$H$而变化：

$$V=\pi R^2H,$$
$$S=2\pi R(R+H).$$

在讨论一元函数的时候，我们曾把自变量变化的范围（定义域）看成实数轴R上的一个点集$D$，并把函数$f$定义为从$D$到R的一个映射

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

把实数看成直线上的点，从而把“数”与“形”紧密地结合起来，这对于我们理解数学分析的概念和思想，具有非常重要的意义.

与这种看法相类似，我们可以把实数对 $(x, y)$ 看成平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点，把实数的三元组 $(x, y, z)$ 看成是三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点. 从一元函数的情形得到启发，我们把二元函数（依赖于两个自变量的函数）定义为从平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个点集 $D$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射：

$$\begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R}. \\ \quad\;\; \cap \\ \quad\;\; \mathbb{R}^2 \end{array}$$

类似地，我们把三元函数（依赖于三个自变量的函数）定义为从三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个点集 $D$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射：

$$\begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R}. \\ \quad\;\; \cap \\ \quad\;\; \mathbb{R}^3 \end{array}$$

为了便于讨论 $m$ 元函数，我们先介绍 $m$ 维空间的概念.

**定义** 依次排列着的 $m$ 个实数

$$(x_1, \cdots, x_m)$$

被称为一个 $m$ 元有序实数组. 由一切可能的 $m$ 元有序实数组所组成的集合

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \mid x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

被称为 $m$ 维空间. 每一个 $m$ 元有序实数组都被称为这空间的点.

对于一般的 $m$ 维空间，我们类比于三维空间的情形引入许多几何式的术语. 这些形象化的术语，可以启发我们的几何直观，帮助我们进行理解和记忆.

我们把 $m$ 元函数定义为从 $m$ 维空间的点集 $D$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射：

$$f: \begin{array}{c} D \longrightarrow \mathbb{R}. \\ \cap \\ \mathbb{R}^m \end{array}$$

**注记** 我们在其中生活的现实空间当然是三维的．但为了讨论某些问题的方便，需要考虑更高维的空间．例如，对于相对论的讨论来说，最好把空间与时间联系在一起来考察，把我们的空间看成由三个空间方向与一个时间方向组成的四维空间．又如，为了考察由 $N$ 个质点组成的力学系统的运动，我们需要用 $3N$ 个数（所有这些质点的坐标）来描述这系统的位置状况．换句话说，这系统的每一位置状况，要用 $3N$ 维空间中的一个点来表示．

在讨论一元函数的微积分的时候，我们不只是简单地把实数轴（一维空间）看成一个集合，而且还要考虑实数系的代数运算，还要考虑有关的极限过程．例如，导数的定义就已经涉及到这些方面：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

为了讨论 $m$ 元函数的微积分，先要对$m$维空间的代数结构与距离结构作一番考察．这将是下一节的主要任务．

## §2 多维空间的代数结构与距离结构

先对所采用的记号作一简单的说明．

二维或三维空间中的点，通常用 $(x,y)$ 或 $(x,y,z)$ 这样的记号来表示——这里的 $x,y$ 或 $x,y,z$ 是点的坐标．对于更一般的 $m$ 维空间，我们用 $(x_1,\cdots,x_m)$ 表示这空间中的点，并把 $x_i$ 叫做这点的第 $i$ 个坐标．对某些情形，可以用单独一个大写字母来表示一个点，例如用 $P=(x_1,\cdots,x_m)$ 来表示坐标为$x_1,\cdots,x_m$ 的点，等等．但对一般情形，更方便的作法是：用小写字母表示

$\mathbb{R}^m$ 中的点，并用同一字母附以标号 $i$ 表示该点的第 $i$ 个坐标，例如

$$x=(x_1,\cdots,x_m),$$
$$y=(y_1,\cdots,y_m),$$

等等．

我们常常还需要考察 $\mathbb{R}^m$ 中点的序列．这时又要用下标来表示序列中的序号．为了避免可能产生的混淆，最好把坐标的编号放在右上角，即把 $\mathbb{R}^m$ 中的点记成这样的形式

$$x=(x^1,\cdots,x^m).$$

采用这种写法时，切不可把上标与乘幂的方次相混淆．如果要表示第 $i$ 个坐标的 $k$ 次方，就要写成

$$(x^i)^k.$$

把坐标的编号放在右上角的写法，使用起来非常方便．这样的符号系统，在张量分析、微分几何等学科中得到广泛的应用．我们推荐这种写法，但也不排斥其他记号（只要用起来方便而又不引起混淆）．

### 2.a $\mathbb{R}^m$ 的代数结构

我们既可以把

$$x=(x^1,x^2)$$

看成平面上坐标为 $x^1$ 和 $x^2$ 的一个点，又可以把它看成始点在 $(0,0)$ 终点在 $(x^1,x^2)$ 的一个向量．对于更高维的情形，我们也采取类似的说法：既把 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 称为一个点（把 $x^1,\cdots,x^m$ 称为这点的坐标），又把 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 称为一个向量（把 $x^1,\cdots,x^m$ 称为这向量的分量）．

对于平面上的向量，可以用几何的方式定义加法和数乘运算．用分量来表示加法和数乘的规则为：

$$u+v=(u^1+v^1,u^2+v^2),$$
$$\lambda u=(\lambda u^1,\lambda u^2),$$

这里

$$u=(u^1,u^2),\qquad v=(v^1,v^2)\in\mathbb{R}^2,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

与二维（或三维）的情形相类比，对于更高维的向量，我们通过分量定义加法与数乘运算如下：

$$u+v=(u^1+v^1,\ \cdots,\ u^m+v^m),$$
$$\lambda u=(\lambda u^1,\cdots,\lambda u^m),$$

这里

$$u=(u^1,\cdots,u^m),\qquad v=(v^1,\cdots,v^m)\in\mathbb{R}^m,\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

这样定义的加法和数乘，使$\mathbb{R}^m$成为一个实线性空间（实向量空间）．换句话说就是：$\mathbb{R}^m$具有实线性空间的代数结构．

### 2.b $\mathbb{R}^m$ 的距离结构

平面上向量 $u=(u^1,u^2)$ 的长度 $\|u\|$ 可按勾股定理计算如下：

$$\|u\|=\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}.$$

我们把 $\|u\|$ 叫做向量 $u$ 的范数（或模）．范数具有以下性质：

$(N_1)$ $\|u\|\geqslant 0$，$\forall u\in\mathbb{R}^2$，并且

$$\|u\|=0\Longleftrightarrow u=0;$$

$(N_2)$ $\|\lambda u\|=|\lambda|\,\|u\|$，$\qquad\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$u\in\mathbb{R}^2$；

$(N_3)$ $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$，$\forall u,v\in\mathbb{R}^2$.

性质 $(N_1)$ 和 $(N_2)$ 可直接从表示式$\|u\|=\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}$看出．性质 $(N_3)$ 即三角形不等式：三角形两边长度之和大于第三边的长度．

平面上任意两点 $u$ 与 $v$ 之间的距离可以表示为

$$d(u,v)=\sqrt{(u^1-v^1)^2+(u^2-v^2)^2},$$

也就是

$$d(u,v)=\|u-v\|.$$

对于更高维的空间 $\mathbb{R}^m$，我们定义向量 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 的范数（或模）如下：

$$\|u\| = \sqrt{(u^1)^2 + \cdots + (u^m)^2}.$$

这样定义的范数仍具有以下这些性质：

$(N_1)$ $\|u\| \geqslant 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$，并且

$$\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0;$$

$(N_2)$ $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$;

$(N_3)$ $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m$.

性质 $(N_1)$ 和 $(N_2)$ 可直接从定义得到. 性质 $(N_3)$ 的证明要用到以下不等式

$$(C) \quad \left(\sum_{i=1}^m u^i v^i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^m (u^i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^m (v^i)^2\right).$$

这就是著名的柯西不等式，我们可以把它写成

$$\sum_{i=1}^m u^i v^i \leqslant \|u\| \|v\|.$$

柯西不等式的证法很多，以下所介绍的或许是最简单的一种. 对于任何实数 $\lambda$ 和 $\mu$，我们有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^m (\lambda u^i - \mu v^i)^2$$

$$= \lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda\mu \sum_{i=1}^m u^i v^i + \mu^2 \|v\|^2.$$

在上式中取 $\lambda = \|v\|$, $\mu = \|u\|$，就得到

$$2\|u\|\|v\|\left(\|u\|\|v\| - \sum_{i=1}^m u^i v^i\right) \geqslant 0.$$

由此就能得到

$$\sum_{i=1}^m u^i v^i \leqslant \|u\| \|v\|.$$

利用这一不等式，可以很容易地证明性质 $(N_3)$：

$$\|u+v\|^2 = \sum_{i=1}^m (u^i + v^i)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(u^i)^2+2\sum_{i=1}^{m}u^iv^i+\sum_{i=1}^{m}(v^i)^2$$

$$\leqslant\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2$$

$$\leqslant(\|u\|+\|v\|)^2.$$

借助于范数，我们可以把任意两点 $u,v\in\mathbb{R}^m$ 之间的距离定义为

$$d(u,v)=\|u-v\|,$$

即

$$d(u,v)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(u^i-v^i)^2}.$$

## §3 $\mathbb{R}^m$ 中的收敛点列

### 3.a 收敛点列

设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个点列，这里

$$x_n=(x_n^1,\cdots,x_n^m),\qquad n=1,2,\cdots.$$

又设

$$a=(a^1,\cdots,a^m)$$

是 $\mathbb{R}^m$ 中的一点。我们来考察点列 $\{x_n\}$中的各项到点 $a$ 的距离

$$d(x_n,a)=\|x_n-a\|.$$

如果

$$\lim\|x_n-a\|=0,$$

那么我们就说点列 $\{x_n\}$ 以点 $a$ 为极限，或者说点列$\{x_n\}$收敛于点 $a$. 采用 $\varepsilon$-$N$ 语言，点列$\{x_n\}$收敛于点 $a$ 这件事，可以表述为

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\|x_n-a\|<\varepsilon).$$

我们把 $\mathbb{R}^m$ 中的点集

$$U(a,\eta)=\{x\in\mathbb{R}^m\mid\|x-a\|<\eta\}$$

叫做点 $a$ 的 $\eta$ 邻域. 对于 $m=1$ 的情形,

$$U(a,\eta)=(a-\eta,a+\eta)$$

是一个以 $a$ 为中点的开区间; 对于$m=2$的情形, $U(a,\eta)$ 是一个以 $a$ 为中心的开圆:

$$(x^1-a^1)^2+(x^2-a^2)^2<\eta^2;$$

对于 $m=3$ 的情形, $U(a,\eta)$ 是一个以 $a$ 为中心的开球:

$$(x^1-a^1)^2+(x^2-a^2)^2+(x^3-a^3)^2<\eta^2.$$

对于更高维的情形, 我们也把 $U(a,\eta)$ 叫做以 $a$ 为中心以 $\eta$ 为半径的开球.

我们可以用更具几何色彩的语言重述"点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $a$"的定义: 如果对任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得点列$\{x_n\}$从第 $N$ 项以后的各项, 都进入点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域之中, 那么我们就说点列 $\{x_n\}$ 以点 $a$ 为极限, 或者说点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $a$.

利用范数的性质 $(N_1)$, $(N_2)$ 和 $(N_3)$, 很容易把关于实数序列极限的许多结果推广成关于 $\mathbb{R}^m$ 中点列的相应结果. 例如:

**命题1** 如果 $\mathbb{R}^m$ 中的点列 $\{x_n\}$ 有极限, 那么极限是唯一的.

**证明** 对任意 $a\in\mathbb{R}^m$ 和 $a'\in\mathbb{R}^m$, 我们有

$$0\leqslant\|a'-a\|\leqslant\|a'-x_n\|+\|x_n-a\|.$$

如果点列 $\{x_n\}$ 既以 $a$ 为极限, 又以 $a'$ 为极限, 那么上式右端趋于 0, 因而

$$\|a'-a\|=0,$$

由此即得到

$$a'=a.$$

这证明了极限的唯一性. □

这样，如果 $\{x_n\}$ 是收敛点列，那么我们就可以把它的唯一极限记为 $\lim x_n$.

关于实数序列极限的加法定理和乘法定理，可以推广为:

**命题 2** 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的点列，$a$ 和 $b$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的点；$\{\lambda_n\}$ 是实数序列，$\lambda$ 是一个实数. 如果

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$
$$\lim \lambda_n = \lambda,$$

那么

$$\lim(x_n + y_n) = a + b,$$
$$\lim(\lambda_n x_n) = \lambda a,$$

即

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n,$$
$$\lim(\lambda_n x_n) = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n.$$

**证明** 我们有

$$\|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leqslant \|x_n - a\| + \|y_n - b\|,$$
$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda a\| &= \|(\lambda_n - \lambda)(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a \\ &\quad + \lambda(x_n - a)\| \\ &\leqslant |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x_n - a\| \\ &\quad + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a\| + |\lambda| \cdot \|x_n - a\|.\end{aligned}$$ □

关于 $\mathbb{R}^m$ 中点列的极限，还有更多的结果与实数序列的情形相类似，这里不再一一细说了. 借助于以下定理，我们总可以把涉及 $\mathbb{R}^m$ 中点列极限的问题，转化为关于实数序列的相应问题.

**定理** 对于 $\mathbb{R}^m$ 中的点列 $\{x_n\}$ 和点 $a$，我们有：$\lim x_n = a$ 的充分必要条件是

$$\lim x_n^i = a^i, \quad i = 1, \cdots, m,$$

这里 $x_n^i$ 是 $x_n$ 的第 $i$ 个坐标，$a^i$ 是 $a$ 的第 $i$ 个坐标.

**证明** 我们有

$$\max\{|x^1-a^1|,\cdots,|x^m-a^m|\}$$

$$\leqslant\|x-a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x^i-a^i)^2}$$

$$\leqslant|x^1-a^1|+\cdots+|x^m-a^m|. \qquad \square$$

### 3.b 柯西点列与空间的完备性

**定义** 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个点列．如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$\|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon, \qquad \forall p\in\mathbb{N},$$

那么我们就说点列 $\{x_n\}$ 满足柯西条件，或者说 $\{x_n\}$ 是一个柯西点列（基本点列）．

**引理** 所有的收敛点列都是柯西点列．

**证明** 设点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $a$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$\|x_n-a\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对于 $n>N$ 和 $p\in N$，就有

$$\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|x_{n+p}-a\|+\|a-x_n\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这证明了$\{x_n\}$是柯西点列． $\square$

**定理**（$\mathbb{R}^m$ 中的收敛原理） 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的点列，则$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是它为柯西点列．

**证明** 条件的必要性已见于上一引理．这里我们来证明条件的充分性．设$\{x_n\}$是一个柯西点列，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要

$$n>N, \qquad p\in\mathbb{N},$$

就有

$$\|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon.$$

从不等式

$$|x_{n+p}^i-x_n^i|\leqslant\|x_{n+p}-x_n\|,$$

可以看出：由点列 $\{x_n\}$ 各项的第 $i$ 个坐标组成的序列 $\{x_n^i\}$ 是实数的柯西序列 $(i=1,\cdots,m)$．于是，存在 $a^i\in\mathbb{R}$，使得

$$\lim x_n^i=a^i,\qquad i=1,\cdots,m.$$

记

$$a=(a^1,\cdots,a^m),$$

则 $a\in\mathbb{R}^m$，并且有

$$\lim x_n=a.$$

这证明了条件的充分性． □

**注记** 上面的定理说明，在 $\mathbb{R}^m$ 中，任何柯西点列都是收敛的．$\mathbb{R}^m$ 的这一重要性质，被称为完备性．

## §4 多元函数的极限与连续性

与一元函数的情形类似，对于多元函数的极限和连续性等概念，我们将介绍序列式和 $\varepsilon-\delta$ 式两种定义方式，希望读者熟练掌握，根据实际情况灵活运用．

### 4.a 多元函数的极限

对于 $a\in\mathbb{R}^m$ 和 $\eta\in\mathbb{R}$，$\eta>0$，我们把集合

$$\check{U}(a,\eta)=\{x\in\mathbb{R}^m|0<\|x-a\|<\eta\}$$

叫做 $a$ 点的去心 $\eta$ 邻域．

设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a\in\mathbb{R}^m$．如果 $a$ 的任何去心 $\eta$ 邻域之中都含有 $D$ 中的点，即

$$\check{U}(a,\eta)\cap D\neq\phi,\qquad\forall\eta>0,$$

那么我们就说 $a$ 是集合$D$的一个聚点（请注意：聚点 $a$ 本身可以属于 $D$，也可以不属于 $D$）．

容易看出，$a$ 是 $D$ 的聚点的充分必要条件是：存在点列 $\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}$，使得

$$\lim x_n = a$$

（请读者证明这一命题）.

我们来陈述函数极限的定义.

**定义Ⅰ**（函数极限的序列式定义） 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a$ 是$D$的一个聚点，$m$元函数$f$ 在 $\check{U}(a,\eta)\cap D$上有定义．如果对于 $\check{U}(a,\eta)\cap D$ 中收敛于 $a$ 的任何点列 $\{x_n\}$，相应的函数值序列$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个实数 $A$，那么我们就说：当 $x$ 沿集合 $D$ 趋于$a$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to a\\ D}} f(x) = A.$$

对于不致于混淆的情形，也就简单地写为

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

**定义Ⅱ**（函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 式定义） 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a$ 是$D$的聚点，$m$ 元函数 $f$ 在 $\check{U}(a,\eta)\cap D$ 上有定义，$A\in\mathbb{R}$．如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x\in D,\qquad 0<\|x-a\|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么我们就说：当 $x$ 沿集合 $D$ 趋于 $a$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限（记号同定义Ⅰ）.

定义Ⅰ与定义Ⅱ当然是互相等价的．请读者仿照一元函数情形证明这一事实.

对于$A=+\infty$，$-\infty$或$\infty$的情形，也请读者自己写出$\lim_{x\to a} f(x)=A$的定义.

**例1** 考察 $m$ 元常值函数

$$f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)\equiv C.$$

对于任何 $a\in\mathbb{R}^m$，显然有

$$\lim_{x\to a} f(x)=C.$$

**例 2** 考察函数"向第 $i$ 个坐标轴投影"：

$$f(x)=f(x^1,\cdots,x^m):=x^i.$$

对于 $a=(a^1,\cdots,a^m)\in\mathbb{R}^m$，显然有

$$|f(x)-a^i|=|x^i-a^i|\leqslant\|x-a\|.$$

因而

$$\lim_{x\to a} f(x)=a^i.$$

**定理 1** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a$ 是 $D$ 的一个聚点，$m$ 元函数 $f$ 和 $g$ 在 $\check{U}(a,\eta)\cap D$ 有定义，$A,B\in\mathbb{R}$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to a\\ D}} f(x)=A,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ D}} g(x)=B,$$

那么就有

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ D}}[f(x)+g(x)]=A+B$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ D}}[f(x)g(x)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ D}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

**证明** 根据函数极限的序列式定义，所要证明的事项都可以从关于实数序列极限的相应结果推得. □

**例 3** 由变元 $x^1,\cdots,x^m$ 与实数通过有限次加法和乘法运算得到的代数式称为 $m$ 元多项式. 设 $P(x)=P(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $Q(x)=Q(x^1,\cdots,x^m)$ 是$m$元多项式. 从例 1 和例 2 的结果出发，利用定理 1 可以证明：

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

和

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}\quad (\text{设}Q(a)\neq 0).$$

**例 4** 考察二元函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\quad((x,y)\neq(0,0)).$$

试讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时这函数的极限状况.

**解** 对于 $(x,y)\neq(0,0)$，有以下不等式成立：

$$|f(x,y)-0|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant x^2.$$

对任给的 $\varepsilon>0$，只要

$$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon},$$

就有

$$|f(x,y)-0|\leqslant x^2\leqslant x^2+y^2<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

**例5** 考察二元函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad((x,y)\neq(0,0)).$$

试讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时这函数的极限状况.

**解** 我们在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$中选择点的序列$\{(x_n,y_n)\}$，使它沿直线 $y=\alpha x$ 趋于（0，0）. 例如可取

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\ \frac{\alpha}{n}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

对这样选取的点列$\{(x_n,y_n)\}$，我们有

$$f(x_n,y_n)=\frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2}$$

$$=\frac{\dfrac{y_n}{x_n}}{1+\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

当点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 沿不同斜率的直线 $y=\alpha x$ 趋于原点 $(0,0)$ 时，相应的函数值序列

$$\{f(x_n,y_n)\}$$

趋于不同的极限$\left(\text{例如对于 }\alpha=1,\text{ 有}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}=\frac{1}{2};\text{ 对于 }\alpha=2,\right.$

$\left.\frac{\alpha}{1+\alpha^2}=\frac{2}{5}\right)$. 因而，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 没有极限.

**例 6** 考察二元函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\quad((x,y)\neq(0,0)).$$

试讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 时这函数的极限状况.

**解** 我们选取 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 中的点的序列$\{(x_n,y_n)\}$，让它沿抛物线 $y=\alpha x^2$ 趋于（0，0）. 例如可取

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\ \frac{\alpha}{n^2}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

对这样的序列$\{(x_n,y_n)\}$，我们有

$$f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2y_n}{x_n^4+y_n^2}$$

$$=\frac{\dfrac{y_n}{x_n^2}}{1+\left(\dfrac{y_n}{x_n^2}\right)^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

当点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 沿不同的抛物线 $y=\alpha x^2$ 趋于（0，0）时，相应的函数值序列 $\{f(x_n,y_n)\}$ 趋于不同的极限. 因而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 没有极限.

**定理 2** 设一元函数 $g(u)$ 在实数 $b$ 的某个去心邻域 $\check{U}(b)$ 上有定义，并且

$$\lim_{u\to b}g(u)=c;$$

又设 $m$ 元函数 $f(x)$ 在点 $a$ 的某个去心邻域 $\check{U}(a)$ 上有定义，$f(\check{U}(a))\subset\check{U}(b)$，并且

$$\lim_{x\to a}f(x)=b,$$

则有

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=c.$$

**证明** 对于 $\check{U}(a)$ 中收敛于 $a$ 的任意点列 $\{x_n\}$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 满足

$$\{f(x_n)\}\subset\check{U}(b),\qquad \lim f(x_n)=b.$$

因而

$$\lim g(f(x_n))=c.$$

这证明了定理的结论． □

**注记** 对于限制 $x$ 沿集合 $D$ 趋于 $a$ 的情形，上面定理中的陈述需要作一些修改，相应的结果仍然成立：

$$\lim_{\substack{x\to a\\ D}} g(f(x))=c.$$

**定理 3** （关于函数极限的收敛原理） 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a$ 是 $D$ 的聚点，$m$ 元函数 $f$ 在 $\check{U}(a,\eta)\cap D$ 有定义．则使得有穷极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ D}} f(x)$$

存在的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $x$，$x'\in D$ 满足

$$0<\|x-a\|<\delta,\qquad 0<\|x'-a\|<\delta,$$

就一定有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

这定理的证明，也与一元函数的情形类似，请读者参照第二章§5写出．

### 4.b 多元函数的连续性

在例 3 中，我们看到，对于多项式函数 $P(x)$ 有

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a).$$

与一元函数的情形类似，如果 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 以 $f(a)$ 为极限，那么我们就说函数 $f(x)$ 在点 $a$ 连续．

**定义Ⅲ** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a\in D$，$m$ 元函数 $f$ 在 $U(a,\eta)\cap D$ 有

定义．如果对于 $U(a,\eta)\cap D$ 中收敛于 $a$ 的任意点列 $\{x_n\}$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $f(a)$ 为极限，那么我们就说函数 $f$ 沿集合 $D$ 在点 $a$ 连续(在不致于混淆时也就简单地说 $f$ 在点 $a$ 连续)．

**定义Ⅳ** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$，$a\in D$，$m$ 元函数 $f$ 在 $U(a,\eta)\cap D$ 有定义．如果对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x\in D,\quad \|x-a\|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数 $f$ 沿集合 $D$ 在点 $a$ 连续．(不致于混淆时就简单地说 $f$ 在点 $a$ 连续．)

**注记 1** 在定义Ⅲ和定义Ⅳ中，我们没有限定 $a$ 必须是 $D$ 的聚点．如果 $a$ 属于 $D$，但又不是 $D$ 的聚点，那么存在点 $a$ 的一个邻域 $U(a,\eta)$，使得

$$U(a,\eta)\cap D=\{a\}.$$

这样的点 $a$ 称为集合 $D$ 的孤立点．对于 $a$ 是 $D$ 的孤立点的情形，$U(a,\eta)\cap D$ 中趋于 $a$ 的点列只可能是恒等于 $a$ 的点列

$$x_n=a,\quad n=1,2,\cdots.$$

对这种情形，定义Ⅲ的条件当然得到满足：

$$\lim f(x_n)=f(a).$$

同样也容易看出，对这种情形，定义Ⅳ的条件得到满足．因此，在集合 $D$ 的孤立点处，函数 $f$ 必然是连续的．

如果 $a$ 属于 $D$ 而又不是 $D$ 的孤立点，那么它是 $D$ 的聚点．对这种情形，函数 $f$ 沿集合 $D$ 在点 $a$ 连续的定义，等价于说

$$\lim_{\substack{x\to a\\ D}} f(x)=f(a).$$

**注记 2** 从函数极限的两种定义（定义Ⅰ和定义Ⅱ）的等价性，自然可以得出关于连续性的两种定义（定义Ⅲ和定义Ⅳ）的

等价性.

**定义V** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$, $m$ 元函数 $f$ 在集合 $D$ 有定义. 如果对任何一点 $a\in D$, 函数 $f$ 沿集合 $D$ 在 $a$ 点连续,那么我们就说函数 $f$ 在集合 $D$ 连续.

**例7** 从例3可知: $m$ 元多项式函数 $P(x)$ 在任意点 $a\in\mathbb{R}^m$ 连续; $m$ 元有理分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 也在任何使得 $Q(a)\neq0$ 的点 $a$ 处连续.

**例8** 考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

由例7可知, 这函数在任何一点 $(x,y)\neq(0,0)$ 处是连续的. 由例4可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

因而这函数在 $\mathbb{R}^2$ 的每一点连续.

**例9** 考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

由例5可知, 这函数在 $(0,0)$ 点不连续.

**定理4** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$, $a\in D$, $m$ 元函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $U(a,\eta)\cap D$ 有定义, $\lambda\in\mathbb{R}$. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 沿集合 $D$ 在 $a$ 点连续, 那么函数 $f(x)+g(x)$, $\lambda f(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 都沿集合 $D$ 在 $a$ 点连续, 并且当 $g(a)\neq0$ 时, 函数

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

也沿集合 $D$ 在 $a$ 点连续.

**定理5** 设 $D\subset\mathbb{R}^m$, $a\in D$, $m$ 元函数 $f$ 在 $U(a,\eta)\cap D$ 有

定义，一元函数 $g$ 在 $b=f(a)$ 邻近有定义. 如果函数 $f$ 沿集合 $D$ 在点 $a$ 连续，函数 $g$ 在 $b$ 连续，那么复合函数 $g(f(x))$ 也沿集合 $D$ 在点 $a$ 连续.

**例10** 二元函数 $f(x,y)=\sin xy$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的每一点连续. 二元函数

$$g(x,y)=\frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$$

在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 的每一点连续.

## §5 有界闭集上连续函数的性质

设 $E\subset\mathbb{R}^m$. 如果存在 $L\in\mathbb{R}$，使得

$$\|x\|\leqslant L,\qquad\forall x\in E,$$

那么我们就说集合 $E$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界集.

设 $F\subset\mathbb{R}^m$. 如果 $F$ 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim x_n$ 仍属于 $F$，那么我们就说 $F$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

$\mathbb{R}^1$ 中的闭区间 $[a,b]$ 既是 $\mathbb{R}^1$ 中的有界集，又是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集. 我们知道，在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f$ 具有很好的性质. 例如：它取得最大值和最小值，它是一致连续的等. 在本节中，我们将证明，对于在 $\mathbb{R}^m$ 的有界闭集 $K$ 上连续的函数 $f$，类似的性质也成立. 证明中所用到的一个重要工具，就是以下推广的波尔查诺-维尔斯特拉斯定理.

**定理1** 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中点的有界序列，则$\{x_n\}$具有收敛的子序列.

**证明** 考察点列 $\{x_n\}$ 各项的坐标表示

$$x_n=(x_n^1,\cdots,x_n^m),\qquad n=1,2,\cdots.$$

以序列 $\{x_n\}$ 各项的第 $i$ 个坐标为项的实数序列

$$\{x_n^i\},$$

也仍然是有界的

$$|x_n^i| \leqslant \|x_n\| \leqslant L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

根据关于实数序列的波尔查诺-维尔斯特拉斯定理，我们断定 $\{x_n^1\}$ 具有收敛的子序列

$$\{x^1_{n_{1,k}}\}.$$

再来考察按同样序号选取的 $\{x_n^2\}$ 的子序列

$$\{x^2_{n_{1,k}}\}.$$

这仍是实数的一个有界序列，根据同样的道理可以断定这序列又具有收敛的子序列

$$\{x^2_{n_{2,k}}\}.$$

我们继续这样的讨论，直到最后，从实数的有界序列

$$\{x^m_{n_{m-1,k}}\}$$

之中，选出收敛的子序列

$$\{x^m_{n_{m,k}}\}.$$

我们记

$$n_k = n_{m,k}.$$

则对于 $i=1,2,\cdots,m$，序列

$$\{x^i_{n_k}\}$$

是收敛序列

$$\{x^i_{n_{i,k}}\}$$

的子序列，因而是收敛的．考察由

$$x_{n_k} = (x^1_{n_k}, \cdots, x^m_{n_k})$$

组成的序列

$$\{x_{n_k}\},$$

我们看到，这序列是 $\{x_n\}$ 的收敛子序列． □

**定理 2** 设 $K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集，函数 $f$ 在 $K$ 上连续，则 $f$ 在 $K$ 上是有界的．

**证明** 用反证法．假设 $f$ 在 $K$ 上无界，那么对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都存在 $x_n \in K$，使得

$$|f(x_n)| > n.$$

因为 $K$ 是有界集，所以点列 $\{x_n\}\subset K$ 也是有界的．由波尔查诺-维尔斯特拉斯定理可知，存在 $\{x_n\}$ 的收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$．设

$$x_{n_k}\to x_0,$$

则 $x_0\in K$（因为 $K$ 是闭集）．又因为函数 $f$ 在点 $x_0\in K$ 连续，所以

$$\lim f(x_{n_k})=f(x_0).$$

但这与

$$|f(x_{n_k})|>n_k$$

矛盾．这矛盾说明 $f$ 在 $K$ 上必须是有界的． □

**定理 3** 设 $K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集，函数 $f$ 在 $K$ 上连续．则 $f$ 在 $K$ 中某点取得它在 $K$ 上的最大值

$$M=\sup_{x\in K} f(x),$$

并且在 $K$ 中某点取得它在 $K$ 上的最小值

$$\mu=\inf_{x\in K} f(x).$$

**证明** 我们对最大值的情形写出证明．根据上确界的定义，对任何 $n\in\mathbb{N}$，存在 $x_n\in K$，使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M.$$

因为点列 $\{x_n\}$ 是有界的（$\{x_n\}\subset K$），所以存在它的收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$．设

$$x_{n_k}\to x_0,$$

则 $x_0\in K$（因为 $K$ 是闭集）．于是

$$\lim f(x_{n_k})=f(x_0).$$

但

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant M.$$

由这不等式取极限就得到

$$f(x_0)=M. \qquad \square$$

设 $E\subset\mathbb{R}^m$，函数 $f$ 在 $E$ 有定义．如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x, x'\in E, \quad \|x-x'\|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数 $f$ 在集合 $E$ 一致连续．

**定理 4** 设 $K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集，函数 $f$ 在 $K$ 连续，则 $f$ 在 $K$ 一致连续．

**证明** 用反证法． 假设 $f$ 在 $K$ 不是一致连续的，那么对某个 $\varepsilon>0$，不论 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ 怎样小，总存在 $x_n, x_n'\in K$，使得

$$\|x_n-x_n'\|<\frac{1}{n}, \quad |f(x_n)-f(x_n')|\geqslant\varepsilon.$$

因为 $\{x_n\}\subset K$ 是有界序列，它具有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$．设

$$x_{n_k}\to x_0,$$

则 $x_0\in K$．因为

$$\|x'_{n_k}-x_0\|\leqslant\|x'_{n_k}-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-x_0\|$$

$$<\frac{1}{n_k}+\|x_{n_k}-x_0\|,$$

所以又有

$$x'_{n_k}\to x_0.$$

又因为函数 $f$ 在 $x_0$ 点连续，所以

$$\lim f(x_{n_k})=\lim f(x'_{n_k})=f(x_0).$$

但这与

$$|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqslant\varepsilon$$

矛盾．这一矛盾说明函数 $f$ 在 $K$ 上必须是一致连续的． □

作为上面结果的应用，我们来证明著名的代数基本定理．

考察 $k$ 次 $(k\geqslant1)$ 复系数多项式

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k,$$

这里 $a_0,a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{C}$，$a_k\neq0$. 代数基本定理说，任何这样的多项式至少有一个复根.

**引理 1** 设 $\{\eta_n\}$ 和 $\{\zeta_n\}$ 是收敛的复数序列，则有

(1) $\lim(\eta_n+\zeta_n)=\lim\eta_n+\lim\zeta_n$;

(2) $\lim(\eta_n\zeta_n)=\lim\eta_n\cdot\lim\zeta_n$.

**证明** 留作练习. □

**引理 2** 设 $p(z)$ 是复多项式，则二元函数

$$f(x,y)=|p(x+iy)|$$

在 $\mathbb{R}^2$ 连续.

**证明** 对任意 $z_0\in\mathbb{C}$，考察收敛于 $z_0$ 的任意复数序列 $\{z_n\}$. 根据引理 1 中所述的运算法则，我们得到

$$p(z_n)\to p(z_0).$$

又因为

$$||p(z_n)|-|p(z_0)||\leqslant|p(z_n)-p(z_0)|,$$

所以又有

$$|p(z_n)|\to|p(z_0)|.$$

对任何 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，只要

$$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0),$$

就有

$$x_n+iy_n\to x_0+iy_0,$$

也就有

$$f(x_n,y_n)=|p(x_n+iy_n)|$$
$$\to|p(x_0+iy_0)|=f(x_0,y_0).$$

这证明了函数 $f$ 的连续性. □

下面的达朗贝尔（D'Alembert）引理是我们证明代数基本定理的主要工具.

**引理 3** 设 $p(z)$ 是复多项式，$p(z_0)\neq0$. 则有充分接近 $z_0$ 的复数 $z_1$，使得

$$|p(z_1)|<|p(z_0)|.$$

**证明** 设 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k$，这里 $a_0,a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{C}$，$a_k\neq0$。对于 $z=z_0+\zeta$，我们有

$$p(z)=p(z_0+\zeta)=b_0+b_1\zeta+\cdots+b_k\zeta^k,$$

这里 $b_0=p(z_0)\neq0$，$b_k=a_k\neq0$．设 $b_l$ 是 $b_1,\cdots,b_k$ 之中第一个不等于 0 的复数，则有

$$\frac{b_l}{b_0}=Ce^{i\theta},\quad C>0.$$

于是

$$\frac{p(z_0+\zeta)}{p(z_0)}=1+Ce^{i\theta}\zeta^l+c_{l+1}\zeta^{l+1}+\cdots+c_k\zeta^k.$$

只要 $\zeta$ 的模不超过 1，就有

$$\left|\frac{p(z_0+\zeta)}{p(z_0)}\right|\leqslant|1+Ce^{i\theta}\zeta^l|+D|\zeta|^{l+1},$$

这里

$$D=|c_{l+1}|+\cdots+|c_k|.$$

我们取

$$\zeta=\lambda e^{i\frac{\pi-\theta}{l}}$$

（$\lambda$ 是待定的正实数）．于是

$$\left|\frac{p(z_0+\zeta)}{p(z_0)}\right|\leqslant|1+Ce^{i\theta}\zeta^l|+D|\zeta|^{l+1}$$
$$=|1-C\lambda^l|+D\lambda^{l+1}.$$

只要 $\lambda>0$ 充分小，就有

$$1-C\lambda^l>0,\quad C-D\lambda>0.$$

对于满足这样条件的 $\lambda$，复数

$$z_1=z_0+\zeta=z_0+\lambda e^{i\frac{\pi-\theta}{l}}$$

就使得

$$\left|\frac{p(z_1)}{p(z_0)}\right|=\left|\frac{p(z_0+\zeta)}{p(z_0)}\right|$$
$$\leqslant|1-C\lambda^l|+D\lambda^{l+1}$$
$$=(1-C\lambda^l)+D\lambda^{l+1}$$

$$=1-(C-D\lambda)\lambda^l<1,$$

即

$$|p(z_1)|<|p(z_0)|. \qquad \square$$

**代数基本定理的证明**

不妨设多项式 $p(z)$ 的最高次项的系数为 1，即设

$$p(z)=z^k+a_{k-1}z^{k-1}+\cdots+a_0.$$

对于模大于 1 的复数 $z$，应有

$$|p(z)|\geqslant|z|^k-(|a_{k-1}||z|^{k-1}+\cdots+|a_0|)$$

$$=|z|^{k-1}\left(|z|-\frac{|a_{k-1}|}{|z|}-\cdots-\frac{|a_0|}{|z|^{k-1}}\right)$$

$$\geqslant|z|-|a_{k-1}|-\cdots-|a_0|.$$

我们记

$$L=|a_{k-1}|+\cdots+|a_1|+2|a_0|+1.$$

当 $|z|\geqslant L$ 时就有

$$|p(z)|\geqslant|a_0|+1>|a_0|=|p(0)|.$$

考察圆盘

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant L^2\}.$$

容易证明这是一个有界闭集．连续函数

$$f(x,y)=|p(x+iy)|$$

在 $K$ 中某点 $(x_0,y_0)$ 取得它在 $K$ 上的最小值

$$\mu=\inf_{(x,y)\in K}f(x,y)\leqslant f(0,0).$$

由前面的讨论，我们知道，函数 $f(x,y)=|p(x+iy)|$ 在 $K$ 之外的值都大于

$$|a_0|=f(0,0)\geqslant\mu.$$

因而 $\mu=f(x_0,y_0)$ 实际上是函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值．根据引理 3 可以断定

$$f(x_0,y_0)=|p(x_0+iy_0)|=0$$

(否则就有 $z_1=x_1+iy_1$，使得

$$f(x_1,y_1)=|p(x_1+iy_1)|$$
$$<|p(x_0+iy_0)|=f(x_0,y_0)).$$
这样，我们证明了 $z_0=x_0+iy_0$ 是多项式 $p(z)$ 的一个根. □

## §6 $\mathbb{R}^m$中的等价范数

在前几节的讨论中，我们已经熟悉了 $\mathbb{R}^m$ 中的一种标准的范数

$$\|x\|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},\qquad \forall x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

这样的范数称为欧几里德 (Euclid) 范数，因为对于 $m=1,2$ 或 3 的情形，这范数与我们按照欧氏几何计算的向量的长度是一致的.

在本节中，我们推广范数的概念.

**定义1** 设 $N$ 是定义于 $\mathbb{R}^m$ 上的一个函数，它满足以下条件

$(N_1)$ $N(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^m$; 并且

$$N(x)=0\Longleftrightarrow x=0;$$

$(N_2)$ $N(\lambda x)=|\lambda|N(x)$, $\quad \forall x\in\mathbb{R}^m$, $\lambda\in\mathbb{R}$;

$(N_3)$ $N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$, $\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^m$,

则我们把这样的 $N$ 叫做 $\mathbb{R}^m$ 的一个范数.

**例1** 考察定义于 $\mathbb{R}^m$ 上的函数

$$N_0(x)=\max\{|x^1|,\cdots,|x^m|\},$$
$$N_1(x)=|x^1|+\cdots+|x^m|,$$
$$N_2(x)=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},$$
$$\forall x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

容易验证：$N_0,N_1$ 和 $N_2$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 的范数. 今后，我们将分别用记号 $|\cdot|$, $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 表示范数 $N_0,N_1$ 和 $N_2$. 这就是说，我们约定记：

$$|x|=\max\{|x^1|,\cdots,|x^m|\},$$

$$|x|=|x^1|+\cdots+|x^m|,$$
$$\|x\|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},$$
$$\forall x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

**注记** 在有的文献中，采用这样的记号：

$$\|x\|_\infty=\max\{|x^1|,\cdots,|x^m|\},$$
$$\|x\|_1=|x^1|+\cdots+|x^m|,$$
$$\|x\|_2=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},$$
$$\forall x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

设 $N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的任何一个范数，则 $N$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中决定了一种距离

$$d_N(x,y)=N(x-y),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}^m.$$

按这距离又可以定义 $\mathbb{R}^m$ 中点列的收敛性和 $m$ 元函数的连续性. 这样定义的收敛性和连续性称为按照范数 $N$ 的（或者说按照距离 $d_N$ 的）收敛性和连续性.

值得庆幸的是，对于 $\mathbb{R}^m$ 来说，用任何一种范数决定的收敛性（以及函数的连续性），都是完全一样的. 为说明这一点，先要介绍等价范数的概念.

**定义 2** 设 $M$ 和 $N$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 的范数. 如果存在正实数 $a$ 和 $A$，使得

$$aM(x)\leqslant N(x)\leqslant AM(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^m,$$

那么我们就说范数 $N$ 与范数 $M$ 等价.

**注记** 范数的等价是一种具有反身性，对称性和传递性的关系：

(1) 显然有

$$M(x)\leqslant M(x)\leqslant M(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^m,$$

因而 $M$ 与 $M$ 自身是等价的（反身性）.

(2) 如果范数 $N$ 与范数 $M$ 等价

$$aM(x)\leqslant N(x)\leqslant AM(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^m,$$

那么显然有

$$\frac{1}{A}N(x)\leqslant M(x)\leqslant\frac{1}{a}N(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

即范数 $M$ 也与范数 $N$ 等价. 这说明范数的等价具有对称性.

(3) 如果范数 $N$ 与范数 $M$ 等价，范数 $P$ 与范数 $N$ 等价

$$aM(x)\leqslant N(x)\leqslant AM(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

$$bN(x)\leqslant P(x)\leqslant BN(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

那么

$$baM(x)\leqslant P(x)\leqslant BAM(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

即范数 $P$ 与范数 $M$ 等价. 这说明范数的等价具有传递性.

按照数学中的惯例，只有那些具有反身性，对称性和传递性的关系，才被冠以"等价"这样的称呼.

**定理 1** 按照等价的范数 $N$ 和 $M$ 决定的收敛性（及连续性）是完全一样的.

**证明** 设有

$$aM(x)\leqslant N(x)\leqslant AM(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，它按照范数 $M$ 收敛于 $x_0$，即

$$\lim M(x_n-x_0)=0,$$

那么从不等式

$$N(x_n-x_0)\leqslant AM(x_n-x_0)$$

可以得到

$$\lim N(x_n-x_0)=0,$$

即点列 $\{x_n\}$ 按照范数 $N$ 也收敛于 $x_0$. 在上面的讨论中，$M$ 和 $N$ 的地位可以互相交换（对称性）. 因而，按两种范数定义的收敛性是完全一样的.

函数在一点的连续性可以通过序列方式来定义. 既然按照两种范数定义的点列的收敛性是完全一样的，那么按这两种范数定义的函数的连续性也必定是完全一样的. □

**定理 2** 空间 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个范数都互相等价.

**证明** 只须证明 $\mathbb{R}^m$ 的任何范数 $N$ 都与欧氏范数 $\|\cdot\|$ 等价.

首先，我们指出，$\mathbb{R}^m$ 的任何范数 $N(x)$，都是按照范数 $\|\cdot\|$连续的函数. 为说明这一事实，我们考察 $\mathbb{R}^m$ 的基向量

$$e_1=(1,0,\cdots,0),$$
$$e_2=(0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$e_m=(0,0,\cdots,1),$$

并把 $\mathbb{R}^m$ 中的任意点 $x_0$和 $x$ 表示为:

$$x_0=(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^m)=x_0^1e_1+x_0^2e_2+\cdots+x_0^me_m,$$
$$x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)=x^1e_1+x^2e_2+\cdots+x^me_m.$$

由范数的条件($N_3$),容易得到

$$|N(x)-N(x_0)|\leqslant N(x-x_0).$$

但

$$x-x_0=(x^1-x_0^1)e_1+\cdots+(x^m-x_0^m)e_m,$$

根据范数的条件($N_3$),($N_2$)和柯西不等式，又可得到

$$\begin{aligned}N(x-x_0)&\leqslant N((x^1-x_0^1)e_1)+\cdots+N((x^m-x_0^m)e_m)\\&\leqslant|x^1-x_0^1|N(e_1)+\cdots+|x^m-x_0^m|N(e_m)\\&\leqslant C\|x-x_0\|,\end{aligned}$$

这里

$$C=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(N(e_i))^2}.$$

我们得到了不等式

$$|N(x)-N(x_0)|\leqslant C\|x-x_0\|.$$

由此即可证明函数 $N(x)$按照范数$\|\cdot\|$的连续性.

其次，我们指出，集合

$$K=\{\xi\in\mathbb{R}^m \mid \|\xi\|=1\}$$

是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集（读者自证）．于是，连续函数 $N(x)$ 在 $K$ 上取得最小值 $b$ 和最大值 $B$．根据范数的条件 $(N_1)$，函数 $N(x)$在 $K$ 上恒大于 0，因而它在 $K$ 上的最小值$b>0$．我们得到

$$0<b\leqslant N(\xi)\leqslant B, \qquad \forall \xi\in K.$$

对于任何 $x\in\mathbb{R}^m$，只要 $x\neq 0$，就有

$$\frac{1}{\|x\|}x\in K,$$

因而

$$b\leqslant N\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\leqslant B,$$

$$b\leqslant\frac{1}{\|x\|}N(x)\leqslant B.$$

由此得到

$$b\|x\|\leqslant N(x)\leqslant B\|x\|.$$

这不等式对于 $x=0$ 显然也成立．这就是说，对任何$x\in\mathbb{R}^m$，都有

$$b\|x\|\leqslant N(x)\leqslant B\|x\|.$$

这证明了范数 $N$ 与欧氏范数$\|\cdot\|$等价． □

**例 2** 对于范数

$$|x|=\max\{|x^1|,\cdots,|x^m|\},$$
$$|x|=|x^1|+\cdots+|x^m|,$$
$$\|x\|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2},$$

显然有

$$\frac{1}{m}|x|\leqslant|x|\leqslant\|x\|\leqslant|x|\leqslant m|x|.$$

由此可得

$$\frac{1}{m}\|x\|\leqslant|x|\leqslant\|x\|$$

和

$$\|x\| \leqslant |x| \leqslant m\|x\|.$$

设 $N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的范数，$a \in \mathbb{R}^m$. 我们把集合

$$U_N(a,\eta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid N(x-a) < \eta\}$$

叫做点 $a$ 的 $N$-$\eta$ 邻域（按照范数 $N$ 的 $\eta$ 邻域）. 我们还把集合

$$\check{U}_N(a,\eta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 < N(x-a) < \eta\}$$

叫做点 $a$ 的去心$N$-$\eta$ 邻域.

**例 3** 对于$\mathbb{R}^2$ 的情形，原点 $(0,0)$ 按照范数 $\|\cdot\|$，$|\cdot|$和$|\cdot|$的 $\eta$ 邻域（图11-1）分别为：

$$\sqrt{x^2+y^2} < \eta \quad （开圆盘），$$

$$\max\{|x|,|y|\} < \eta \quad （开正方形）$$

和

$$|x|+|y| < \eta \quad （开菱形）.$$

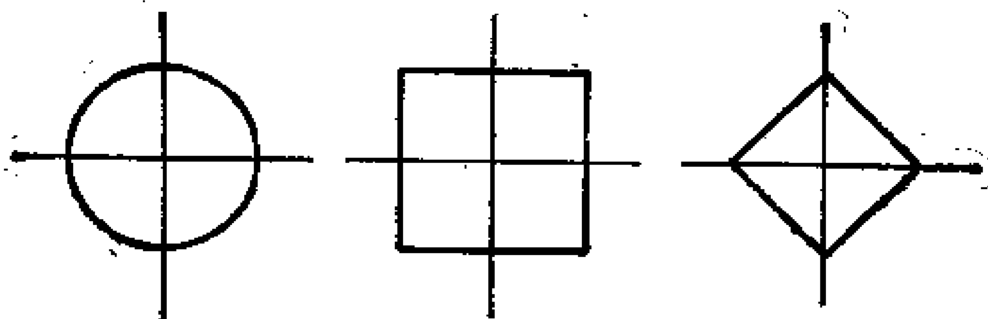


图 11-1

由于这些范数等价，无论用哪一种形状的邻域来描述收敛性与连续性，效果都相同.

## §7 距离空间的一般概念

### 7.a 距离空间、点列的收敛性与映射的连续性

通过前面几节的讨论，我们已经领会到：极限和连续性这些概念，实际上只与空间的距离结构有关. 本节将对更一般的距离

空间展开讨论.

设 $E$ 和 $F$ 是两个非空集合. 我们把由有序对$(x,y)(x\in E, y\in F)$组成的集合

$$\{(x,y)\mid x\in E, y\in F\}$$

称为集合 $E$ 与集合 $F$ 的直积（或称笛卡尔积），记为 $E\times F$.

$$E\times F=\{(x,y)\mid x\in E, y\in F\}.$$

特别地，$E\times E$ 是由$E$的元素对组成的集合:

$$E\times E=\{(x,y)\mid x\in E, y\in E\}.$$

**定义 1** 设 $X$ 是一个非空集合,

$$d: X\times X\longrightarrow \mathbb{R}$$

是一个映射，它满足以下条件

$(D_1)$ $d(x,y)\geqslant 0, \forall x,y\in X$; 并且

$$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y,$$

$(D_2)$ $d(x,y)=d(y,x), \quad \forall x,y\in X$;

$(D_3)$ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z), \quad \forall x,y,z\in X$,

则称这样的 $d$ 为 $X$ 上的一个距离，称 $(X,d)$ 为距离空间（在不致于混淆的情况下，也简略地说: $X$是一个距离空间）.

**注记** 按照定义，距离空间是这样的集合: 对它的任意两个元素$x$和 $y$，都定义了一个确定的距离 $d(x,y)$，并且这样定义的距离具有我们通常空间中点的距离的一些最重要、最基本的性质($(D_1)$—$(D_3)$). 性质$(D_3)$被称为三角形不等式,它的原始模型就是平面几何中的定理: 三角形的一边小于其他两边之和. 距离空间也称为度量空间.

在距离空间$(X,d)$中，我们把点集

$$U_d(a,\eta)=\{x\in X\mid d(x,a)<\eta\}$$

称为点 $a$ 的 $\eta$ 邻域，并把点集

$$\check{U}_d(a,\eta)=\{x\in X\mid 0<d(x,a)<\eta\}$$

称为点 $a$ 的去心 $\eta$ 邻域（在不致于混淆的情况下，也就把 $U_d(a,\eta)$ 和 $\check{U}_d(a,\eta)$简单地写为 $U(a,\eta)$ 和$\check{U}(a,\eta)$).

**定义 2** 设$(X,d)$是一个距离空间，$\{x_n\}$ 是 $X$ 中的一个点列，$a\in X$. 如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$d(x_n,a)<\varepsilon,$$

那么我们就说点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，或者说点列 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限.

利用距离的性质$(D_1)$—$(D_3)$，容易证明收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的. 我们把这唯一的极限记为 $\lim x_n$.

**定义 3** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$\Omega\subset X, a\in X$. 如果

$$\check{U}(a,\eta)\cap\Omega\neq\phi,\qquad \forall\eta>0,$$

那么我们就说 $a$ 是集合 $\Omega$ 的一个聚点.

**注记** $a$ 为集合 $\Omega$ 的聚点的充分必要条件是：存在点列$\{x_n\}\subset\Omega\backslash\{a\}$，使得

$$\lim x_n=a.$$

**定义 4** 设 $(X,d)$ 和 $(X',d')$ 都是距离空间，$\Omega\subset X$,

$$f:\quad \Omega\longrightarrow X'$$

是一个映射，$a\in X, A\in X'$. 如果对于 $\Omega\backslash\{a\}$ 中收敛于 $a$ 的任何点列$\{x_n\}$，相应的点列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $A$ 为极限，那么我们就说当 $x$ 沿集合 $\Omega$ 趋于 $a$ 时，映射 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \Omega}} f(x)=A.$$

**注记** 与定义 4 等价的 $\varepsilon$-$\delta$ 说法是：如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x\in\Omega,\quad 0<d(x,a)<\delta,$$

就有

$$d'(f(x),A)<\varepsilon,$$

那么我们就说：当 $x$ 沿集合 $\Omega$ 趋于 $a$ 时，映射 $f(x)$ 以 $A$ 为极限.

**定义 5** 设$(X,d)$和$(X',d')$都是距离空间，$\Omega\subset X$,

$$f: \quad \Omega \longrightarrow X'$$

是一个映射，$a \in \Omega$. 如果对于 $\Omega$ 中收敛于 $a$ 的任何点列 $\{x_n\}$，相应的点列 $\{f(x_n)\}$ 都以 $f(a)$ 为极限，那么我们就说映射 $f$ 在点 $a$ 连续. 如果映射 $f$ 在 $\Omega$ 的每一点连续，那么我们就说映射 $f$ 在 $\Omega$ 连续.

**注记** 与定义5等价的 $\varepsilon$-$\delta$ 说法是：如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x \in \Omega, \quad d(x,a)<\delta,$$

就有

$$d'(f(x),f(a))<\varepsilon,$$

那么我们就说映射 $f$ 在点 $a$ 连续.

**定理1** 设 $(X_1,d_1)$，$(X_2,d_2)$ 和 $(X_3,d_3)$ 都是距离空间，$G \subset X_1, H \subset X_2$. 如果 $f: G \longrightarrow X_2$ 和 $g: H \longrightarrow X_3$ 都是连续映射，并且 $f(G) \subset H$，那么复合映射

$$g \circ f: \quad G \longrightarrow X_3$$

也是连续映射.

**证明** 设 $a$ 是 $G$ 中任意一点，$\{x_n\}$ 是 $G$ 中收敛于点 $a$ 的任意点列，则 $\{f(x_n)\}$ 是 $H$ 中收敛于点 $f(a)$ 的点列，于是点列

$$\{g(f(x_n))\}$$

应收敛于 $g(f(a))$. 这证明了复合映射 $g \circ f$ 在点 $a$ 的连续性.

□

**定义6** 设 $X$ 是一个非空集合，$d_1$ 和 $d_2$ 都是 $X$ 上的距离. 如果存在正实数 $a$ 和 $A$，使得

$$ad_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant Ad_1(x,y), \qquad \forall x,y \in X,$$

那么我们就说距离 $d_2$ 与距离 $d_1$ 等价.

**例1** 设 $X$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子集，$N_1$ 和 $N_2$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的范数，则 $N_1$ 和 $N_2$ 在 $X$ 上诱导出等价的距离 $d_1$ 和 $d_2$，这里

$$d_1(x,y)=N_1(x-y), \qquad d_2(x,y)=N_2(x-y).$$

**例 2** 设 $X=S$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周，即

$$X=S=\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^1)^2+(x^2)^2=1\}.$$

对于 $u,v\in X$，我们用记号 $d_1(u,v)$ 表示 $u$ 和 $v$ 这两点间的直线距离，即规定

$$d_1(u,v)=\sqrt{(u^1-v^1)^2+(u^2-v^2)^2},$$

又用记号 $d_2(u,v)$ 表示这两点间较短的一段圆弧的长度．容易验证：$d_1$ 和 $d_2$ 都是 $X$ 上的距离．将证明这两距离是等价的．为此，我们用 $\theta=\theta(u,v)$ 表示这两点间的短弧长度的一半（见图 11-2）．于是，显然有

$$\frac{d_1(u,v)}{d_2(u,v)}=\frac{2\sin\theta}{2\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta},$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

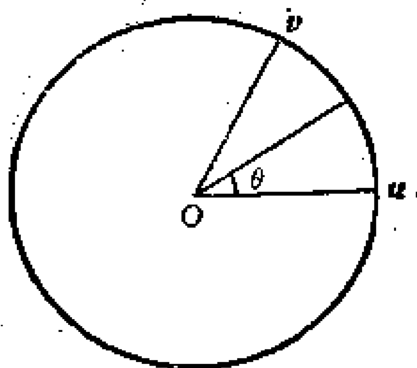


图 11-2

但我们知道

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin\theta}{\theta}\leqslant 1$$

（参看第八章 §4 例 4）．

由此得到

$$\frac{2}{\pi}d_2(u,v)\leqslant d_1(u,v)\leqslant d_2(u,v)$$

（这不等式对 $u=v$ 的情形也成立）．我们证明了两种距离的等价性．

### 7.b 距离空间中的点集

对于 $E\subset X$ 的情形，我们约定把集合

$$X\backslash E$$

叫做集合 $E$ 的补集（集合 $E$ 在 $X$ 中的补集）．

设 $(X,d)$ 是一个距离空间，$E$ 是 $X$ 的一个子集，$a$ 是 $X$ 中

任意一点．关于点 $a$ 和集合 $E$，可能出现以下三种情形：

（1）点 $a$ 连同它的一个邻域 $U$ $(a,\delta)$ 包含在集合 $E$ 之中，即存在 $\delta>0$ 使得

$$U(a,\delta)\subset E;$$

（2）点 $a$ 至少有一个邻域 $U$ $(a,\delta)$ 不与集合 $E$ 相交，即存在 $\delta>0$ 使得

$$U(a,\delta)\cap E=\phi$$

（这等价于 $U(a,\delta)\subset X\backslash E$）；

（3）在点 $a$ 的任何一个邻域 $U$ $(a,\eta)$ 之中，既含有 $E$ 的点，也含有 $X\backslash E$ 的点，即对任意的 $\eta>0$ 都有

$$U(a,\eta)\cap E\neq\phi,\quad U(a,\eta)\cap(X\backslash E)\neq\phi.$$

**定义 7** 对于上面的情形（1），我们说点 $a$ 是集合 $E$ 的内点；对于上面的情形（2），我们说点 $a$ 是集合 $E$ 的外点；对于上面的情形（3），我们说点 $a$ 是集合 $E$ 的边界点．由集合 $E$ 的所有内点组成的集合，称为 $E$ 的内部，记为 $\mathrm{int}E$ 或者 $E^0$；由集合 $E$ 的所有外点组成的集合，称为 $E$ 的外部，记为 $\mathrm{ext}E$；由集合 $E$ 的所有边界点组成的集合，称为 $E$ 的边界，记为 $\mathrm{Bd}E$．

**定义 8** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$F\subset X$．如果 $F$ 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim x_n$ 仍属于 $F$，那么我们就说 $F$ 是距离空间 $(X,d)$ 中的闭集．

显然全空间 $X$ 本身就是一个闭集．空集 $\phi$ 也被认为是一个闭集．

**定义 9** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$G\subset X$．如果 $G$ 完全由内点组成，即 $G$ 的任何一点都有一个邻域包含在 $G$ 之中，那么我们就说 $G$ 是距离空间 $(X,d)$ 中的开集．

显然全空间 $X$ 本身就是一个开集．空集 $\phi$ 也被认为是一个开集．

**定理 2** 开集的补集是闭集，闭集的补集是开集．

**证明** 先证开集的补集是闭集．设 $G$ 是一个开集，$F=X\setminus G$．我们来考察 $F$ 中的任何一个收敛点列 $\{x_n\}$．假如

$$\lim x_n=a\notin F,$$

那么

$$a\in X\setminus F=G,$$

因而存在 $\varepsilon>0$，使得

$$U(a,\varepsilon)\subset G=X\setminus F.$$

于是，当 $n$ 充分大时，就会有

$$x_n\in U(a,\varepsilon)\subset X\setminus F.$$

但这与 $\{x_n\}\subset F$ 矛盾．这一矛盾说明：对于 $F$ 中的任何收敛点列 $\{x_n\}$，必须有

$$\lim x_n\in F,$$

即 $F$ 是一个闭集．

再来证明闭集的补集是开集．设 $F$ 是一个闭集，$G=X\setminus F$．对于 $G$ 中任何一点 $b$，我们来考察 $b$ 的一串邻域

$$U\left(b,\frac{1}{n}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

假如每一邻域 $U\left(b,\frac{1}{n}\right)$ 都至少含有 $F$ 的一点 $y_n$，那么在闭集 $F$ 中就有收敛于 $b$ 的点列 $\{y_n\}$，因而 $b\in F$．但这与 $b\in G=X\setminus F$ 矛盾．这一矛盾说明，必定有一个 $\delta=\frac{1}{n_0}>0$，使得 $U(b,\delta)$ 不含有 $F$ 的点，即

$$U(b,\delta)\subset X\setminus F=G.$$

这样，我们证明了 $G$ 是一个开集． □

**引理** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$a\in X$，$\eta>0$，$E$ 是 $X$ 的任意子集，则

(1) $U(a,\eta)$ 是开集；

(2) $\operatorname{int} E$ 是开集；

(3) ext $E$ 是开集.

**证明** 留给读者作为练习. □

**定理 3** 设$(X,d)$是距离空间，$E$ 是 $X$ 的任意一个子集. 我们记

$$\bar{E}=E\cup \mathrm{Bd}E,$$

则有

(1) $\bar{E}$ 是一个闭集;

(2) $\bar{E}$ 中任何一点 $c$ 都是 $E$ 中一个点列的极限;

(3) $\bar{E}$ 是包含 $E$ 的最小闭集.

**证明** 从显然的集合等式

$$X=E\cup \mathrm{Bd}E\cup \mathrm{ext}E$$

可以得到

$$\bar{E}=E\cup \mathrm{Bd}E=X\setminus \mathrm{ext}E.$$

但 ext $E$ 是一个开集，所以 $\bar{E}=X\setminus \mathrm{ext}E$ 是一个闭集. 这证明了结论 (1).

(2) 设 $c$ 是$\bar{E}=E\cup \mathrm{Bd}E$ 中的任意一点. 如果 $c\in E$，那么显然有 $E$ 中的常点列

$$c,\ c,\ c,\ \cdots$$

收敛于 $c$. 如果 $c\in \mathrm{Bd}E$，那么在 $c$ 的任何邻域 $U\left(c,\frac{1}{n}\right)$之中都必定含有 $E$ 中的点，即存在

$$x_n\in U\left(c,\frac{1}{n}\right)\cap E,\qquad n=1,2,\cdots.$$

于是，$E$ 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $c$.

(3) 设 $F$ 是包含 $E$ 的任何闭集. 我们来证明 $F$ 必定包含 $\bar{E}$. 事实上，任何 $c\in\bar{E}$ 都是 $E$ 中某个收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限. 但

$$\{x_n\}\subset E\subset F,$$

所以 $c$ 也是 $F$ 中收敛点列的极限. 又因为 $F$ 是闭集，所以

$c\in F$. 我们证明了

$$\bar{E}\subset F. \qquad \square$$

**注记** 我们把 $\bar{E}=E\cup \mathrm{Bd}E$ 叫做集合 $E$ 的闭包。除了 $\bar{E}$ 这样的记号以外，人们还常常采用记号 $\mathrm{Cl}E$ 来表示集合 $E$ 的闭包，即约定

$$\mathrm{Cl}E=\bar{E}=E\cup \mathrm{Bd}E.$$

从上面定理中的 (1) 和 (2) 可知，$c\in \mathrm{Cl}E$ 的充分必要条件是：有 $E$ 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $c$. 根据上面定理中的 (3)，闭包 $\mathrm{Cl}E$ 可以定义为包含 $E$ 的最小闭集.

### 7.c 完备性、压缩映射原理

**定义10** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$\{x_n\}$ 是 $X$ 中的一个点列. 如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要

$$n,p\in\mathbb{N}, \quad n>N,$$

就有

$$d(x_{n+p},x_n)<\varepsilon,$$

那么我们就说 $\{x_n\}$ 是 $(X,d)$ 中的一个基本序列或柯西序列.

**定理 4** $(X,d)$中的收敛序列都是柯西序列.

**证明** 设 $\{x_n\}$ 是$(X,d)$中的收敛序列，$\lim x_n=a$. 则对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对于

$$n,p\in\mathbb{N}, \quad n>N,$$

就有

$$d(x_{n+p},x_n)\leqslant d(x_{n+p},a)+d(a,x_n)$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad \square$$

**定义11** 设 $(X,d)$ 是距离空间. 如果 $(X,d)$ 中的任何基

本序列都是收敛序列，那么我们就说距离空间 $(X,d)$ 是完备的，或者说距离 $d$ 是完备的.

**例3** 在 $\mathbb{R}^m$ 中用任何一种范数 $N$ 来定义距离

$$d(x,y)=N(x-y), \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^m.$$

这样得到的距离空间$(\mathbb{R}^m,d)$都是完备的.

**例4** 设 $X$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的非空闭子集. 用 $\mathbb{R}^m$ 的任何一种范数 $N$ 在 $X$ 上定义距离

$$d(x,y)=N(x-y), \quad \forall x,y\in X.$$

这样得到的距离空间 $(X,d)$ 也是完备的.

**定义12** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$\varphi$: $X\to X$ 是一个映射. 如果存在 $\alpha\in[0,1)$，使得

$$d(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant\alpha d(x,y), \quad \forall x,y\in X,$$

那么我们就说 $\varphi$ 是一个压缩映射.

**注记** 显然压缩映射都是连续映射.

设 $X$ 是一个集合，$\varphi$: $X\to X$ 是一个映射. 如果 $\xi\in X$ 使得

$$\varphi(\xi)=\xi,$$

那么我们就说 $\xi$ 是映射 $\varphi$ 的一个不动点.

下面的重要定理被称为压缩映射原理或者巴纳赫 (Banach) 不动点原理.

**定理5** 完备距离空间 $(X,d)$ 的压缩映射 $\varphi$ 必定有唯一的不动点.

**证明** 先证明不动点的存在性. 任取 $x_0\in X$，按下式定义一个迭代序列

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \quad n=0,1,2,\cdots.$$

因为 $\varphi$ 是压缩映射，所以

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&=d(\varphi(x_n),\varphi(x_{n-1}))\\&\leqslant\alpha d(x_n,x_{n-1}), \quad \forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n) &\leqslant \alpha d(x_n,x_{n-1}) \\
&\leqslant \alpha^2 d(x_{n-1},x_{n-2}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\leqslant \alpha^n d(x_1,x_0).
\end{aligned}
$$

利用这一估计可以证明$\{x_n\}$是基本序列．事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+p},x_n) &\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+\cdots+d(x_{n+1},x_n) \\
&\leqslant (\alpha^{n+p-1}+\cdots+\alpha^n)d(x_1,x_0) \\
&\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0).
\end{aligned}
$$

因为$\alpha\in[0,1)$，$\lim\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)=0$，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)<\varepsilon.$$

这证明了$\{x_n\}$是基本序列．从空间$(X,d)$的完备性可知，点列$\{x_n\}$是收敛的．设

$$\lim x_n=\xi.$$

对等式

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

取极限，利用$\varphi$的连续性就得到

$$\xi=\varphi(\xi).$$

再来证明不动点的唯一性．假设另有$\xi'\in X$也使得

$$\xi'=\varphi(\xi'),$$

则有

$$0\leqslant d(\xi',\xi)=d(\varphi(\xi'),\varphi(\xi))\leqslant \alpha d(\xi',\xi).$$

但$0\leqslant\alpha<1$，要使上式成立，只能有

$$d(\xi',\xi)=0,$$

即$\xi'=\xi$．这证明了不动点的唯一性． □

**注记** 压缩映射的定义即保证了它的不动点不能多于一个. 在上面定理唯一性部分的证明中，并未用到空间完备性的条件. 但为了保证不动点的存在性，空间完备这一条件却不能取消. 请看下面的反例：

**例 5** 在 $X=(0,1]$ 上定义距离

$$d(x,y)=|x-y|,\quad \forall x,y\in(0,1].$$

易见

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}x$$

是一个压缩映射. 但 $\varphi$ 在 $X$ 中没有不动点（因为 $\frac{1}{2}x=x$ 的唯一解 $x=0$ 不在 $(0,1]$ 之中）.

## §8 紧 致 性

虽然我们主要关心的是空间 $\mathbb{R}^n$ 中的问题，但许多概念和结果，可以在一般距离空间的框架中进行讨论.

**定义 1** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$K\subset X$. 如果 $K$ 中的任何点列 $\{x_n\}$ 都至少含有一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，这子序列收敛于 $K$ 中的某点，那么我们就说 $K$ 是距离空间 $(X,d)$ 中的一个列紧集.

**注记** 如果 $X$ 本身就是列紧的，那么我们说 $(X,d)$ 是列紧空间（或者就简单地说 $X$ 是列紧空间）.

**例 1** 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任何有界闭集 $K$ 都是这空间中的列紧集.

**定义 2** 设 $E$ 是 $X$ 的一个子集，$\mathcal{V}=\{V\}$ 是 $X$ 的一族子集. 如果 $E$ 中的任何一点都至少属于 $\mathcal{V}$ 中的一个集合 $V$：

$$(\forall x\in E)\ (\exists V\in\mathcal{V})\ (x\in V),$$

那么我们就说集合族 $\mathcal{V}$ 覆盖了集合 $E$.

**注记** 作为约定，我们认为：空集 $\phi$ 包含于任何集合 $V$ 之

中；集合 $E=\phi$ 能被任何集合族 $\mathcal{V}=\{V\}$ 所覆盖.

**定义 3** 设 $(X,d)$ 是一个距离空间，$E\subset X$，$\mathcal{V}=\{V\}$ 是 $X$ 的一族开子集. 如果 $\mathcal{V}$ 覆盖了 $E$，那么我们就说 $\mathcal{V}$ 是 $E$ 的一个开覆盖.

**定义 4** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$C\subset X$. 如果 $C$ 的任何开覆盖 $\mathcal{V}$ 都至少含有一个有限子族 $\mathcal{V}'$，这子族仍覆盖住 $C$，那么我们就说 $C$ 是 $(X,d)$ 中的紧致集.

**注记** 如果 $X$ 本身就是紧致的，那么我们说 $(X,d)$ 是紧致空间.

对于空间 $\mathbb{R}^m$ 来说，"紧致集" "列紧集" 和 "有界闭集" 这三者完全是一回事. 为了证明这个重要的结论，先要作一些准备.

设 $E^1$，$E^2$，…，$E^m$ 是 $m$ 个集合. 我们把集合

$$E=\{(x^1,\ \cdots,\ x^m)\,|\,x^1\in E^1,\ \cdots,\ x^m\in E^m\}$$

称为集合 $E^1,E^2,\cdots,E^m$ 的直积，记为

$$E=E^1\times E^2\times\cdots\times E^m.$$

例如，$\mathbb{R}^m$ 可以看成 $m$ 个 $\mathbb{R}$ 的直积

$$\mathbb{R}^m=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{m\text{个因子}}.$$

**定义 5** 设 $I^1=[a^1,b^1]\subset\mathbb{R}$，$I^2=[a^2,b^2]\subset\mathbb{R}$，…，$I^m=[a^m,b^m]\subset\mathbb{R}$. 我们把集合

$$I=I^1\times I^2\times\cdots\times I^m\subset\mathbb{R}^m$$

叫做 $\mathbb{R}^m$ 中的闭方块，并把实数

$$l(I)=\max\{b^1-a^1,\ \cdots,\ b^m-a^m\}$$

叫做这闭方块的线度.

**注记** 用类似的方式还可以定义 $\mathbb{R}^m$ 中的开方块以及部分边界开、部分边界闭的方块. 这里不再一一细说了.

对于 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a,b]$，我们可以用中点 $\frac{a+b}{2}$ 把它

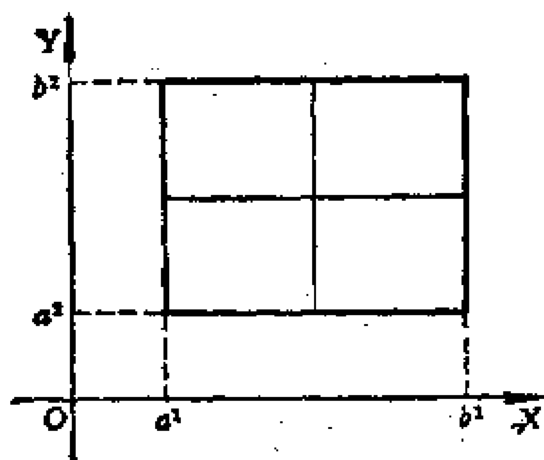



图 11-3

分成两个闭子区间，其中每一个闭子区间的长度为原区间长度的一半、对于 $R^2$ 中的闭矩形(闭方块)$I=[a^1,b^1]\times[a^2,b^2]$，我们可以把它分成四个闭子矩形（闭子方块），其中每一个闭子矩形的边长为原矩形边长的一半（图 11-3）．

对更一般的情形，我们有以下结果、

**引理1** 设 $I$ 是 $R^m$ 中的闭方块，则我们可以把它表示成 $2^m$ 个闭子方块的并集：

$$I=J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_{2^m},$$

其中每一个闭子方块的线度为原方块线度的$\frac{1}{2}$：

$$l(J_k)=\frac{1}{2}l(I),\ \ k=1,2,\cdots,2^m.$$

**证明** 设 $I=I^1\times I^2\times\cdots\times I^m$，每一个 $I^i=[a^i,b^i]$ 是 R 中的闭区间．考察 $R^m$ 中的如下形式的闭方块：

$$J=J^1\times J^2\times\cdots\times J^m,$$

这里的每一个因子 $J^i$ 或者为$\left[a^i,\ \frac{a^i+b^i}{2}\right]$，或者为$\left[\frac{a^i+b^i}{2},\ b^i\right]$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 显然有

$$l(J)=\frac{1}{2}l(I).$$

容易看出 $J\subset I$. 还容易看出：$I$ 中的每一点 $x$ 至少包含在一个这种形式的闭子方块 $J$ 中（因为它的每一坐标 $x^i$ 或者落入$\left[a^i,\ \frac{a^i+b^i}{2}\right]$之中，或者落入$\left[\frac{a^i+b^i}{2},\ b^i\right]$之中）．

所有这种形式的 $J$ 总共有 $2^n$ 个. 把它们编号为

$$J_1, J_2, \cdots, J_{2^n},$$

则有

$$I=J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_{2^n},$$

$$l(J_k)=\frac{1}{2}l(I), \quad k=1,2,\cdots,2^n. \qquad \square$$

**定义 6** 设$\{I_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一串闭方块，满足条件

(1) $I_1\supset I_2\supset\cdots I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$;

(2) $l(I_n)\to 0$,

则称这串闭方块为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭方块套.

**引理 2**（闭方块套原理） 设 $\{I_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭方块套，则有 $\mathbf{R}^n$ 中唯一的一点 $c$，适合

$$c\in I_n, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

**证明** 设 $I_n=I_n^1\times I_n^2\times\cdots\times I_n^m$, $n=1,2,\cdots$. 容易看出：闭方块套$\{I_n\}$在每一坐标轴上的投影

$$I_n^i, \quad n=1,2,\cdots,$$

都构成 $\mathbf{R}$ 中的一个闭区间套：

(1) $I_1^i\supset I_2^i\supset\cdots\supset I_n^i\supset I_{n+1}^i\supset\cdots$;

(2) $l(I_n^i)\to 0 \quad (n\to+\infty)$.

从$\mathbf{R}$中的闭区间套原理可知，存在唯一的 $c^i$，适合

$$c^i\in I_n^i, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

记

$$c=(c^1,c^2,\cdots,c^m),$$

则显然 $c$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中适合以下条件的唯一点：

$$c\in I_n, \quad \forall n\in\mathbf{N}. \qquad \square$$

在作了这些准备之后，我们来证明本节的主要定理.

**定理 1** 对于空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集$K$，以下三条陈述相互等价：

(1) $K$ 是紧致集；

(2) $K$ 是列紧集；

(3) $K$ 是有界闭集。

**证明** 我们将循以下途径证明三条陈述相互等价：

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).$$

首先来证明"(1) ⇒ (2)". 设 $K$ 是紧致集，$\{x_n\}$ 是 $K$ 中任意点列. 如果存在 $a \in K$，它的每一邻域中都含有点列 $\{x_n\}$ 的无穷多项，那么就一定可以从 $\{x_n\}$ 中选出一个子序列收敛于 $a$（请读者自证这一结论）. 下面我们用反证法证明满足上述条件的 $a$ 一定存在. 假如不是这样，那么任何 $b \in K$ 都有一个邻域 $U(b)$，其中只含点列 $\{x_n\}$ 的有限多项. 所有这样的

$$U(b), \quad b \in K,$$

覆盖了 $K$. 因为每一 $U(b)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限多项，至少要无穷多个这样的 $U(b)$ 才能盖住 $\{x_n\}$，所以 $K$ 的开覆盖

$$U(b), \quad b \in K,$$

不可能具有有限子覆盖. 这一矛盾说明：存在 $a \in K$，它的每一邻域中都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 我们从陈述 (1) 推得了陈述 (2).

其次证明"(2) ⇒ (3)"（用反证法）. 假如 $K$ 无界，那么对任何 $n \in \mathbf{N}$ 都存在 $x_n \in K$，使得

$$\|x_n\| > n.$$

如果这点列的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $K$ 中某点 $a$，那么从

$$\left|\|x_{n_k}\| - \|a\|\right| \leqslant \|x_{n_k} - a\|$$

可得

$$\lim \|x_{n_k}\| = \|a\|,$$

但这与

$$\|x_{n_k}\| > n_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

相矛盾. 我们证明了 $K$ 必须是有界的. 假如 $K$ 不是闭集，那么存在点列 $\{y_n\} \subset K$，使得

$$\lim y_n = b \notin K.$$

这点列 $\{y_n\}$ 不可能有子序列收敛于 $K$ 中的某点（因为 $\{y_n\}$ 的任

何子序列仍应收敛于 $b\in K$). 这一矛盾说明: $K$ 必须是闭集.

再来证明"(3) ⇒ (1)"(仍用反证法). 有界闭集 $K$ 可以包含在一个闭方块 $I_0$ 之中. 假设 $\mathscr{O}$ 是 $K$ 的一个开覆盖, 它的任何有限子族都不能覆盖 $K$, 我们来推出矛盾. 按照引理1中的作法, 可以把 $I_0$ 分成 $2^n$ 个闭子方块, 其中至少有某一个闭子方块 $I_1$, 使得

$$I_1\cap K$$

不能被$\mathscr{O}$的任何有限子族所覆盖. 这闭子方块的线度为

$$l(I_1)=\frac{1}{2}l(I_0).$$

再把 $I_1$ 分成 $2^n$ 个闭子方块, 其中又至少有某一个闭子方块 $I_2$, 使得

$$I_2\cap K$$

不能被$\mathscr{O}$的任何有限子族所覆盖. 这闭子方块的线度为

$$l(I_2)=\frac{1}{2}l(I_1)=\frac{1}{2^2}l(I_0).$$

继续这样的手续, 我们就能作出一个闭方块套:

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots,$$

$$l(I_n)=\frac{1}{2^n}l(I_0)\to 0,$$

其中的 $I_n$ 使得

$$I_n\cap K$$

不能被$\mathscr{O}$的任何有限子族所覆盖 $(n=1,2,\cdots)$. 由闭方块套原理可知, 存在唯一的 $c$, 它满足

$$c\in I_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

对任何 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $I_n\cap K\neq\phi$, 所以存在

$$x_n\in I_n\cap K.$$

易见 $K$ 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $c$:

$$\lim x_n=c.$$

因为 $K$ 是闭集，所以 $c\in K$. 于是 $c$ 为 $\mathcal{Q}$ 的某一个开集 $V$ 盖住：

$$c\in V.$$

于是又存在 $\eta>0$，使得

$$U(c,\eta)\subset V.$$

取 $n$ 充分大，使得

$$\|x_n-c\|<\frac{\eta}{2},$$

$$l(I_n)=\frac{1}{2^n}\,l(I_0)<\frac{\eta}{2\sqrt{m}}.$$

于是，$I_n$ 中任意一点 $x$ 到 $c$ 的距离

$$\begin{aligned}\|x-c\|&\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-c\|\\&<\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x^i-x_n^i)^2}+\frac{\eta}{2}\\&<\sqrt{m\left(\frac{\eta}{2\sqrt{m}}\right)^2}+\frac{\eta}{2}\\&=\eta.\end{aligned}$$

这证明了

$$I_n\subset U(c,\eta)\subset V.$$

但这与 $I_n$ 的选取方式矛盾（$I_n$ 不能被 $\mathcal{Q}$ 中有限个开集所覆盖）. 这一矛盾说明：$\mathbb{R}^m$ 中的有界闭集必定是紧致集. □

**定理 2** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$K$ 是 $X$ 中的紧致集，$f$: $K\to\mathbb{R}$ 是连续函数，则

(1) $f$ 在 $K$ 上是有界的；

(2) $f$ 在 $K$ 上是一致连续的.

**证明** (1) 对任何 $a\in K$，因为

$$\lim_{\substack{x\to a\\K}} f(x)=f(a),$$

所以存在 $a$ 的邻域 $U(a)$，使得

$$x \in U(a) \cap K \Longrightarrow |f(x)| < |f(a)| + 1.$$

所有的这样的 $U(a)$ 构成 $K$ 的一个开覆盖：

$$K \subset \bigcup_{a \in K} U(a).$$

于是，存在有限个 $U(a)$，它们仍覆盖 $K$：

$$K \subset U(a_1) \cup \cdots \cup U(a_p).$$

记

$$L = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \{|f(a_i)| + 1\},$$

则有

$$|f(x)| < L, \quad \forall x \in K.$$

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和任何 $b \in K$，存在 $b$ 的邻域 $U(b, \eta)$，使得

$$x \in U(b, \eta) \cap K \Longrightarrow |f(x) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，只要 $x, x' \in U(b, \eta) \cap K$，就有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

所有的 $U\left(b, \frac{\eta}{2}\right)$ 构成 $K$ 的一个开覆盖. 于是，应该有其中的有限个，它们仍能覆盖 $K$：

$$K \subset U\left(b_1, \frac{\eta_1}{2}\right) \cup \cdots \cup U\left(b_q, \frac{\eta_q}{2}\right).$$

记

$$\delta = \min\left\{\frac{\eta_1}{2}, \cdots, \frac{\eta_q}{2}\right\}.$$

我们指出：只要 $x, x' \in K$，$d(x, x') < \delta$，就必定有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

事实上，对这 $x \in K$，存在 $b_i (1 \leqslant i \leqslant q)$ 使得

$$x \in U\left(b_i, \frac{\eta_i}{2}\right).$$

因为

$$x'\in K,\quad d(x',x)<\delta\leqslant\frac{\eta_i}{2},$$

所以

$$x'\in U(b_i,\eta_i)\cap K.$$

我们看到

$$x,x'\in U(b_i,\eta_i)\cap K.$$

由此可知

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.\qquad\square$$

**注记** 对于一般的距离空间，紧致集与列紧集仍然是同一回事，但有界闭集可以不是列紧-紧致集. 我们将在本节末的附录中，讨论这些问题.

读者可能已注意到：§5中定理2、定理3和定理4的证明，实际上是利用了 $K$ 的列紧性. 通过这些定理的证明以及本节中定理2的证明，可以领会到列紧性和紧致性的重要意义.

## 附　　录

在这附录里，我们考察一般距离空间中紧致性与列紧性之间的关系.

设 $(X,d)$ 是距离空间，$S$ 是 $X$ 的一个非空子集，我们把

$$\operatorname{diam}S=\sup_{x,x'\in S}d(x,x')$$

叫做集合 $S$ 的直径. 对于空集 $\phi$，我们约定

$$\operatorname{diam}\phi=0.$$

如果

$$\operatorname{diam}S<+\infty,$$

那么我们就说集合 $S$ 是有界的.

**引理** 设 $(X,d)$ 是距离空间，$K$ 是 $X$ 中的列紧集，$\mathcal{V}=\{V\}$ 是 $K$ 的一个开覆盖. 则存在 $\delta>0$，使得只要集合 $S\subset X$ 满足条件

$$S\cap K\neq\phi,\ \operatorname{diam}S<\delta,$$

就能断定 $S$ 包含在$\mathcal{V}$的某个开集 $V$ 之中。

**证明** 用反证法。假设所说的$\delta$不存在，那么必定存在 $X$ 的一串子集合

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots,$$

使得

$$S_n\cap K\neq\phi,\ \operatorname{diam}\ S_n<\frac{1}{n},$$

但是

$$S_n\not\subset V,\quad \forall V\in\mathcal{V}.$$

我们选取

$$x_n\in S_n\cap K,\quad n=1,2,\cdots.$$

根据列紧性的定义，序列 $\{x_n\}\subset K$ 有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $K$ 中的某一点 $a$：

$$\lim x_{n_k}=a\in K.$$

于是，存在 $V\in\mathcal{V}$，使得

$$a\in V.$$

因为 $V$ 是开集，并且

$$\operatorname{diam}\ S_{n_k}<\frac{1}{n_k},$$

所以对充分大的 $k$ 也应有

$$S_{n_k}\subset V.$$

但这与 $\{S_n\}$ 的选取方式矛盾。 □

**注记** 引理中的数$\delta>0$被称为覆盖$\mathcal{V}$的勒贝格数（Lebesgue number）。

**定理** 设 $(X,d)$ 是距离空间， $K\subset X$，则以下两陈述等价

(1) $K$ 是紧致集；

(2) $K$ 是列紧集。

**证明** “(1) ⇒ (2)”的推证与定理1证明中的相应讨论

类似，这里就不重复了．下面我们证明“(2) ⇒ (1)”．

设$\mathcal{V}=\{V\}$ 是 $K$ 的任意一个开覆盖，并设$\delta>0$是这覆盖的 Lebesgue 数．记

$$\varepsilon=\frac{\delta}{2}.$$

对任何 $x\in K$，$U(x,\varepsilon)\cap K$ 都包含在某一个 $V\in\mathcal{V}$之中．如果 $K$ 的开覆盖

$$\mathcal{U}=\{U(x,\varepsilon)\,|\,x\in K\}$$

含有有限子覆盖，那么$\mathcal{V}$也含有有限子覆盖．

我们用反证法来证明$\mathcal{U}$含有有限子覆盖．假设 $K$ 不能为有限个 $U(x,\varepsilon)$ 所覆盖．对任意取定的 $x_1\in K$，显然 $U(x_1,\varepsilon)$ 不能盖住 $K$．于是存在 $x_2\in K$，$x_2\notin U(x_1,\varepsilon)$．显然 $U(x_1,\varepsilon)$ 和 $U(x_2,\varepsilon)$ 也不能盖住 $K$．于是又存在 $x_3\in K$，$x_3\notin U(x_1,\varepsilon)$，$x_3\notin U(x_2,\varepsilon)$．继续这样的讨论，我们就可以选出 $K$ 的一个点列 $\{x_n\}$，满足这样的条件

$$d(x_{n+p},x_n)\geqslant\varepsilon,\quad\forall\, n,p\in\mathbf{N}.$$

这样的点列$\{x_n\}\subset K$ 不可能有收敛的子序列．我们得出了矛盾．

□

**注记** 仿照定理 1 证明中的“(2) ⇒ (3)”部分，可以证明距离空间中的紧致-列紧集都是有界闭集．但对于某些距离空间，有界闭集可以不是紧致-列紧集．请看下面的例子．

**例** 设 $X$ 是任意无限集合．在 $X$ 中规定距离 $d$ 如下：

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=y,\\ 1, & \text{如果 } x\neq y.\end{cases}$$

容易验证：这样定义的 $d$ 满足距离三公理 $(D_1)$，$(D_2)$ 和 $(D_3)$．在这样定义的距离空间 $(X,d)$ 之中，任何子集都是有界闭集，但仅仅有限集才是紧致集．

## §9 连 通 性

学习一元函数的时候，我们熟悉了闭区间上连续函数的重要性质：

一、有界性，

二、取得最大值和最小值，

三、一致连续性，

四、介值性质——取得介于它的任意两个值中间的一切值。

在以上几节中，我们推广有关的一些结果到多元函数，证明了：在紧致集（有界闭集）上连续的多元函数也具有性质一、二和三. 但到此为止我们还没有涉及性质四. 实际上，设函数 $f$ 在 $D$ 上连续，能保证 $f$ 具有介值性质的，并不是 $D$ 的紧致性，而是 $D$ 的另外一种性质——连通性. 必须要求 $D$“连成一片”，才能保证介值定理成立.

**例 1** 开区间

$$J=(a,b)$$

是“连成一片”的. 对于在 $J$ 上连续的函数，介值定理也成立.

**例 2** 考察$\mathbb{R}$中的有界闭集

$$K=[-2,-1]\cup[1,2]$$

和定义于 $K$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-2,-1],\\ 1, & x\in[1,2].\end{cases}$$

容易看出：$f$ 在 $K$ 上连续，但却不具有介值性质（请读者自己验证！）.

要说明一个集合是否“连成一片”，有若干种方法. 我们这里只介绍其中最简单的一种——“路径连通”.

设 $T\subset\mathbb{R}$，$E\subset\mathbb{R}^m$，则 $T$ 和 $E$ 都可以看成距离空间，因

而可以讨论映射

$$\varphi: T \longrightarrow E$$

的连续性．因为

$$\max_{1\leq j\leq m}|\varphi^j(t)-\varphi^j(t_0)|\leqslant\|\varphi(t)-\varphi(t_0)\|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}|\varphi^j(t)-\varphi^j(t_0)|,$$

所以映射 $\varphi(t)=(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t))$ 在 $t_0$ 连续的充分必要条件是：它的各分量 $\varphi^j(t)$ 都在 $t_0$ 连续 $(j=1,\cdots,m)$.

**定义 1** 设 $E\subset\mathbf{R}^m$, $x_0,x_1\in E$, 并设

$$\gamma: [0,1]\longrightarrow E$$

是一个连续映射，满足条件

$$\gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x_1,$$

则称 $\gamma$ 为 $E$ 中联结 $x_0$ 和 $x_1$ 的一条*路径*.

**注记** "路径"的直观几何形象就是联结给定两点的一条连续曲线.

**定义 2** 设 $E\subset\mathbf{R}^m$. 如果对任何 $x_0,x_1\in E$, 都至少存在 $E$ 中联结这两点的一条路径，那么我们就说 $E$ 是*路径连通的*.

空集 $\phi$ 也被认为是路径连通的.

**定理 1** 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的路径连通子集，函数 $f$ 在 $E$ 上连续，则 $f$ 具有介值性质.

**证明** 设 $A_0$ 和 $A_1$ 是 $f$ 的任意两个值. 不妨设

$$x_0\in E,\ f(x_0)=A_0,$$

$$x_1\in E,\ f(x_1)=A_1.$$

由于集合 $E$ 的路径连通性，存在连续映射

$$\gamma: [0,1]\longrightarrow E,$$

使得

$$\gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x_1.$$

考察复合映射

$$\varphi(t)=f(\gamma(t)),\ t\in[0,1].$$

这是一个在 $[0,1]$ 上连续的函数，并且

$$\varphi(0)=A_0,\ \varphi(1)=A_1.$$

于是 $\varphi$ 取得介于 $A_0$ 和 $A_1$ 之间的任何值. 因此，函数 $f$ 在点集

$$\gamma([0,1])=\{\gamma(t)\mid t\in[0,1]\}$$

之上可以取得介于 $A_0$ 和 $A_1$ 之间的任何值. □

**定义 3** 我们把 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集 $D$ 称为开区域，并把连通开集 $D$ 的闭包 $\bar{D}$ 称为闭区域.

**定理 2** 在开区域或闭区域上连续的函数具有介值性质.

**证明** 从定理 1 已经知道，在开区域上连续的函数具有介值性质. 以下考察在闭区域上连续的函数.

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开区域，函数 $f$ 在闭区域 $\bar{D}$ 上连续，$A_0$ 和 $A_1$ 是 $f$ 在 $\bar{D}$ 上的两个值，$C$ 介于 $A_0$ 和 $A_1$ 之间. 不妨设

$$x_0\in\bar{D},\ f(x_0)=A_0,$$
$$x_1\in\bar{D},\ f(x_1)=A_1,$$
$$A_0<C<A_1.$$

如果 $x_0,x_1\in D$，那么显然 $f$ 在 $D$ 中某点取得值 $C$. 我们来考察 $x_0$ 与 $x_1$ 之一不在 $D$ 中的情形，例如这样的情形：

$$x_0\in \mathrm{Bd}D,\qquad x_1\in D.$$

记 $\varepsilon=C-A_0>0$. 由于函数 $f$ 在 $\bar{D}$ 上的连续性，对于充分接近于 $x_0\in\mathrm{Bd}D$ 的 $x_0'\in D$，就有

$$f(x_0')=A_0'<A_0+\varepsilon=C.$$

我们看到，存在 $x_0'\in D$ 和 $x_1\in D$，使得

$$f(x_0')=A_0'<C<A_1=f(x_1).$$

由此得知：函数 $f$ 在 $D$ 中某点必定能取到值 $C$.

对于 $x_0$ 和 $x_1$ 两点都在边界 $\mathrm{Bd}D$ 上的情形，也可类似地进行讨论. □

## §10 向量值函数

设 $(X,d)$ 和 $(X',d')$ 是距离空间，$\Omega\subset X$. 对于映射

$$f: \Omega\longrightarrow X',$$

已经定义了极限和连续等概念. 在本节中，我们对

$$X=\mathbf{R}^m,\qquad X'=\mathbf{R}^p$$

的情形，再作一些具体的讨论.

### 10.a 向量值函数的极限与连续性

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$. 我们来考察映射

$$f: \Omega\longrightarrow\mathbf{R}^p.$$

这样的映射被称为向量值函数，因为它的每一个值 $f(x)$ 都是一个 $p$ 维向量：

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^p(x)).$$

我们注意到：向量值函数 $f(x)$ 的每一分量

$$f^i(x)=f^i(x^1,\cdots,x^m)$$

都可以看作一个$m$元数值函数 $(i=1,\cdots,p)$.

**定理1** 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^m$, $a$ 是$\Omega$的一个聚点，向量值函数 $f(x)=(f^1(x),\cdots,f^p(x))$ 在 $\check{U}(a,\eta)\cap\Omega$ 上有定义，$A=(A^1,\cdots,A^p)$. 我们断定：使得

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \Omega}}f(x)=A$$

的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \Omega}}f^i(x)=A^i,\quad i=1,\cdots,p.$$

**证明** 我们有不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p}|f^i(x)-A^i|\leqslant\|f(x)-A\|\leqslant\sum_{i=1}^{p}|f^i(x)-A^i|. \qquad \square$$

**定理 2** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$，$a\in\Omega$，向量值函数 $f(x)=(f^1(x),\cdots,f^p(x))$ 在$\Omega$上有定义. 则 $f(x)$ 在 $a$ 点连续的充分必要条件是：它的每一分量 $f^i(x)$ 都在 $a$ 点连续 $(i=1,\cdots,p)$.

**证明** 我们有不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant p}|f^i(x)-f^i(a)|\leqslant\|f(x)-f(a)\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p}|f^i(x)-f^i(a)|. \qquad \square$$

## 10.b 连续性与开集

先就空间 $\mathbb{R}^m$ 的情形，回顾开集的定义. 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^m$中的点集. 如果对任何 $x\in G$，都存在 $\eta>0$，使得

$$U(x,\eta)\subset G,$$

那么我们就说 $G$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集.

**例 1** $U(a,r)$ 是$\mathbb{R}^m$ 中的开集.

**例 2** 开方块

$$I=\{(x^1,\cdots,x^m)\mathbb{R}\in{}^m|a^i<x^i<b^i,\ i=1,\cdots,m\}$$

是$\mathbb{R}^m$ 中的开集.

**定理 3** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^m$ 中的开集，

$$f:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^p$$

是一个映射. 则 $f$ 在$\Omega$连续的充分必要条件是：对于 $\mathbb{R}^p$ 中的任何开集 $H$，集合

$$G=f^{-1}(H)$$

都是$\mathbb{R}^m$ 中的开集.

**证明** 必要性. 设 $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ 是连续映射，$H$ 是$\mathbb{R}^p$中任意一个开集. 如果 $G=f^{-1}(H)=\phi$，那么按照定义 $G$ 是一个开集. 设 $G=f^{-1}(H)\neq\phi$，而 $a$ 是 $G=f^{-1}(H)$ 中任意一点，则 $f(a)\in H$. 由于 $H$ 是开集，所以存在 $\varepsilon>0$，使得

$$U(f(a),\varepsilon)\subset H.$$

又因为映射 $f$ 在点 $a\in G$ 连续，所以存在 $\delta>0$，使得只要 $x\in U(a,\delta)$，就有

$$f(x)\in U(f(a),\varepsilon)\subset H.$$

这就是说

$$f(U(a,\delta))\subset H,$$

因而

$$U(a,\delta)\subset f^{-1}(H)=G.$$

这样，我们证明了 $G=f^{-1}(H)$ 是开集.

*充分性.* 对任何 $a\in\Omega$，记 $H=U(f(a),\varepsilon)$，则 $H$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的开集，因而 $G=f^{-1}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 显然有 $a\in G=f^{-1}(H)$，所以又存在 $\delta>0$，使得

$$U(a,\delta)\subset G=f^{-1}(H).$$

由此得到

$$f(U(a,\delta))\subset H=U(f(a),\varepsilon).$$

这证明了 $f$ 在点 $a$ 的连续性. □

**注记** 对于一般距离空间之间的映射，也有与定理 3 类似的结果. 请读者仿照定理 3 予以陈述并写出证明.

# 第十二章　多元微分学

## §1　偏导数，全微分

在第二篇里，为了考察一元函数 $f$ 在点 $x_0$ 邻近的性态，我们首先定义了导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

然后导出微分公式

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

以下，借鉴对一元函数取得的经验，我们来考察多元函数的局部状况．为记号简单起见，先讨论二元函数，然后再推广到多元函数的一般情形．

### 1.a　方向导数，偏导数

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近有定义．为了考察这函数的局部变化状况，我们过点 $(x_0,y_0)$ 沿单位向量 $e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向引一有向直线

$$L:\quad x=x_0+t\cos\alpha,\qquad y=y_0+t\sin\alpha,$$

然后考察函数 $f$ 沿这有向直线的变化．请注意，这里的参数 $t$，正好表示沿有向直线 $L$ 从点 $(x_0,y_0)$ 到点 $(x,y)$ 的有号距离．如果存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t},$$

那么这极限表示了函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿有向直线 $L$ 的变化率，我们把它叫做函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿方向 $e$ 的方向导数，

记为

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0) \quad 或 \quad \partial_e f(x_0,y_0).$$

要了解函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿各方向的变化状况，应该考察它沿各方向的方向导数．但对于很重要的一类函数来说，沿各方向的方向导数都可由沿坐标轴方向的导数来决定．稍后，我们将对此作更进一步的讨论．这里先对沿坐标轴方向的导数作一些说明．

$OX$ 坐标轴方向的单位向量为 $e_1=(1,0)$．$OY$ 坐标轴方向的单位向量为 $e_2=(0,1)$．过 $(x_0,y_0)$ 点平行于 $OX$ 轴的有向直线可以表示为

$$L_1: \quad x=x_0+t, \qquad y=y_0.$$

按照定义，函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿方向 $e_1$ 的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0,y_0) &=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.\end{aligned}$$

如果在二元函数 $f(x,y)$ 中，让 $y$ 固定于 $y_0$，然后求一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x_0$点的导数，那么得到的就是函数 $f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$沿方向 $e_1$ 的方向导数．我们把这方向导数叫做函数 $f$ 在点$(x_0,y_0)$ 对 $x$ 的偏导数，并约定用以下记号之一来表示：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \quad f'_x(x_0,y_0) \quad 或者 \quad f_x(x_0,y_0).$$

类似地，如果在二元函数 $f(x,y)$ 中，先让 $x$ 固定于 $x_0$，然后求 $y$ 的一元函数 $f(x_0,y)$ 在 $y_0$ 点的导数，那么得到的就是函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿方向 $e_2$ 的方向导数．我们把这方向导数叫做函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对 $y$ 的偏导数，并约定用以下记号之一来表示：

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad f'_y(x_0,y_0) \quad 或者 \quad f_y(x_0,y_0).$$

通过以上讨论，我们看到：偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$，实际上都可以按照一元函数的求导法则来计算。

我们来说明方向导数与偏导数的几何意义。设 $D$ 是 $OXY$ 平面上的一个开集，二元函数 $f(x,y)$ 在 $D$ 上有定义，$(x_0,y_0)\in D$. 在 $OXYZ$ 直角坐标系中，函数 $f$ 表示为一块曲面

$$S:\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D.$$

设 $e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 是 $OXY$ 平面上的一个单位向量。在平面 $OXY$ 上过点 $(x_0,y_0)$ 作平行于方向 $e$ 的一条有向直线 $L$，然后过直线 $L$ 作正交于平面 $OXY$ 的一张平面 $P$. 容易看出：平面 $P$ 截曲面 $S$ 所得的截口曲线 $C$，可以表示为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\sin\alpha,\\ z=f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha).\end{cases}$$

考察截口曲线 $C$ 在 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=f(x_0,y_0)$ 处的切线 $T$. 我们看到：这切线对有向直线 $L$ 的斜率（即 $T$ 与 $L$ 正方向夹角的正切）就是函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿方向 $e$ 的方向导数。作为沿坐标轴方向的方向导数，偏导数的几何意义如下：曲面 $S$ 与平面 $y=y_0$ 相截，所得截口曲线的斜率就是函数 $f$ 对 $x$ 的偏导数；曲面 $S$ 与平面 $x=x_0$ 相截，所得截口曲线的斜率就是函数 $f$ 对 $y$ 的偏导数。

对于一元函数来说，在某点可导的函数必然在该点连续。单就这一方面，多元函数就已显得大不相同。即使函数 $f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$ 沿任何方向的方向导数都存在，也不能判定函数 $f$ 在这点连续。请看下面的反例。

**例1** 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

计算这函数在（0,0）点沿方向 $e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的差商，我们得到

$$\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}, & 若\ \alpha\neq 0,\\ 0, & 若\ \alpha=0.\end{cases}$$

容易看出，函数 $f$ 在点（0,0）沿任何方向 $e=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数都存在，

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, & 若\ \alpha\neq 0,\\ 0, & 若\ \alpha=0.\end{cases}$$

但由第十一章§4的例6可知，函数 $f(x,y)$ 在点（0，0）不连续。

### 1.b 全微分

**定义** 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近有定义。如果存在 $A,B\in\mathbb{R}$，使得对于极限过程 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$，以下关系成立：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

那么我们就说函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微，并把表示式

$$A\Delta x+B\Delta y$$

叫做函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的全微分，记为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

我们把自变量的增量（改变量）

$$\mathrm{d}x=\Delta x,\qquad \mathrm{d}y=\Delta y$$

定义为自变量的微分。

**注记** 为书写简单，人们也常常用

$$h:=\Delta x,\qquad k:=\Delta y$$

表示自变量的增量. 采用这样的记号，函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$的微分表示可以写成

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})$$
$$(\sqrt{h^2+k^2}\to 0).$$

按照小 $o$ 记号的含义，这式子意味着

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\&\quad=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2},\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon(h,k)$ 满足条件

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

与这样的微分表示等价的另一常用的方便的写法是

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\&\quad=Ah+Bk+\alpha h+\beta k,\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\alpha(h,k)$ 和 $\beta=\beta(h,k)$ 满足条件

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\alpha(h,k)=0,$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\beta(h,k)=0.$$

上面介绍了表示 $o(\sqrt{h^2+k^2})$ 的两种方式. 我们来说明这两种表示方式的等价性. 首先，显然有

$$\varepsilon(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}=\varepsilon(h,k)\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\alpha(h,k)h+\beta(h,k)k,$$

这里

$$\alpha(h,k)=\varepsilon(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

$$\beta(h,k)=\varepsilon(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

都是无穷小量与有界变量的乘积，因而

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\alpha(h,k)=0,$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\beta(h,k)=0.$$

其次，我们看到

$$\alpha(h,k)h+\beta(h,k)k$$

$$=\frac{\alpha(h,k)h+\beta(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\sqrt{h^2+k^2}.$$

如果记

$$\varepsilon(h,k)=\frac{\alpha(h,k)h+\beta(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

那么很容易验证

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

**定理1** 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微，那么它在这点连续.

**证明** 利用可微性的定义式

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}),$$

就可看出函数 $f$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的连续性. □

**定理2** 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微，那么它在这点沿任何方向 $e=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的方向导数都存在.

**证明** 在微分表示式

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=Ah+Bk+o(\sqrt{h^2+k^2})$$

之中，取 $h=t\cos\theta$，$k=t\sin\theta$，就可得到

$$\frac{f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$$=A\cos\theta+B\sin\theta+\frac{o(|t|)}{t}$$

$$=A\cos\theta+B\sin\theta+o(1).$$

我们看到：函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 沿任何方向 $e=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的方向导数都存在，并且

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0)=A\cos\theta+B\sin\theta. \qquad \Box$$

特别地，对于 $e_1=(1,0)$ 和 $e_2=(0,1)$ 的情形，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B.$$

**推论** 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微，其全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y,$$

那么这函数在点 $(x_0,y_0)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B,$$

并且这函数在点 $(x_0,y_0)$ 沿方向

$$e=(\cos\theta,\sin\theta)$$

的方向导数可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\theta.$$

### 1.c 连续可微函数

关于一元函数的求导，我们已经有了一整套办法．借助于对一元函数的经验，在考察多元函数的时候，对于偏导数“是否存在”和“如何求出”这些问题，是不难解决的．我们希望通过偏导数进一步了解多元函数的局部性态．以下的定理具有重要的意义．

**定理 3** 设函数 $f(x,y)$ 的各偏导数在点 $(x_0,y_0)$ 邻近存

在，并且这些偏导数，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

作为二元函数在点 $(x_0,y_0)$ 连续，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微（因而也在该点连续）.

**证明** 为书写简单起见，记

$$h=\Delta x=x-x_0, \qquad k=\Delta y=y-y_0.$$

我们来考察函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近的改变量：

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\
&\quad=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)\\
&\qquad+f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\
&\quad=f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)h+f'_y(x_0,y_0+\omega k)k,\\
&\qquad\qquad 0<\theta,\omega<1,
\end{aligned}$$

——这里用到了一元函数的有限增量公式. 因为函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续，所以应有

$$f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha,$$

$$f'_y(x_0,y_0+\omega k)=f'_y(x_0,y_0)+\beta,$$

这里的 $\alpha$ 和 $\beta$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时（即当 $(h,k)\to(0,0)$ 时）的极限为 0. 把这两式代入前面的函数增量表示式，就得到

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\
&\quad=f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k+\alpha h+\beta k.
\end{aligned}$$

又因为

$$\left|\frac{\alpha h+\beta k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|\to 0$$

（当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时），

所以

$$\alpha h+\beta k=o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

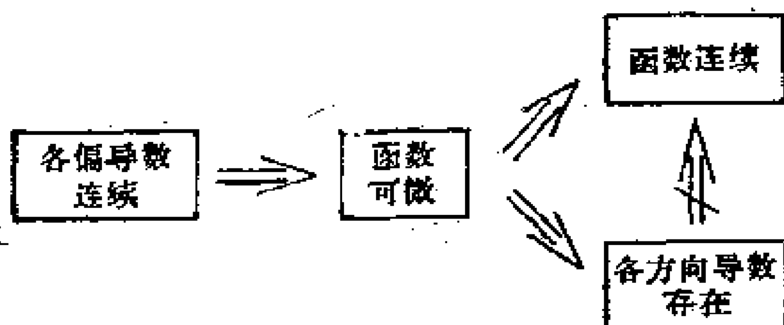
最后，我们得到

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

$$=f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k+o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

这证明了定理. □

综合以上的讨论，关于函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的分析性质，有以下关系：




**定义** 设$\Omega\subset\mathbf{R}^2$是一个区域. 如果函数 $f(x,y)$ 的各偏导数都在$\Omega$连续，那么我们就说函数 $f$ 在区域 $\Omega$ 连续可微.

由全体在$\Omega$连续的函数组成的集合，通常记为 $C^0(\Omega)$. 由全体在$\Omega$连续可微的函数组成的集合，通常记为 $C^1(\Omega)$.

## 1.d $m$元函数的一般情形

对于 $m$ 元函数的一般情形，我们陈述涉及偏导数和全微分的有关结果. 至于定理的证明，因为与二元函数的情形无本质的差别，这里就不再重复了.

**定义** 设 $m$ 元函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$ 在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 邻近有定义，$e=(e^1,\cdots,e^m)$ 是一个单位向量（即满足条件 $\|e\|=1$ 的向量）. 如果存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t},$$

那么我们就把这极限称为函数 $f$ 在点 $x_0$ 沿方向 $e$ 的方向导数，记为

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) \quad 或者 \quad \partial_e f(x_0).$$

特别地，对于

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0),$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_m=(0,0,0,\cdots,1),$$

我们把方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}$$

称为函数 $f$ 在点 $x_0$ 对变元 $x^i$ 的偏导数，并把它记为

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),\quad f'_{x^i}(x_0)\quad 或者\ f_{x^i}(x_0).$$

**定义** 设 $m$ 元函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$ 在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 邻近有定义. 如果存在 $A_i\in\mathbb{R}$，$i=1,\cdots,m$，使得对于充分小的

$$\Delta x=(\Delta x^1,\cdots,\Delta x^m),$$

有这样的关系：

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sum_{i=1}^m A_i\Delta x^i+o(\|\Delta x\|),$$

那么我们就说函数 $f$ 在点 $x_0$ 可微，并把表示式

$$\sum_{i=1}^m A_i\Delta x^i$$

叫做函数 $f$ 在点 $x_0$ 的全微分，记为

$$\mathrm{d}f(x_0)=\sum_{i=1}^m A_i\Delta x^i=\sum_{i=1}^m A_i\mathrm{d}x^i.$$

这里，我们约定

$$\mathrm{d}x^i=\Delta x^i,\quad i=1,\cdots,m.$$

**定理1** 如果 $m$ 元函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微，那么它在这点连续.

**定理2** 如果 $m$ 元函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微，那么它在这

点沿任何方向的方向导数都存在，它在这点对各变元的偏导数当然也都存在．

**推论** 如果$m$元函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微，它的全微分为

$$\mathrm{d}f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}A_i\mathrm{d}x^i,$$

那么

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)=A_i,\quad i=1,\cdots,m,$$

并且函数 $f$ 在这点沿方向$\boldsymbol{e}=(e^1,\cdots,e^m)$ 的方向导数可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0)=\sum_{i=1}^{m}A_ie^i.$$

**定理 3** 如果在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 邻近 $m$ 元函数$f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$ 的各偏导数都存在，并且

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m)$$

作为 $m$ 元函数在点 $x_0$ 连续 $(i=1,\cdots,m)$，那么函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微（因而也在这点连续）．

**定义** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 是一个区域．如果 $m$ 元函数 $f$ 的各偏导数都在$\Omega$连续，那么我们就说函数 $f$ 在$\Omega$连续可微．我们约定：

$C^0(\Omega)$ 表示在 $\Omega$ 连续的函数的集合；

$C^1(\Omega)$ 表示在 $\Omega$ 连续可微的函数的集合．

## §2 复合函数的偏导数与全微分

### 2.a 复合函数求导的链式法则

设 $m$ 个一元函数 $\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t)$ 都在 $t_0$ 处可导， $\varphi^1(t_0)$

$=x_0^1,\cdots,\varphi^m(t_0)=x_0^m$，而 $m$ 元函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$ 在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 可微．我们来考察复合函数

$$F(t)=f(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t)).$$

利用函数 $f$ 在点 $x_0$ 的微分式

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\,(x^i-x_0^i)+o(\|x\|),$$

可得

$$\begin{aligned}&F(t)-F(t_0)\\&=f(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t))-f(\varphi^1(t_0),\cdots,\varphi^m(t_0))\\&=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(\varphi^i(t)-\varphi^i(t_0))\\&\qquad+o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m(\varphi^i(t)-\varphi^i(t_0))^2}\right).\end{aligned}$$

再利用 $\varphi^i(t)$ 在 $t_0$ 处的微分式

$$\varphi^i(t)-\varphi^i(t_0)=\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)+o(t-t_0),$$

$$i=1,\cdots,m,$$

即得到

$$F(t)-F(t_0)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}\,(x_0)\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t_0)\,(t-t_0)+o(\|x\|).$$

这证明了

$$\begin{aligned}F'(t_0)&=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t_0)\\&=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x^i}\,(\varphi(t_0))\frac{\mathrm{d}\varphi^i}{\mathrm{d}t}(t_0),\end{aligned}$$

式中为书写省事采用了记号

$$\varphi(t)=(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t)).$$

以上得到的复合函数求导法则，可以用来求偏导数（对某个变元的偏导数，可以看成固定其他变元所得到的一元函数的导数）．设有 $m$ 个 $k$ 元函数 $\varphi^i(t)=\varphi^i(t^1,\cdots,t^k)$ $(i=1,\cdots,m)$，其中每个函数在点 $t_0=(t_0^1,\cdots,t_0^k)$对 $t^j$ 的偏导数都存在，$\varphi^1(t_0)=x_0^1,\cdots,\varphi^m(t_0)=x_0^m$，又设 $m$ 元函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$在点 $x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^m)$可微，则复合函数

$$F(t)=f(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^m(t))$$

在点 $t_0=(t_0^1,\cdots,t_0^k)$对 $t^j$ 的偏导数也存在，并且

$$\frac{\partial F}{\partial t^j}(t_0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}(t_0).$$

只要不致于引起混淆，通常就把上式写成

$$\frac{\partial F}{\partial t^j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j},\tag{2.1}$$

或者

$$\frac{\partial F}{\partial t^j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial t^j}.\tag{2.2}$$

我们把（2.1）式或者（2.2）式叫做复合函数求导的链式法则。

### 2.b 微分表示的不变性

我们知道，函数

$$f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$$

的全微分表示为

$$\mathrm{d}f(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

如果把函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$的各个变元 $x^i$，都换成依赖于变元 $t=(t^1,\cdots,t^k)$的可微函数

$$x^i=x^i(t)=x^i(t^1,\cdots,t^k),\qquad i=1,\cdots,m,$$

那么根据复合函数求导的链式法则应有

$$\frac{\partial}{\partial t^j}(f(x^1(t),\cdots,x^m(t)))=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t))\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t),$$
$$j=1,\cdots,k,$$

——上式中采用了简写记号

$$x(t)=(x^1(t),\cdots,x^m(t)).$$

由此得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(f(x^1(t),\cdots,x^m(t)))\\
&=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial t^j}(f(x^1(t),\cdots,x^m(t)))\mathrm{d}t^j\\
&=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t))\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\right)\mathrm{d}t^j\\
&=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t))\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\mathrm{d}t^j\right)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t))\mathrm{d}x^i(t).
\end{aligned}$$

这就是说，不论 $x=(x^1,\cdots,x^m)$是自变元，或者是依赖于另外的变元 $t=(t^1,\cdots,t^k)$ 的可微函数，函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^m)$的全微分表示都是

$$\mathrm{d}f(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\mathrm{d}x^i.$$

这一重要事实被称为（全）微分表示的不变性.

应用微分表示的不变性，我们来证明以下的关于全微分的运算法则.

**定理** 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是可微函数，$\lambda\in\mathbb{R}$，则有

(1) $d(u(x)+v(x))=du(x)+dv(x)$,

(2) $d(\lambda u(x))=\lambda du(x)$,

(3) $d(u(x)v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$,

(4) $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{(v(x))^2}$

$$(v(x)\neq 0).$$

**证明** 结论（1）和（2）的证明比较简单，留给读者作为练习．这里叙述结论（3）和（4）的证明．考察二元函数

$$f(u,v)=uv \text{ 和 } g(u,v)=\frac{u}{v}.$$

计算这两函数的偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial u}=v,\quad \frac{\partial f}{\partial v}=u$$

和

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{1}{v},\quad \frac{\partial g}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}\quad (v\neq 0).$$

这些偏导数都是连续的，所以函数 $f$ 和 $g$ 可微，并且

$$df(u,v)=vdu+udv,$$

$$dg(u,v)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad (v\neq 0).$$

利用微分表示的不变性，对于 $u=u(x)$，$v=v(x)$，仍有

$$d(u(x)v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$$

和

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{(v(x))^2}$$

$$(v(x)\neq 0).\qquad \square$$

**注记** 对于 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 是一元函数的情形，这些

运算法则已在第四章§2中证明过. 但这里给出的基于全微分表示的不变性的证明,既适用于一元函数的情形,也适用于 $u=u(x)=u(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $v=v(x)=v(x^1,\cdots,x^m)$ 是$m$元函数的情形.

## §3 高阶偏导数

### 3.a 高阶偏导数的定义

考察 $m$ 元函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ (涉及高阶偏导数时,用下标给自变元编号比较方便). 这函数的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ 仍是 $x$ 的函数. 我们又可以讨论函数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

是否可求偏导数的问题. 如果函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ 对变元 $x_j$ 可求偏导数,那么我们就把这样的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

称为函数 $f(x)$ 的二阶偏导数,并约定用以下记号之一来表示:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad f''_{x_i x_j}(x) \text{ 或者 } f_{x_i x_j}(x).$$

例如,对于二元 $f(x,y)$,可以有以下几种偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right).$$

我们约定用以下记号表示重复对同一变元求导：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y).$$

对于更一般的 $m$ 元函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$，也采用类似的记号：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}(x).$$

假设已经求得了 $m$ 元函数 $f(x)$ 的某个 $k$ 阶偏导数

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x).$$

把这 $k$ 阶偏导数看作 $x$ 的函数，又可以考虑求它的偏导数的问题．对 $k$ 阶偏导数再求一次偏导数就得到 $k+1$ 阶偏导数，通常采用以下形式的符号来表示：

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x)\right).$$

### 3.b 混合偏导数与求导顺序

对于二元函数 $f(x,y)$，两个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\quad 和\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

都被称为二阶混合偏导数．这两个求导顺序不同的二阶混合偏导

数并不一定相等．换句话说就是：混合偏导数可能与求导顺序有关．请看下面的例子．

**例1** 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & 如果\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & 如果\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

我们来比较 $f_{xy}(0,0)$ 与 $f_{yx}(0,0)$．为此，先要做一些计算．

对于 $y\neq0$ 的情形，要计算 $f_x(0,y)$，可以利用表示式

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

将这式对 $x$ 求导，然后再令 $x=0$，就得到

$$f_x(0,y)=-y\quad(y\neq0).$$

为了计算 $f_x(0,0)$，需要直接利用偏导数的定义：

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0.$$

这样，我们求得

$$f_x(0,y)=\begin{cases}-y, & 如果y\neq0, \\ 0, & 如果y=0;\end{cases}$$

用类似的办法可得

$$f_y(x,0)=\begin{cases}x, & 如果x\neq0, \\ 0, & 如果x=0.\end{cases}$$

在此基础上，可进一步求出：

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=1.$$

我们看到：

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0).$$

但只要两个二阶混合偏导数都连续，就不会出现上例中的情

形.

**定理1** 如果函数 $f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近存在并且在点 $(x_0,y_0)$ 连续，那么就有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

**证明** 考察一元函数

$$\varphi(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0)$$

和

$$\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y).$$

利用一元函数的有限增量公式可得

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)&=\varphi'(x_0+\theta_1 h)h\\&=[f_x(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-f_x(x_0+\theta_1 h,y_0)]h\\&=f_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)hk,\\\psi(y_0+k)-\psi(y_0)&=\psi'(y_0+\theta_3 k)k\\&=[f_y(x_0+h,y_0+\theta_3 k)-f_y(x_0,y_0+\theta_3 k)]k\\&=f_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 k)hk,\end{aligned}$$

这里

$$0<\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4<1.$$

容易验证

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\\&\quad=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)\\&\qquad-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)\\&\quad=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)\\&\qquad-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)\\&\quad=\psi(y_0+k)-\psi(y_0).\end{aligned}$$

由此得到

$$f_{xy}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 k)=f_{yx}(x_0+\theta_4 h,\ y_0+\theta_3 k).$$

在上式中，让 $(h,k)\to(0,0)$ 取极限，利用 $f_{xy}(x,y)$和$f_{yx}(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的连续性，即得到

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).\qquad\square$$

**定义** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$中的开集. 如果函数 $f$ 和它的直到 $r$ 阶的所有偏导数在$\Omega$上都是连续的，那么我们就说函数 $f$ 在开集$\Omega$上是 $r$ 阶连续可微的.

设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$中的开集. 我们约定以

$$C^r(\Omega)$$

表示由所有的在$\Omega$上连续可微的函数组成的集合.

**定理 2** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$中的开集，$f\in C^r(\Omega)$，则函数 $f$ 的$k$阶($2\leqslant k\leqslant r$)混合偏导数与求导顺序无关.

**证明** 从定理1容易得到

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_{p+1}}\partial x_{i_p}\cdots\partial x_{i_1}}$$

$$=\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_p}\partial x_{i_{p+1}}\cdots\partial x_{i_1}}.$$

通过逐次交换相邻的两个求导运算，可以证明：只是求导顺序不同的任何两个 $k$ 阶混合偏导数都相等

$$\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_q}\cdots\partial x_{i_p}\cdots\partial x_{i_1}}$$

$$=\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_p}\cdots\partial x_{i_q}\cdots\partial x_{i_1}}. \qquad \square$$

### 3.e 计算高阶偏导数的例题

根据定义，高阶偏导数可以用逐次求一阶偏导数的办法来计算. 如果是复合函数的高阶偏导数，那么每一次求导时又可利用链式法则. 这样看来，求高阶偏导数的计算，原则上没有什么困难. 只是计算时须细心检查，不要漏掉了应有的项（特别是某些"交叉项"）.

**例 2** 试求复合函数

$$u=f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$$

的二阶偏导数. 这里假设 $x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)$ 和 $f(x,y)$ 都是二阶

连续可微函数.

**解** 利用链式法则逐次计算可得:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}&=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

类似地可以求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta}.\end{aligned}$$

**例 3** 二维拉普拉斯 (Laplace) 算子 $\Delta$ 定义如下：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

试对 $u=\ln\frac{1}{r}$ $(r>0)$ 计算 $\Delta u$，这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

**解** 我们有

$$u=\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

因而

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

**例 4** 三维拉普拉斯算子 $\Delta$ 定义如下：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

试对 $u=\frac{1}{r}$ $(r\neq 0)$ 计算 $\Delta u$，这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

**解** 我们有

$$u=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x$$

$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$=\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-z^2-x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^5},$$

因而

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

**例5** 设 $f(x,y)$ 是 $n$ 阶连续可微函数，并设

$$\varphi(t)=f(x+th,y+tk).$$

试计算函数 $\varphi(t)$ 的 $n$ 阶导数 $\varphi^{(n)}(t)$.

**解** 设 $g(x,y)$ 是任意连续可微函数. 我们先对形状如

$$\psi(t)=g(x+th,y+tk)$$

的函数，证明一个求导公式. 运用复合函数求导的链式法则可得

$$\psi'(t)=h\frac{\partial}{\partial x}g(x+th,y+tk)$$

$$+k\frac{\partial}{\partial y}g(x+th,y+tk)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x+th,y+tk).$$

我们看到：以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 作用于 $\psi(t)$，相当于以微分算子

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

作用于

$$g(x+th,y+tk).$$

对于 $n$ 阶连续可微函数 $f(x,y)$，我们来计算复合函数

$$\varphi(t)=f(x+th,y+tk)$$

的各阶导数. 利用上面讨论的结果，容易得到

$$\varphi'(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+th,y+tk),$$

$$\varphi''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x+th,y+tk),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+th,y+tk).$$

对于连续可微足够多次的函数，求偏导数的运算$\frac{\partial}{\partial x}$与$\frac{\partial}{\partial y}$可以交换次序．涉及$\frac{\partial}{\partial x}$与$\frac{\partial}{\partial y}$这些算子的相加、相乘以及乘以实数的运算，遵循多项式代数中关于文字符号的运算法则．因此，算子二项式

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

可以按照代数中的二项式定理展开：

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}h^p k^{n-p}\frac{\partial^n}{\partial x^p\partial y^{n-p}},$$

这里

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

是二项式系数．我们所得的结果可以写成

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+th,y+tk)$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}h^p k^{n-p}\frac{\partial^n}{\partial x^p\partial y^{n-p}}f(x+th,y+tk).$$

**例 6**　对于更一般的 $m$ 元函数，考虑与上例类似的问题：设 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是$n$阶连续可微的函数，记

$$\varphi(t)=f(x+th)$$
$$=f(x_1+th_1,x_2+th_2,\cdots,x_m+th_m).$$

试计算 $\varphi^{(n)}(t)$．

**解** 设 $g(x)=g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是连续可微函数，记

$$\begin{aligned}\psi(t)&=g(x+th)\\&=g(x_1+th_1,x_2+th_2,\cdots,x_m+th_m).\end{aligned}$$

与上例中类似，我们注意到：以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 作用于 $\psi(t)$，相当于以算子

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$$

作用于

$$g(x_1+th_1,x_2+th_2,\cdots,x_m+th_m).$$

运用这一观察结果，我们求得

$$\varphi'(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)f(x+th),$$

$$\varphi''(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(x+th),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x+th).$$

对于连续可微足够多次的函数，求偏导数的运算 $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}$ 可以互相交换顺序. 涉及 $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}$ 这些算子的相加，相乘以及乘以实数的运算，遵循多项式代数中有关文字符号的运算法则. 因此，对

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n$$

可以按照代数中的“多项式定理”(参看本节后的附录)予以展开：

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n$$

$$=\sum_{p_1+\cdots+p_m=n}\frac{n!}{p_1!\cdots p_m!}h_1^{p_1}\cdots h_m^{p_m}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_m^{p_m}}.$$

这里

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}\quad (p_1+p_2+\cdots+p_m=n)$$

是多项式系数.

### 附录　多项式定理

考察 $m$ 个文字 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的代数式

$$(u_1+u_2+\cdots+u_m)^n.$$

以下展开式是二项式定理的推广，人们把它叫做*多项式定理*:

$$(u_1+\cdots+u_m)^n=\sum_{p_1+\cdots+p_m=n}\frac{n!}{p_1!\cdots p_m!}u_1^{p_1}\cdots u_m^{p_m}.$$

我们对加项的个数作归纳法来证明多项式定理. 对于 $m=2$, 这就是二项式定理. 假设关于 $m-1$ 个加项的多项式定理成立. 我们来考察 $m$ 个加项的情形. 利用二项式定理可得

$$\begin{aligned}&(u_1+\cdots+u_{m-1}+u_m)^n\\&\quad=[(u_1+\cdots+u_{m-1})+u_m]^n\\&\quad=\sum_{p_m=0}^{n}\frac{n!}{(n-p_m)!p_m!}(u_1+\cdots+u_{m-1})^{n-p_m}u_m^{p_m}.\end{aligned}$$

再利用归纳法假设展开 $(u_1+\cdots+u_{m-1})^{n-p_m}$ 代入上式，就可以证明 $m$ 个加项的多项式定理.

## §4　有限增量公式与泰勒公式

为了以下叙述方便，先引入一些记号. 设 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_m)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两点，我们约定记

$$(a,b)=\{a+t(b-a)\mid t\in(0,1)\},$$

$$[a,b]=\{a+t(b-a)\mid t\in[0,1]\},$$

并且约定分别把 $(a,b)$ 和 $[a,b]$ 叫做联结 $a,b$ 这两点的开线段和

闭线段。

### 4.a 有限增量公式

**定理1** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集，$a=(a_1,\cdots,a_m)$ 和 $a+h=(a_1+h_1,\cdots,a_m+h_m)$ 是 $\overline{D}$ 中的两点，而联结这两点的开线段包含在 $D$ 中：

$$(a,a+h)\subset D.$$

如果函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$在 $\overline{D}$ 连续，在 $D$ 可微，那么就有

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)h_i,$$

这里 $\theta$ 是严格介于 0 与 1 之间的一个实数.

**证明** 考察函数

$$\varphi(t)=f(a+th).$$

利用复合函数求导的链式法则可得

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i.$$

我们看到：函数 $\varphi(t)$ 在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可微．根据一元函数的有限增量定理，应有

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(\theta)(1-0),$$

由此得到

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta h)h_i,$$

这里 $\theta\in(0,1)$. □

**定理2** 设 $a$ 和 $a+h$是$\mathbb{R}^m$ 中的两个点，$D$是包含$[a,a+h]$的一个开集．如果函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$在 $D$ 连续可微，那么就有

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\mathrm{d}t\right)h_i.$$

**证明** 考察函数

$$\varphi(t)=f(a+th).$$

我们有

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i.$$

因为 $\varphi'(t)$ 在[0,1]连续，所以对它可以应用牛顿-莱布尼兹公式

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\int_0^1\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

由此得到

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\mathrm{d}t\right)h_i. \qquad \square$$

作为有限增量公式的应用，我们来考察多元函数为常数的条件.

**定理 3** 设函数 $f$ 在开区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 可微. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)=0, \qquad \forall x\in\Omega,$$

那么 $f$ 在 $\Omega$ 上恒等于一个常数.

**证明** 先考虑这样的情形：$\Omega$ 是一个开球 $U(c,\eta)$. 对这情形，利用有限增量公式

$$f(x)=f(c)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c+\theta(x-c))(x_i-c_i),$$

就得到

$$f(x)=f(c), \qquad \forall x\in U(c,\eta).$$

再来考虑 $\Omega$ 是一般开区域的情形. 我们来证明：对任意 $a$，$b\in\Omega$，都有

$$f(b)=f(a).$$

为此，用一条连续曲线 $\gamma$ 联结 $a,b$ 两点：

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\Omega,$$
$$\gamma(0)=a, \qquad \gamma(1)=b,$$

并记

$$\sigma=\sup\{t|t\in[0,1],\ f(\gamma(t))=f(a)\}.$$

由于函数 $f\circ\gamma$ 的连续性，应有

$$f(\gamma(\sigma))=f(a).$$

因为$\Omega$是开集，$\gamma(\sigma)\in\Omega$，所以存在$\eta>0$，使得

$$U=U(\gamma(\sigma),\ \eta)\subset\Omega.$$

于是又有

$$f(x)=f(\gamma(\sigma))=f(a),\qquad \forall x\in U.$$

假如$\sigma\neq1$，那么存在充分小的$\tau>0$，使得

$$\sigma+\tau\in[0,1],\qquad \gamma(\sigma+\tau)\in U.$$

于是又应有

$$f(\gamma(\sigma+\tau))=f(a).$$

但这与$\sigma$的定义相矛盾（因为$\sigma+\tau>\sigma$也使得 $f(\gamma(\sigma+\tau))=f(a)$）. 这矛盾说明：只能有$\sigma=1$. 我们证明了：

$$f(b)=f(\gamma(1))=f(a).\qquad \square$$

**推论** 设$\Omega$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开区域. 如果函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $\bar{\Omega}$ 连续，在$\Omega$可微，并且满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=0,\qquad \forall x\in\Omega,$$

那么 $f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上恒等于一个常数.

### 4.b 泰勒公式

**定理 4** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集. 如果

$$f\in C^{k+1}(D),\quad [a,a+h]\subset D,$$

那么

$$f(a+h)=T_k+R_{k+1},$$

这里的 $T_k$ 是多元泰勒多项式

$$T_k=\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p f(a),$$

而余项 $R_{k+1}$ 可以表示为拉格朗日形式或者积分形式. 余项 $R_{k+1}$

的拉格朗日形式为

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1}f(a+\theta h)$$

$$(0<\theta<1);$$

余项 $R_{n+1}$ 的积分形式为

$$\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1}f(a+th)\mathrm{d}t.$$

**证明** 对于一元函数

$$\varphi(t)=f(a+th)$$

我们有泰勒公式

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+R_{n+1},$$

这里的余项 $R_{n+1}$ 可以表示为

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),\quad 0<\theta<1,$$

或者

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

在上一节的例 6 中，我们求得

$$\varphi^{(k)}(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k f(a+th).$$

利用这计算结果，就得到多元函数的泰勒公式

$$f(a+h)=T_n+R_{n+1},$$

这里

$$T_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}\left(\sum_{i=1}^{m}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f(a),$$

而余项 $R_{n+1}$ 可以表示为

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=1}^{m}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{n+1}f(a+\theta h)\quad(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\left(\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{n+1} f(a+th)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

**定理 5** 设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近 $n$ 阶连续可微，则有

$$f(a+h)=\sum_{p=0}^n\frac{1}{p!}\left(\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f(a)+o(\|h\|^n).$$

这样的表示式被称为带小 $o$ 余项（或皮亚诺型余项）的泰勒公式.

**证明** 根据引理 4，有这样的展式：

$$f(a+h)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}\left(\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f(a)+R_n,$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(a+\theta h), \qquad (0<\theta<1).$$

由于各 $n$ 阶偏导数的连续性，对于

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=n, \qquad \alpha_1,\cdots,\alpha_m \text{ 为非负整数}$$

应有

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}f(a+\theta h)=\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}f(a)+o(1).$$

又显然有

$$h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}=O(\|h\|^{\alpha_1})\cdots O(\|h\|^{\alpha_m})=O(\|h\|^n).$$

所以

$$h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}f(a+\theta h)$$

$$=h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}f(a)+o(1)\right)$$

$$=h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}f(a)+o(\|h\|^n).$$

由此得到

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(a)+o(\|h\|^n). \qquad \square$$

采用重指标记号可以把多元函数的泰勒公式写成更紧凑的形式．下面，我们来介绍这种表示法．

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是非负整数，我们把

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

叫做以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为分量的一个重指标，并约定

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!.$$

对于 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_m)\in\mathbb{R}^m$，我们约定

$$h^\alpha=h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\cdots h_m^{\alpha_m}.$$

我们还约定．

$$\partial^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}.$$

采用这些记号，我们写出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^p\\&=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=p}\frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}\frac{\partial^p}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}\\&=\sum_{|\alpha|=p}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha.\end{aligned}$$

于是，我们可以把 $m$ 元函数的泰勒公式写成更紧凑的形式

$$\begin{aligned}f(a+h)&=\sum_{p=0}^{n}\sum_{|\alpha|=p}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)h^\alpha+R_{n+1}\\&=\sum_{|\alpha|=0}^{n}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)h^\alpha+R_{n+1}\\&=\sum_{|\alpha|\leq n}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(a)h^\alpha+R_{n+1}.\end{aligned}$$

余项 $R_{n+1}$ 可以表示为

$$R_{n+1}=\sum_{|\beta|=n+1}\frac{1}{\beta!}\partial^\beta f(a+\theta h)h^\beta$$

$$(0<\theta<1),$$

或者

$$R_{n+1}=\sum_{|\beta|=n+1}\frac{n+1}{\beta!}\int_0^1(1-t)^n\partial^\beta f(a+th)\mathrm{d}t\ h^\beta.$$

## §5 隐函数定理

### 5.a 单个方程的情形

根据定义，所谓 $f: D\to E$ 是一个函数，就是说 $f$ 是这样一种对应法则：按照这法则，对 $D$ 中的每一个 $x$，有 $E$ 中唯一的一个 $y$ 与之对应．我们约定：把与 $x\in D$ 对应的唯一的 $y\in E$，记为 $f(x)$．但要强调指出，函数关系并不一定用明显的（代数的或分析的）算式来表示．在某些实际问题中，两个量之间的关系是通过一定的方程来表示的．我们应该研究这种由方程定义的函数关系（即所谓的“隐函数”关系）．

**定义** 设 $D\subset\mathbf{R}$，$E\subset\mathbf{R}$．并设二元函数 $F(x,y)$ 的定义域包含了 $D\times E$．如果对每一个 $x\in D$，恰好存在唯一的一个 $y\in E$，使得 $F(x,y)=0$，那么我们就说：由方程

$$F(x,y)=0$$

确定了一个从$D$到$E$的隐函数；或者说：由条件

$$F(x,y)=0,\quad x\in D,\ y\in E,$$

确定了一个（从 $D$ 到 $E$ 的）隐函数．

如果把上面定义中由条件

$$x\in D,\ y\in E,\quad F(x,y)=0$$

所确定的从 $D$ 到 $E$ 的函数记为 $f$，那么对任意的 $x\in D$，我们有

$$f(x)\in E,\qquad F(x,f(x))=0.$$

函数 $f$ 的对应法则就是：把每一个 $x\in D$ 对应于满足方程 $F(x,y)=0$ 的唯一的 $y\in E$.

**例1** 由条件

$$x^2+y^2=1,\quad x\in[-1,1],\quad y\in[0,+\infty),$$

确定了一个从$[-1,1]$到$[0,+\infty)$的隐函数．这隐函数可以用显式表示为

$$y=\sqrt{1-x^2},\qquad x\in[-1,1].$$

由条件

$$x^2+y^2=1,\quad x\in[-1,1],\ y\in(-\infty,0],$$

确定了另一个隐函数，这隐函数可以用显式表示为

$$y=-\sqrt{1-x^2},\qquad x\in[-1,1].$$

从上面的例子可以看出，要由方程

$$F(x,y)=0$$

确定一个隐函数，仅仅指出 $x$ 的变化范围 $D$ 是不够的，还需要指出 $y$ 的变化范围 $E$.

如果方程 $F(x,y)=0$ 完全没有解（例如 $F(x,y)=x^2+y^2+1$ 的情形，，那么当然谈不上定义隐函数的问题．假设 $F(x,y)=0$ 有解 $(x_0,y_0)$，函数 $F$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近是连续可微的．我们在点 $(x_0,y_0)$ 邻近展开函数 $F$ 得到

$$F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}).$$

代替原来的方程

$$F(x,y)=0,$$

我们来考察近似方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

要使这近似方程对每一给定的 $x$ 都确定唯一的 $y$，必须而且只须

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

从观察近似方程得到启发，人们探索能保证原来的方程 $F(x,y)=0$ 在 $(x_0, y_0)$ 邻近确定隐函数的条件．所得的结果可以陈述为以下的隐函数定理．

**定理1** 设函数 $F(x,y)$ 在包含 $(x_0, y_0)$ 的一个开集 $\Omega$ 上连续可微，并且满足条件

$$F(x_0, y_0)=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

则存在以 $(x_0, y_0)$ 为中心的开方块

$$D \times E \subset \Omega$$

$$(D=(x_0-\delta, x_0+\delta), E=(y_0-\eta, y_0+\eta)),$$

使得：

(1) 对任何一个 $x \in D$，恰好存在唯一的一个 $y \in E$，满足方程

$$F(x, y)=0.$$

这就是说，方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个从 $D$ 到 $E$ 的函数 $y=f(x)$．

(2) 这函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 连续可微，它的导数可按下式计算

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

**证明** 不妨设

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)>0.$$

于是，存在充分小的 $\gamma>0$ 和 $\eta>0$，使得

$$[x_0-\gamma, x_0+\gamma] \times [y_0-\eta, y_0+\eta] \subset \Omega,$$

并且使得

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)>0,$$

$$\forall (x, y) \in [x_0 - \gamma, x_0 + \gamma] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta].$$

考察$y$的函数 $\psi(y) = F(x_0, y)$. 因为

$$\psi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0, \qquad \forall y \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta],$$

所以

$$\psi(y_0 - \eta) < \psi(y_0) < \psi(y_0 + \eta),$$

即

$$F(x_0, y_0 - \eta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \eta),$$

$$(5.1) \qquad F(x_0, y_0 - \eta) < 0 < F(x_0, y_0 + \eta).$$

再来考察 $x$ 的函数 $F(x, y_0 - \eta)$ 和 $F(x, y_0 + \eta)$. 由于这两函数是连续的，从(5.1)式可知：存在 $\delta \in (0, \gamma)$，使得

$$F(x, y_0 - \eta) < 0 < F(x, y_0 + \eta),$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

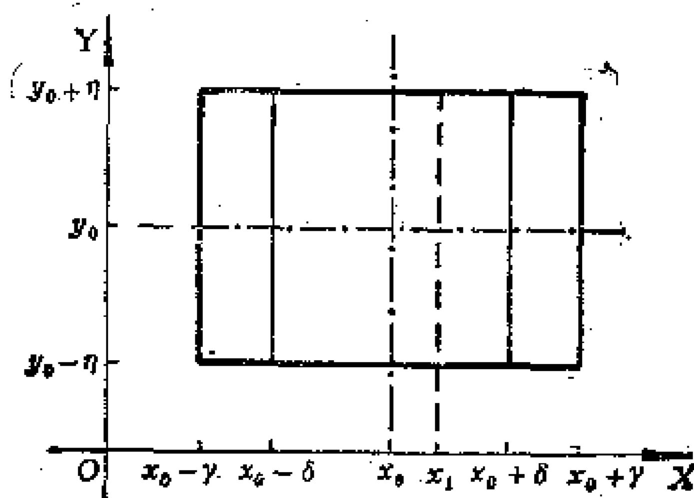



图 12-1

我们来验证：

$$D = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ 和 } E = (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$$

满足定理的要求（图12-1）.

(1) 对任何一个 $x_1 \in D$，考察 $y$ 的函数 $F(x_1, y)$. 因为这函数是连续的，并且

$$F(x_1,y_0-\eta)<0<F(x_1,y_0+\eta),$$

所以存在

$$y_1\in(y_0-\eta,y_0+\eta)=E,$$

使得

$$F(x_1,y_1)=0. \tag{5.2}$$

又因为

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y)>0, \qquad \forall y\in[y_0-\eta,y_0+\eta],$$

函数 $F(x_1,y)$ 是严格单调上升的，所以仅有唯一的 $y_1\in E$ 能使(5.2)式成立.

我们看到：方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个从 $D$ 到 $E$ 的函数 $y=f(x)$.

为了叙述方便，我们把结论(2)分成两部分来验证：1° 函数 $y=f(x)$ 是连续的；2° 函数 $y=f(x)$ 有连续导数.

1° 我们来考察函数 $y=f(x)$ 在任意一点 $x_1\in D$ 的连续性. 记 $y_1=f(x_1)$，因为

$$y_1\in(y_0-\eta,y_0+\eta)=E,$$

只要 $\varepsilon>0$足够小，就有

$$(y_1-\varepsilon,y_1+\varepsilon)\subset(y_0-\eta,y_0+\eta).$$

与前面的讨论完全类似，易知

$$F(x_1,y_1-\varepsilon)<0<F(x_1,y_1+\varepsilon).$$

于是，又存在$\sigma>0$，使得

$$F(x,y_1-\varepsilon)<0<F(x,y_1+\varepsilon),$$
$$\forall x\in(x_1-\sigma,x_1+\sigma).$$

由此可知，对任何 $x\in(x_1-\sigma,x_1+\sigma)$，在 $y_1-\varepsilon$ 与 $y_1+\varepsilon$ 之间，存在唯一的一个 $y$，使得 $F(x,y)=0$. 按照函数 $f$ 的定义，这意味着：

$$f(x)\in(y_1-\varepsilon,y_1+\varepsilon), \qquad \forall x\in(x_1-\sigma,x_1+\sigma).$$

我们证明了函数 $f$ 在任意点 $x_1\in D$ 的连续性.

2° 为了求函数 $f(x)$ 的导数，需要写出其差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

的表示式．为此，我们记

$$y=f(x), \qquad k=f(x+h)-f(x).$$

利用二元函数的有限增量公式可得

$$\begin{aligned}0&=F(x+h,y+k)-F(x,y)\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h,y+\theta k)h+\frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h,y+\theta k)k.\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{k}{h}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h,y+\theta k)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h,y+\theta k)},$$

即

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x+\theta h,y+\theta k)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x+\theta h,y+\theta k)}.$$

在上式中让 $h\to 0$ 取极限，注意到这时有

$$k=f(x+h)-f(x)\to 0,$$

并利用 $F$ 的偏导数的连续性，我们求得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}.$$

这证明了隐函数 $f(x)$ 的可微性．

函数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 和 $f(x)$ 都是连续的．从关系式

$$f'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

就可看出 $f'(x)$ 的连续性. □

**推论** 在定理 1 中，如果函数 $F(x,y)$ 在开集$\Omega$上是 $r$ 阶连续可微的，那么由

$$F(x,y)=0,\qquad x\in D,\ y\in E,$$

所确定的函数 $y=f(x)$在开区间 $D$ 上也是 $r$ 阶连续可微的.

**证明** 在定理 1 中已经证明了 $r=1$ 的情形. 假设对于 $r=s$ 的情形推论成立. 我们来考察 $r=s+1$ 的情形. 这时，复合函数

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x)) \text{ 和 } \frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))$$

显然都是 $s$ 阶连续可微的，所以

$$f'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

也是 $s$ 阶连续可微的. 这证明了函数 $f(x)$ 在开区间 $D$ 上是 $s+1$ 阶连续可微的. □

定理 1 及其推论可以平行地推广于更多个变元的情形.

**定理 2** 设 $m+1$ 元函数 $F(x^1,\cdots,x^m,y)$ 在包含 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0)$ 的一个开集$\Omega$上连续可微，并且满足条件

$$F(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0)\neq 0,$$

则存在以 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0)$ 为中心的一个开方块

$$D\times E\subset\Omega$$

$$(D=(x_0^1-\delta,x_0^1+\delta)\times\cdots\times(x_0^m-\delta,x_0^m+\delta),$$
$$E=(y_0-\eta,y_0+\eta)),$$

使得

(1) 对任何一点 $(x^1,\cdots,x^m)\in D$，恰好存在唯一的一个 $y\in E$，满足方程

$$F(x^1,\cdots,x^m,y)=0.$$

这就是说：方程$F(x^1,\cdots,x^m,y)=0$ 确定了一个从 $D$ 到 $E$ 的函数

$$y=f(x^1,\cdots,x^m).$$

(2) 这函数 $y=f(x^1,\cdots,x^m)$ 在 $D$ 连续可微，它的各偏导数可按下式计算

$$\frac{\partial y}{\partial x^i}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^m,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x^1,\cdots,x^m,y)}.$$

**推论** 在定理 2 中，如果函数 $F$ 在开集$\Omega$ 上 $r$ 阶连续可微，那么由

$$F(x^1,\cdots,x^m,y)=0,\qquad (x^1,\cdots,x^m)\in D,\quad y\in E,$$

所确定的函数

$$y=f(x^1,\cdots,x^m)$$

在开方块 $D$ 上也是 $r$ 阶连续可微的.

**注记** 在定理 1 的条件下，为了求隐函数 $y=f(x)$ 的导数，我们可以利用恒等式

$$F(x,f(x))=0.$$

将这式两边对 $x$ 求导，就得到

$$(5.3)\qquad F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0.$$

定理 1 的条件保证了在 $(x_0,y_0)$邻近有

$$F_y(x,y)\neq 0.$$

因而从 (5.3) 式可以唯一地解出

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.$$

这就是求隐函数导数的实际做法. 定理 1 为隐函数的微分法提供了理论依据.如果 $F$ 在$\Omega$是 $r$ 阶连续可微的,那么 $f$ 也是 $r$ 阶连续可微的. 为了求得 $f$ 的 $k$ 阶导数 ($1\leqslant k\leqslant r$)，我们仍可利用恒等式

$$F(x,f(x))=0.$$

将这式两边对 $x$ 求导 1 次，2 次，…，$r$ 次，从所得的各式中就可以依次解出 $f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(r)}(x)$.

对定理 2 也可作类似的注记。

**例 2** 我们知道，理想气体的状态方程为

$$pV=RT.$$

真实的气体或多或少地偏离这一理想的情形，它们的状态可以用更复杂的范德瓦尔斯(Van der Waals)方程近似地加以描述：

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT,$$

这里的 $a,b$ 和 $R$ 都是常数．如果需要求出 $V$ 对 $p$ 的偏导数，可以利用上面的方程．将这方程两边对 $p$ 求偏导数，我们得到

$$\left(1-\frac{2a}{V^3}\frac{\partial V}{\partial p}\right)(V-b)+\left(p+\frac{a}{V^2}\right)\frac{\partial V}{\partial p}=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial p}=\frac{V-b}{\frac{2a}{V^3}(V-b)-\left(p+\frac{a}{V^2}\right)}.$$

### 5.b 方程组的情形

本段讨论由方程组确定的隐函数．先从比较简单的情形开始．我们来考察方程组

$$(5.4)\qquad F^i(x,y^1,\cdots,y^p)=0,\quad i=1,\cdots,p.$$

这里设各函数 $F^i$ 都在包含$(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)$的一个开集$\Omega$上连续可微，并设

$$F^i(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)=0,\quad i=1,\cdots,p.$$

我们提出的第一个问题是：能否确定以

$$(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)$$

为中心的开方块

$$D\times(E^1\times\cdots\times E^p)\subset\Omega,$$

使得对任何一个 $x\in D$，恰好存在唯一的一组

$$(y^1,\cdots,y^p)\in E^1\times\cdots\times E^p,$$

它们满足方程组

$$F^i(x,y^1,\cdots,y^p)=0,\quad i=1,\cdots,p.$$

如果对这问题的回答是肯定的，那么方程组（5.4）就确定了从 $D$ 分别到 $E^1,\cdots,E^p$ 的一组函数

$$y^i=f^i(x),\quad i=1,\cdots,p.$$

于是，我们又可提出第二个问题：能否从函数 $F^1,\cdots,F^p$ 的连续可微性质推知函数 $f^1,\cdots,f^p$ 的连续可微性质？

假如对上面两个问题的回答都是肯定的，那么我们就有恒等式

$$F^i(x,f^1(x),\cdots,f^p(x))=0,\quad i=1,\cdots,p,$$

并且这里的 $f^1(x),\cdots,f^p(x)$ 都是连续可微函数．将这组恒等式对 $x$ 求导，就得到

$$\frac{\partial F^i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}f^j(x)}{\mathrm{d}x}=0,\quad i=1,\cdots,p. \tag{5.5}$$

我们把由偏导数组成的方阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F^p}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^p}{\partial y^p}\end{pmatrix}$$

称为函数 $F^1,\cdots,F^p$ 对变元 $y^1,\cdots,y^p$ 的雅可比(Jacobi)阵，并把这方阵的行列式称为函数 $F^1,\cdots,F^p$ 对变元 $y^1,\cdots,y^p$ 的雅可比行列式，记为

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F^p}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^p}{\partial y^p}\end{vmatrix}.$$

如果

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)\neq 0,$$

那么在点$(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)$邻近仍有

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}(x,y^1,\cdots,y^p)\neq 0.$$

这就能保证从（5.5）中唯一地解出

$$\frac{\mathrm{d}f^1(x)}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}f^p(x)}{\mathrm{d}x}.$$

从以上的分析得到启发，我们可以把定理1推广为以下形式：

**定理3** 设函数 $F^1(x,y^1,\cdots,y^p),\cdots,F^p(x,y^1,\cdots,y^p)$在包含点$(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)$的一个开集$\Omega$上连续可微，并且满足条件

$$F^i(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)=0,\quad i=1,\cdots,p,$$

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)\neq 0,$$

则存在以$(x_0,y_0^1,\cdots,y_0^p)$为中心的开方块

$$D\times(E^1\times\cdots\times E^p)\subset\Omega$$

$$(D=(x_0-\delta,x_0+\delta),\ E^1=(y_0^1-\eta,y_0^1+\eta),$$

$$\cdots,E^p=(y_0^p-\eta,y_0^p+\eta)),$$

使得

(1) 对任何一个 $x\in D$，恰存在唯一的一组

$$(y^1,\cdots,y^p)\in E^1\times\cdots\times E^p,$$

它们满足方程组

$$F^i(x,y^1,\cdots,y^p)=0,\quad i=1,\cdots,p.$$

这就是说，上面的方程组确定了从 $D$ 分别到 $E^1,\cdots,E^p$ 的一组函数

$$y^1=f^1(x),\cdots,y^p=f^p(x).$$

(2) 这组函数中的每一个都在 $D$ 连续可微，它们的导数

可以通过以下的方程组求得：

$$\frac{\partial F^i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}f^j(x)}{\mathrm{d}x}=0, \qquad i=1,\cdots,p,$$

这里的$\frac{\partial F^i}{\partial x}$和$\frac{\partial F^i}{\partial y^j}$都在 $(x,f^1(x),\cdots,f^p(x))$处计值．

我们再陈述一个更一般的结果．

**定理 4** 设函数 $F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^p),\cdots,F^p(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^p)$在包含点$(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^p)$的一个开集$\Omega$上连续可微，并且满足条件．

$$F^i(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^p)=0, \qquad i=1,\cdots,p,$$

$$\frac{\partial(F^1,\cdots,F^p)}{\partial(y^1,\cdots,y^p)}(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^p)\neq 0,$$

则存在以$(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^p)$为中心的开方块

$$D^1\times\cdots\times D^m\times E^1\times\cdots\times E^p\subset\Omega$$

$$(D^1=(x_0^1-\delta,x_0^1+\delta),\cdots,D^m=(x_0^m-\delta,x_0^m+\delta),$$
$$E^1=(y_0^1-\eta,y_0^1+\eta),\cdots,E^p=(y_0^p-\eta,y_0^p+\eta)),$$

使得

(1) 对每一个

$$x=(x^1,\cdots,x^m)\in D=D^1\times\cdots\times D^m,$$

恰存在唯一的一组

$$(y^1,\cdots,y^p)\in E^1\times\cdots\times E^p,$$

满足

$$F^i(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^p)=0, \quad i=1,\cdots,p. \tag{5.6}$$

这就是说，由方程组（5.6）确定了从 $D=D^1\times\cdots\times D^m$ 分别到 $E^1,\cdots,E^p$ 的一组函数

$$y^1=f^1(x)=f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,y^p=f^p(x)=f^p(x^1,\cdots,x^m).$$

(2) 这组函数中的每一个都在 $D$ 连续可微，它们的各偏导数可以通过以下的方程组求得：

$$(5.7)\qquad \frac{\partial F^i}{\partial x^k}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^k}=0,\qquad i=1,\cdots,p,$$

这里的$\frac{\partial F^i}{\partial x^k}$和$\frac{\partial F^i}{\partial y^j}$都在

$$(x^1,\cdots,x^m,f^1(x),\cdots,f^p(x))$$

处计值.

定理3可以看作定理4的一种特殊情形（$m=1$的情形）. 要证明定理4，自然会想到的办法是：对方程的个数 $p$ 作归纳. 虽然这定理的归纳证明的基本思路十分简单，但要具体详细地写出每一步骤来，就会感到符号太繁琐了（读者可以试一试$m=3$, $p=2$的情形）. 我们将通过另外的途径来证明定理4. 为此，先要在以下两节（§6和§7)里作一些准备. 然后，在§8中，我们将介绍一般隐函数定理（即本节定理4）的一个较为紧凑的证明.

## §6 线性映射

微分学的基本手段是局部线性化，即通过适当的线性逼近，研究映射的局部性质. 为了介绍更一般的微分概念，需要先了解有关线性映射的一些预备知识.

### 6.a 线性映射与矩阵

考察从$\mathbb{R}^m$到$\mathbb{R}^p$的线性映射（或称线性变换）

$$(6.1)\qquad y=Ax.$$

这映射可以写成分量形式

$$(6.2)\qquad y_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ji}x_i,\qquad j=1,\cdots,p.$$

如果把$\mathbb{R}^m$中的向量 $x$ 和$\mathbb{R}^p$中的向量 $y$ 都写成列矩阵的形式

$$[x]=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\qquad [y]=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_p\end{pmatrix},$$

并记

$$[A]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm}\end{pmatrix},$$

那么线性映射（6.1）或（6.2）可以写成以下的矩阵形式

$$(6.3)\qquad [y]=[A][x].$$

我们约定，把从$\mathbb{R}^m$到$\mathbb{R}^p$的一切线性映射所组成的集合记为

$$L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p),$$

并约定把线性映射$A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$与$B\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$的复合写作

$$B\circ A=BA.$$

于是，线性映射的复合，可以表示为矩阵的乘法

$$[BA]=[B][A].$$

我们可以把向量$x$与表示它的列矩阵$[x]$等同视之，把线性映射$A$与表示它的矩阵$[A]$等同视之，把$L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$与由全体$p\times m$矩阵组成的集合等同视之．以下，在一般情形下，对于等同视之的对象，在记号上也就不再加以区别了．

### 6.b 线性映射与矩阵的范数

我们约定记

$$L=\bigcup_{m,p\in\mathbb{N}}L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p).$$

这可看作一切矩阵的集合．

**定义** 我们把满足以下条件$(N_1)$—$(N_4)$的任何一个实值函数$N$：$L\to\mathbb{R}$，称为线性映射的范数（或矩阵的范数）．

$(N_1)$ 对于任何线性映射（矩阵）$A$，都有

$$N(A)\geqslant 0,$$

并且仅当 $A=0$ 时才有 $N(A)=0$；

$(N_2)$ 对于任何线性映射（矩阵）$A$ 和实数 $\lambda$，都有

$$N(\lambda A)=|\lambda|N(A);$$

$(N_3)$ 对于任何两个可相加的线性映射（矩阵）$A$ 和 $B$，都有

$$N(A+B)\leqslant N(A)+N(B);$$

$(N_4)$ 对于任何两个可复合的线性映射（可相乘的矩阵）$B$ 和 $A$，都有

$$N(BA)\leqslant N(B)N(A).$$

**例1** 如果对

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix},$$

规定

$$N(A)=\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}^2\right)^{1/2},$$

那么 $N$ 是线性映射（矩阵）的一种范数．条件 $(N_1)$，$(N_2)$ 和 $(N_3)$ 比较容易验证（与关于向量空间的欧几里德范数的验证完全类似）．条件 $(N_4)$ 可验证如下：设

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{q1} & \cdots & \cdots & b_{qp} \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix},$$

则有

$$BA=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{q1} & \cdots & \cdots & c_{qm} \end{pmatrix},$$

这里

$$c_{ki}=\sum_{j=1}^{p} b_{kj}a_{ji}$$

$$i=1,\cdots,m,\quad k=1,\cdots,q.$$

利用柯西不等式可得

$$c_{ki}^2=\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}a_{ji}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ji}^2\right).$$

于是得到

$$N(BA)=\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m} c_{ki}^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ji}^2\right)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} b_{kj}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}^2\right)^{1/2}$$

$$=N(B)N(A).$$

以下，我们约定把本例中所定义的范数记为

$$\|\cdot\|,$$

即对于

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pm}\end{pmatrix},$$

规定

$$\|A\|=\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}^2\right)^{1/2}.$$

**例 2**　如果对

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pm}\end{pmatrix}$$

规定

$$N(A)=\max_{j}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ji}|\right\}$$

（即取各行元素绝对值之和的最大值作为 $N(A)$），则这样定义的 $N$ 也是线性映射（矩阵）的一种范数．条件$(N_1)$，$(N_2)$和$(N_3)$仍容易验证．这里来验证条件$(N_4)$．设

$$B=(b_{kj})_{q\times p},\qquad A=(a_{ji})_{p\times m},$$

则有

$$BA=(c_{ki})_{q\times m},$$

这里

$$c_{ki}=\sum_{j=1}^{p} b_{kj}a_{ji}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}|c_{ki}|&=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{p} b_{kj}a_{ji}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}|\,|a_{ji}|\\&=\sum_{j=1}^{p}\left(|b_{kj}|\sum_{i=1}^{m}|a_{ji}|\right)\\&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}|\right)\max_{j}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ji}|\right\}.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}N(BA)&=\max_{k}\left\{\sum_{i=1}^{m}|c_{ki}|\right\}\\&\leqslant\max_{k}\left\{\sum_{j=1}^{p}|b_{kj}|\right\}\cdot\max_{j}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ji}|\right\}\\&=N(B)N(A).\end{aligned}$$

以下，我们约定把本例中所定义的范数记为

$$|\cdot|,$$

即对于

$$A=(a_{ji})_{p\times m}$$

规定

$$|A|=\max_j\left\{\sum_{i=1}^m|a_{ji}|\right\}.$$

我们注意到：如果$\mathbb{R}^m$ 和$\mathbb{R}^p$ 都赋以欧几里德范数$\|\cdot\|$，而$L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$赋以例 1 中所定义的范数$\|\cdot\|$，那么就有

(6.4) $\qquad \|Ax\|\leqslant\|A\|\,\|x\|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^m, A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p).$

事实上，利用柯西不等式就可得到

$$\left\{\sum_{j=1}^p\left(\sum_{i=1}^m a_{ji}x_i\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{j=1}^p\left(\sum_{i=1}^m a_{ji}^2\right)\left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^p\sum_{i=1}^m a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这就是（6.4）式.

类似地，如果$\mathbb{R}^m$ 赋以范数

$$|x|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|x_i|\},$$

$\mathbb{R}^p$ 赋以范数

$$|y|=\max_{1\leqslant j\leqslant p}\{|y_j|\},$$

而 $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$赋以例 2 中所定义的范数$|\cdot|$，那么也有

(6.5) $\qquad |Ax|\leqslant|A|\,|x|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^m,\ A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p).$

事实上，我们有

$$\left|\sum_{i=1}^m a_{ji}x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^m|a_{ji}|\,|x_i|$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^m|a_{ji}|\right)\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|x_i|\}.$$

由此得到

$$\max_{1\leqslant j\leqslant p}\left\{\left|\sum_{i=1}^m a_{ji}x_i\right|\right\}$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant p}\left\{\sum_{i=1}^m|a_{ji}|\right\}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|x_i|\}.$$

这就是 (6.5) 式.

(6.4) 式和 (6.5) 式十分重要，我们以后将多次用到这些不等式.

在 $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$中引入范数之后，就可以讨论极限和连续这些概念. 作为例子，让我们来考察如下的映射的连续性

$$\mathbf{R}^l\supset\Omega\longrightarrow L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^p)$$

$$x\longmapsto A(x)=(a_{ji}(x))_{p\times m}$$

(这样的映射又称为矩阵值函数). 设 $x_0\in\Omega$. 如果有

$$\lim_{x\to x_0}\|A(x)-A(x_0)\|=0,$$

或者与之等价地有

$$\lim_{x\to x_0}|A(x)-A(x_0)|=0,$$

那么我们就说矩阵值函数 $A(x)$在点 $x_0$ 连续.

容易证明，矩阵值函数 $A(x)$在点 $x_0$ 连续的充分必要条件是：它的每一个分量

$$a_{ji}(x)\quad(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,p)$$

都在点 $x_0$ 连续. 事实上，我们有

$$|a_{ji}(x)-a_{ji}(x_0)|\leqslant\begin{cases}\|A(x)-A(x_0)\|\\|A(x)-A(x_0)|\end{cases}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}|a_{ji}(x)-a_{ji}(x_0)|$$

$$(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,p).$$

利用这不等式，即可证明上面的论断.

## §7 向量值函数的微分

我们知道，一元(数值)函数 $f(x)$在点 $x_0$ 的微分是一个

线性函数

$$Ah=f'(x_0)\cdot h,$$

它满足条件

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|}{|h|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|$$

$$=0.$$

采取类似这样的方式，可以把微分的定义推广到更一般的情形.

**定义 1** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个开集，$f$: $G\to\mathbf{R}^p$ 是一个映射（向量值函数），$x_0\in G$. 如果存在一个线性映射

$$A\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^p),$$

使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|}{|h|}=0, \tag{7.1}$$

那么我们就说向量值函数 $f$ 在点 $x_0$ 可微分. 如果 $f$ 在 $G$ 的每一点可微分，那么我们就说 $f$ 在 $G$ 可微分.

**注记 1** 在上面的定义中，可以把范数 $|\cdot|$ 换成 $\|\cdot\|$ 或其他范数. 由于各种范数互相等价，依不同范数定义的可微性是完全一致的.

**注记 2** 我们指出：满足 (7.1) 的线性映射 $A\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^p)$ 是唯一的. 事实上，如果还有 $B\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^p)$ 也使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Bh|}{|h|}=0,$$

那么对于任意取定的 $h\in\mathbf{R}^m\setminus\{0\}$ 和充分小的实数 $e>0$，就有

$$|(B-A)h|=\frac{1}{e}|(B-A)(eh)|$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(|f(x_0+\varepsilon h)-f(x_0)-B(\varepsilon h)|\right.$$
$$\left.+|f(x_0+\varepsilon h)-f(x_0)-A(\varepsilon h)|\right)$$
$$=|h|\left(\frac{|f(x_0+\varepsilon h)-f(x_0)-B(\varepsilon h)|}{|\varepsilon h|}\right.$$
$$\left.+\frac{|f(x_0+\varepsilon h)-f(x_0)-A(\varepsilon h)|}{|\varepsilon h|}\right).$$

在上式中让 $\varepsilon\to 0$，就得到

$$|(B-A)h|=0,$$
$$(B-A)h=0.$$

我们看到

$$Bh=Ah,\quad \forall h\in\mathbf{R}^n,$$

这意味着

$$B=A.$$

**定义 2** 我们把满足定义 1 的唯一线性映射 $A$ 叫做向量值函数 $f$ 在点 $x_0$ 的微分，记为

$$\mathrm{D}f(x_0)=A.$$

**注记** 我们介绍与 (7.1) 式等价的几种表述：

(1) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $0<|h|<\delta$，就有

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|<\varepsilon|h|;$$

(2) 当 $h\to 0$ 时，

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|=o(|h|),$$

也就是当 $x\to x_0$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|=o(|x-x_0|);$$

(3) 如果记

$$\alpha(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}, & \text{对于 } x\neq x_0,\\[2ex] 0, & \text{对于 } x=x_0,\end{cases}$$

那么 $\alpha(x,x_0)$ 看作 $x$ 的函数在 $x_0$ 点连续，也就是

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x,x_0)=0.$$

这里列举的（1），（2）或（3）都可以代替（7.1）作为"函数 $f$ 在 $x_0$ 点可微并且 $Df(x_0)=A$"的定义.

**定理1** 设 $G$ 是$\mathbb{R}^m$ 的一个开集，$f: G\to\mathbb{R}^p$ 是一个映射（向量值函数），$x_0\in G$. 如果 $f$ 在点 $x_0$ 可微，那么存在点 $x_0$ 的邻域 $U$ 和正实数 $\gamma$，使得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\gamma|x-x_0|,\qquad \forall x\in U.$$

由此可知，如果函数 $f$ 在点 $x_0$ 可微，那么这函数在 $x_0$ 连续.

**证明** 设 $Df(x_0)=A$. 根据可微性的定义，对任意取定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|<\varepsilon|x-x_0|.$$

于是，只要$0<|x-x_0|<\delta$，就有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\leqslant|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|\\&\quad+|A(x-x_0)|\\&\leqslant\varepsilon|x-x_0|+|A||x-x_0|\\&=(\varepsilon+|A|)|x-x_0|.\end{aligned}$$

在$0<|x-x_0|<\delta$ 的条件下，我们得到

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant(\varepsilon+|A|)|x-x_0|$$

——这不等式对于 $x=x_0$ 的情形当然也成立. 如果记

$$U=\{x\in\mathbb{R}^m\,|\,|x-x_0|<\delta\},$$
$$\gamma=\varepsilon+|A|,$$

那么就有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\gamma|x-x_0|,\qquad\forall x\in U.\qquad\square$$

**定理2** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集，$f: G\to\mathbb{R}^p$ 和 $g: G\to\mathbb{R}^p$ 都是向量值函数，$\lambda\in\mathbb{R}$，$x_0\in G$. 如果 $f$ 和 $g$ 都在点 $x_0$ 可微，那么 $f+g$ 和 $\lambda f$ 也都在点 $x_0$ 可微，并且

$$D(f+g)(x_0)=Df(x_0)+Dg(x_0),$$
$$D(\lambda f)(x_0)=\lambda Df(x_0).$$

**证明** 留给读者作为练习. □

**定理 3** (链式法则) 设 $G$ 是空间 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $H$ 是空间 $\mathbb{R}^p$ 中的开集, $f: G\to\mathbb{R}^p$ 和 $g: H\to\mathbb{R}^q$ 是向量值函数, $f(G)\subset H$. 如果向量值函数 $f$ 在点 $x_0\in G$ 可微, 而向量值函数 $g$ 在点 $f(x_0)\in H$ 可微, 那么向量值函数 $g\circ f: G\to\mathbb{R}^q$ 也在点 $x_0$ 可微, 并且有

$$\mathrm{D}(g\circ f)(x_0)=\mathrm{D}g(f(x_0))\mathrm{D}f(x_0).$$

**证明** 为简便起见, 我们引入以下记号:

$$A=\mathrm{D}f(x_0),\qquad B=\mathrm{D}g(f(x_0)),$$

$$k=f(x_0+h)-f(x_0),\quad y_0=f(x_0),$$

$$\alpha(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

$$\beta(y,y_0)=\begin{cases}\dfrac{|g(y)-g(y_0)-B(y-y_0)|}{|y-y_0|}, & y\neq y_0,\\ 0, & y=y_0.\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}&|g\circ f(x_0+h)-g\circ f(x_0)-BAh|\\&\quad=|g(f(x_0)+k)-g(f(x_0))-BAh|\\&\quad\leqslant|g(f(x_0)+k)-g(f(x_0))-Bk|\\&\qquad+|B(k-Ah)|\\&\quad\leqslant|g(f(x_0)+k)-g(f(x_0))-Bk|\\&\qquad+|B|\,|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|\\&\quad=\beta(f(x_0)+k,\ f(x_0))|k|\\&\qquad+|B|\alpha(x_0+h,x_0)|h|.\end{aligned}$$

由定理 1 可知, 存在常数 $\gamma>0$, 使得对于充分小的 $h$ 有

$$|k|=|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant\gamma|h|.$$

于是, 我们得到

$$\frac{|g\circ f(x_0+h)-g\circ f(x_0)-BAh|}{|h|}$$

$$\leqslant\beta(f(x_0)+k,\ f(x_0))\frac{|k|}{|h|}+|B|\alpha(x_0+h,x_0)$$

$$\leqslant\gamma\cdot\beta(f(x_0)+k,\ f(x_0))+|B|\cdot\alpha(x_0+h,x_0).$$

由此即可得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{|g\circ f(x_0+h)-g\circ f(x_0)-BAh|}{|h|}=0. \qquad \square$$

设 $G$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，$f$: $G\to\mathbf{R}^p$是向量值函数．于是可以写

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_p(x)) \quad (x\in G).$$

我们看到，向量值函数 $f(x)$ 的每一分量 $f_i(x)(i=1,\cdots,p)$ 定义了一个数值函数

$$f_i:\ G\longrightarrow\mathbf{R}.$$

**定理4** 向量值函数

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_p(x))$$

在点 $x_0$ 可微的充分必要条件是：它的每一个分量 $f_i(x)(i=1,\cdots,p)$ 都在点 $x_0$ 可微．当这条件满足时，就有

$$\mathbf{D}f(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x_0)\end{pmatrix}$$

**证明** 为了书写简便，我们采用分块矩阵记号．设

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm}\end{pmatrix},$$

要使以下的不等式对充分小的 $h$ 成立

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|<\varepsilon|h|,$$

必须而且只须对充分小的 $h$ 有

$$|f_i(x_0+h)-f_i(x_0)-A_ih|<\varepsilon|h|,$$

$$i=1,\ \cdots,\ p.$$

这样，我们证明了，向量值函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微分并且 $\mathrm{D}f(x_0)=A$ 的充分必要条件是：各分量 $f_i(x)$ 都在点 $x_0$ 可微分，并且

$$\mathrm{D}f_i(x_0)=A_i,\qquad i=1,\ \cdots,\ p.$$

当这条件满足时，应有

$$A_i=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0)\ \cdots\ \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(x_0)\right],\quad i=1,\ \cdots,\ m,$$

因而有

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_m}(x_0)\end{pmatrix}.$$

□

**注记** 我们看到：向量值函数的微分，具体表现为雅可比矩阵——这一事实非常重要．如果我们先证明定理 4，那么定理 1、定理 2 和定理 3 都可以利用数值函数的相应定理以及矩阵运算的有关法则来证明．建议读者按照这提示重新考察定理 1、定理 2 和定理 3．

**定理 5**（有限增量估计） 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，$f: G\to\mathbf{R}^p$ 是在 $G$ 上可微的向量值函数．又设 $a$，$b$ 是 $G$ 中的两个点，满足条件 $[a,b]\subset G$．则存在 $c\in(a,b)$，使得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant|\mathrm{D}f(c)|\,|b-a|.$$

**证明** 考察向量值函数 $f(x)$ 的各个分量

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x).$$

不妨设

$$|f_k(b)-f_k(a)|=\max_{1\leqslant j\leqslant p}|f_j(b)-f_j(a)|$$
$$=|f(b)-f(a)|.$$
对数值函数 $f_k(x)$ 用有限增量定理，可以断定：存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f_k(b)-f_k(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(c)(b_i-a_i).$$

于是有

$$|f_k(b)-f_k(a)|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(c)\right||b_i-a_i|$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(c)\right|\right)\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|b_i-a_i|\}$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant p}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(c)\right|\right\}\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|b_i-a_i|\}.$$

这就是

$$|f(b)-f(a)|\leqslant|\mathrm{D}f(c)||b-a|. \qquad \square$$

**注记** 在定理5的条件下，对于范数 $\|\cdot\|$，也可以断定：存在 $\tilde{c}\in(a,b)$，使得

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|\mathrm{D}f(\tilde{c})\|\|b-a\|. \tag{7.2}$$

为了证明这一事实，让我们来考察函数

$$g(x)=\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))f_j(x).$$

对这数值函数用有限增量定理，我们得知：存在 $\tilde{c}\in(a,b)$，使得

$$g(b)-g(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{c})(b_i-a_i),$$

即

$$\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))^2$$
$$=\sum_{j=1}^{p}\left((f_j(b)-f_j(a))\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{c})(b_i-a_i)\right).$$

再利用柯西不等式，就得到

$$\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))^2 \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))^2}$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{c})\ (b_i-a_i)\right)^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))^2}$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{c})\right)^2\right\}\left\{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(f_j(b)-f_j(a))^2}$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{c})\right)^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2}.$$

由此就可得到 (7.2) 式.

下面讨论向量值函数对部分变元的偏微分. 为了叙述方便，我们把 $\mathbb{R}^{m+p}$ 看作乘积

$$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p,$$

把 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 中的点表示为

$$(x,\ y)=(x^1,\ \cdots,\ x^m,y^1,\ \cdots,\ y^p).$$

以下，凡是写 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 的时候，就约定采用这种简便的表示法.

设$\Omega$是 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 中的开集，考察 $m+p$ 个变元的向量值函数

$$F:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^q.$$

如果固定 $y=(y^1,\cdots,y^p)$，把 $F(x,y)$ 看成仅仅依赖于 $x$ 的向量值函数，那么就可以讨论这函数对变元 $x$ 的微分. 我们把这样的

微分叫做向量值函数 $F(x,y)$ 对变元 $x$ 的偏微分，并把它记为 $D_xF(x,y)$. 类似地，还可以讨论向量值函数 $F(x,y)$ 对变元 $y$ 的偏微分 $D_yF(x,y)$. 我们把偏微分的正式定义陈述如下.

**定义** 设$\Omega$是 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 中的一个开集，$F$: $\Omega\to\mathbb{R}^q$ 是一个映射，$(x_0,y_0)\in\Omega$. 如果存在 $A_1\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$ ($A_2\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$)，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-A_1h|}{|h|}=0$$

$$\left(\lim_{k\to 0}\frac{|f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)-A_2k|}{|k|}=0\right),$$

那么我们就说向量值函数 $F$ 在点 $(x_0,y_0)$ 对变元 $x$（对变元 $y$）可微分，并把 $A_1(A_2)$ 叫做 $F$ 在 $(x_0,y_0)$ 对变元 $x$（对变元 $y$）的偏微分，记为

$$D_xF(x_0,y_0)=A_1$$
$$(D_yF(x_0,y_0)=A_2).$$

**定理6** 设$\Omega$是 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 中的一个开集，$F$: $\Omega\to\mathbb{R}^q$ 是一个映射，$(x_0,y_0)\in\Omega$. 如果 $F(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$（作为依赖于 $m+p$ 个自变元的向量值函数）是可微分的，那么它在这点对变元 $x$ 的偏微分和对变元 $y$ 的偏微分都存在，并且

$$D_xF(x_0,y_0)h=DF(x_0,y_0)(h,0),\qquad \forall h\in\mathbb{R}^m,$$
$$D_yF(x_0,y_0)k=DF(x_0,y_0)(0,k),\qquad \forall k\in\mathbb{R}^p.$$

**证明** 记 $A=DF(x_0,y_0)$，并定义 $A_1\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^q)$ 和 $A_2\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ 如下：

$$A_1h=A(h,0),\qquad \forall h\in\mathbb{R}^m,$$
$$A_2k=A(0,k),\qquad \forall k\in\mathbb{R}^p.$$

则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{|F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)-A_1h|}{|h|}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|F((x_0,y_0)+(h,0))-F(x_0,y_0)-A(h,0)|}{|(h,0)|}$$
$$=0.$$

这证明了

$$D_xF(x_0,y_0)=A_1.$$

同样可以证明

$$D_yF(x_0,y_0)=A_2. \qquad \square$$

**注记** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^{m+p}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p$ 中的一个开集，$(x_0,y_0)\in\Omega$. 又设 $F:\ \Omega\to\mathbb{R}^q$ 是一个映射，$F(x,y)$ 的各分量为

$$F^1(x,y),\cdots,F^q(x,y).$$

如果 $F$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微，那么 $DF(x_0,y_0)$ 表现为矩阵：

$$DF(x_0,y_0)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}\dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^q}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^q}{\partial x^m} & \dfrac{\partial F^q}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^q}{\partial y^p}\end{array}\right)_{(x_0,y_0)}.$$

我们注意到，偏微分 $D_xF(x_0,y_0)$ 和 $D_yF(x_0,y_0)$ 的矩阵表示恰好就是 $DF(x_0,y_0)$ 的分块矩阵表示中的两个子块：

$$D_xF(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^q}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^q}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}.$$

$$D_yF(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^p}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F^q}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^q}{\partial y^p}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}.$$

另一方面，如果 $D_xF(x,y)$ 和 $D_yF(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 邻近有定义并且作为 $(x,y)$ 的函数在点 $(x_0,y_0)$ 连续，那么 $F(x,y)$ 也就在点 $(x_0,y_0)$ 可微，并且 $DF(x_0,y_0)$ 可以表示成如下的分块矩阵形式

$$DF(x_0, y_0) = [D_x F(x_0, y_0) \mid D_y F(x_0, y_0)].$$

限于篇幅，我们不去讨论高阶微分的一般概念了. 这里仅仅通过分量来定义向量值函数的高阶连续可微性.

**定义** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^m$中的一个开集，设$f: \Omega \to \mathbb{R}^p$是一个映射（向量值函数），并设 $f(x)$ 的分量为

$$f_1(x), \ f_2(x), \ \cdots, \ f_p(x).$$

如果向量值函数 $f(x)$ 的每一分量 $f_j(x)$ 都是 $r$ 阶连续可微的，那么我们就说 $f$ 是 $r$ 阶连续可微的，或者说 $f$ 是 $C^r$ 类的. 如果对任意的 $r \in \mathbb{N}$，函数 $f$ 都是 $r$ 阶连续可微的，那么我们就说 $f$ 是$\infty$阶连续可微的，或者说 $f$ 是 $C^\infty$ 类的.

## §8 一般隐函数定理

本节采用迭代法证明一般隐函数定理（即§5中的定理4）. 为了帮助理解，预先作一些说明.

先从解方程的牛顿法谈起. 考察方程

$$f(y) = 0, \tag{8.1}$$

这里假设 $f$ 具有我们以下讨论所需要的一些性质（连续可微，导数不等于0，等等）. 为了求解（8.1），我们适当选取一个初始近似 $y_1$，然后作迭代序列

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{8.2}$$

如果这样产生的序列$\{y_n\}$收敛于 $y_*$，那么 $y_*$ 就应是方程(8.1)的解（这只要在（8.2）中让 $n \to +\infty$取极限就可以看出）.

再来考察单个方程的隐函数定理，即§5中的定理1. 在

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

的条件下，要证明方程

$$F(x, y) = 0 \tag{8.3}$$

确定了一个从 $D$ 到 $E$ 的隐函数，就是要证明对每一个 $x \in D$,

关于 $y$ 的方程（8.3）恰有唯一的一个解 $y\in E$. 为此，我们尝试用牛顿法的迭代公式来求解 $y$：适当选取 $y_1$，然后构作

$$(8.4)\qquad y_{n+1}=y_n-\frac{F(x,y_n)}{F_y(x,y_n)},$$
$$n=1,2,\cdots.$$

如果能证明由（8.4）产生的迭代序列收敛，那么也就能够证明所求的解存在.

为了计算方便，我们对迭代公式（8.4）作如下简化：因为 $(x,y_n)$ 与 $(x_0,y_0)$ 很接近，所以 $F_y(x,y_n)$ 与 $F_y(x_0,y_0)$ 也很接近，我们就用 $F_y(x_0,y_0)$ 代替 $F_y(x,y_n)$，这样得到一个比（8.4）式更便于计算的迭代公式

$$(8.5)\qquad y_{n+1}=y_n-\frac{F(x,y_n)}{F_y(x_0,y_0)},$$
$$n=1,2,\cdots.$$

如果由（8.5）产生的迭代序列$\{y_n\}$收敛，那么极限 $y$ 也一定满足方程

$$F(x,y)=0.$$

类似于（8.5）这样的，从牛顿法公式变形而得到的迭代公式，被称为变形的牛顿法公式.

现在考虑更一般的情形. 设$\Omega$是$\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的一个开集，$F$：$\Omega\to\mathbb{R}^p$是一个连续可微的向量值函数，$(x_0,y_0)\in\Omega$,

$$F(x_0,y_0)=0,$$
$$\det(D_yF(x_0,y_0))\neq 0.$$

这里符号 det(·) 表示方阵（·）的行列式. 从上面的讨论得到启发，我们尝试用类似的迭代手续去求解更一般的方程组

$$(8.6)\qquad F(x,y)=0.$$

为此，对于充分接近于 $x_0$ 的任意一个 $x$，我们从适当选取的 $y_1$ 出发，构作如下的迭代序列（式中的$(\cdots)^{-1}$表示$(\cdots)$的逆矩阵）：

$$y_{n+1}=y_n-(\mathrm{D}_yF(x_0,y_0))^{-1}F(x,y_n),\quad n=1,2,\cdots. \tag{8.7}$$

尚需验证由这迭代公式产生的序列$\{y_n\}$确实收敛于某个 $y$. 我们指出：压缩映射原理是处理这类问题的一种有效的手段.

至此，我们已对一般隐函数定理的主要证明思路作了一番分析. 下面就来进行具体的讨论.

**定理**（一般隐函数定理） 设$\Omega$是$\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$中的一个开集，$F$: $\Omega\to\mathbb{R}^p$是一个连续可微的向量值函数，$(x_0,y_0)\in\Omega$. 如果

$$F(x_0,y_0)=0,$$

$$\det(\mathrm{D}_yF(x_0,y_0))\neq 0,$$

那么存在以$(x_0,y_0)$为中心的开方块

$$D\times E\subset\Omega$$

$$(D=\{x\in\mathbb{R}^n\mid|x-x_0|<\delta\},$$

$$E=\{y\in\mathbb{R}^p\mid|y-y_0|<\eta\}),$$

使得

(1) 对任何一个 $x\in D$, 恰存在唯一的一个 $y\in E$, 满足方程

$$F(x,y)=0.$$

换句话说就是：方程 $F(x,y)=0$定义了一个从 $D$ 到 $E$ 的隐函数 $y=f(x)$.

(2) 这函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 上是连续可微的，它的微分可以表示为

$$\mathrm{D}f(x)=-(\mathrm{D}_yF(x,f(x)))^{-1}\mathrm{D}_xF(x,f(x)).$$

**证明** 我们定义一个映射 $\Phi$: $\Omega\to\mathbb{R}^p$ 如下：

$$\Phi(x,y)=y-(\mathrm{D}_yF(x_0,y_0))^{-1}F(x,y).$$

计算得

$$\mathrm{D}_y\Phi(x,y)=I_p-(\mathrm{D}_yF(x_0,y_0))^{-1}\mathrm{D}_yF(x,y),$$

这里 $I_p$: $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ 是单位映射（恒同映射），它的矩阵表示为

$$I_p=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

因为 $(x_0,y_0)$ 是开集$\Omega$中的点，并且在这点有

$$D_y\Phi(x_0,y_0)=0 \quad (\text{零线性映射}),$$

$$\det(D_yF(x_0,y_0))\neq 0 \quad (\text{数 } 0),$$

所以，对于满足条件$0<\alpha<1$的任意取定的$\alpha\left(\text{例如 } \alpha=\frac{1}{2}\right)$，存在$\eta>0$，使得只要

$$|x-x_0|\leqslant\eta, \qquad |y-y_0|\leqslant\eta,$$

就有

$$\begin{cases}(x,y)\in\Omega,\\ |D_y\Phi(x,y)|<\alpha<1,\\ \det(D_yF(x,y))\neq 0.\end{cases}$$

以下，我们记

$$E=\{y\in\mathbb{R}^p \mid |y-y_0|<\eta\},$$

$$\bar{E}=\{y\in\mathbb{R}^p \mid |y-y_0|\leqslant\eta\}.$$

又因为

$$\Phi(x_0,y_0)=y_0,$$

所以存在$\delta$，$0<\delta<\eta$，使得只要

$$x\in D=\{x\in\mathbb{R}^m \mid |x-x_0|<\delta\},$$

就有

$$|\Phi(x,y_0)-y_0|<(1-\alpha)\eta.$$

对于任意（暂时取定）的 $x\in D$，我们来考察映射

$$\Phi(x,\cdot):\bar{E}\longrightarrow\mathbb{R}^p.$$

下面指出：$\Phi(x,\cdot)$ 实际上是从 $\bar{E}$ 到 $E$ 中的一个压缩映射．首先注意到，只要 $z\in\bar{E}$，就有

$$\begin{aligned}&|\Phi(x,z)-y_0|\\ &\leqslant|\Phi(x,z)-\Phi(x,y_0)|+|\Phi(x,y_0)-y_0|\\ &\leqslant|D_y\Phi(x,\zeta)|\,|z-y_0|+|\Phi(x,y_0)-y_0|\\ &<\alpha\eta+(1-\alpha)\eta=\eta.\end{aligned}$$

因为对任何 $z\in\bar{E}$，都有

$$\Phi(x,z)\in E,$$

所以 $\Phi(x,\cdot)$ 实际上是从$\bar{E}$到 $E$ 中的一个映射：

$$\Phi(x,\cdot):\bar{E}\longrightarrow E\subset\bar{E}. \tag{8.8}$$

集合$\bar{E}$赋以由范数$|\cdot|$决定的距离，成为一个完备的距离空间.在这空间中，$\Phi(x,\cdot)$ 是一个压缩映射：

$$\Phi(x,\cdot):\bar{E}\longrightarrow\bar{E},$$

$$\begin{aligned}&|\Phi(x,z')-\Phi(x,z'')|\\&\quad\leqslant|D_y\Phi(x,\zeta')||z'-z''|\\&\quad\leqslant\alpha|z'-z''|,\qquad\forall z',z''\in\bar{E}.\end{aligned}$$

根据压缩映射原理，存在唯一的一个 $y\in\bar{E}$，使得

$$y=\Phi(x,y).$$

另由（8.8）可知，实际上有

$$y=\Phi(x,y)\in E.$$

这样，我们证明了：对任何一个 $x\in D$，存在唯一的一个 $y\in E$，使得

$$y=\Phi(x,y),$$

也就是

$$F(x,y)=0.$$

至此，定理的结论（1）已经得到了证明.

把结论（1）中所确定的从 $D$ 到 $E$ 的函数记为 $y=f(x)$.我们来考察 $f(x)$ 的分析性质. 因为

$$f(x)\equiv\Phi(x,f(x)),\qquad\forall x\in D,$$

所以，只要 $x,x+h\in D$，就有

$$\begin{aligned}&|f(x+h)-f(x)|\\&\quad=|\Phi(x+h,f(x+h))-\Phi(x,f(x))|\\&\quad\leqslant|\Phi(x+h,f(x+h))-\Phi(x+h,f(x))|\\&\qquad+|\Phi(x+h,f(x))-\Phi(x,f(x))|\\&\quad\leqslant\alpha|f(x+h)-f(x)|\\&\qquad+|D_x\Phi(x+\theta h,f(x))||h|\\&\quad\leqslant\alpha|f(x+h)-f(x)|+\beta|h|.\end{aligned}$$

在这里

$$0<\theta<1,\quad \beta=\sup_{(x,y)\in\overline{D}\times\overline{E}}\{|\mathrm{D}_x\Phi(x,y)|\}$$

$$(\overline{D}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid|x-x_0|\leqslant\delta\}).$$

我们得到

$$(8.9)\qquad |f(x+h)-f(x)|\leqslant\frac{\beta}{1-\alpha}|h|,\qquad \forall x,x+h\in D.$$

这证明了函数 $f$ 的连续性. 为了便于以下讨论，我们取

$$\gamma=\max\left\{\frac{\beta}{1-\alpha},\ 1\right\}\geqslant 1,$$

并由 (8.9) 式得出

$$(8.10)\qquad |f(x+h)-f(x)|\leqslant\gamma|h|,\qquad \forall x,x+h\in D.$$

下面证明函数 $f$ 在 $D$ 中可微，并且

$$\mathrm{D}f(x)=-(\mathrm{D}_yF(x,f(x)))^{-1}\mathrm{D}_xF(x,f(x)).$$

因为 $F(x,y)$ 在 $\Omega$ 中可微，所以对于取定的 $(x,y)\in\Omega$ 和任意给定的 $\varepsilon>0$，只要增量 $(h,k)$ 的范数 $|(h,k)|$ 充分小，就有

$$|F(x+h,y+k)-F(x,y)-\mathrm{D}_xF(x,y)h-\mathrm{D}_yF(x,y)k|$$
$$<\varepsilon|(h,k)|.$$

我们取 $x\in D$，$y=f(x)\in E$，并且

$$k=f(x+h)-f(x).$$

根据 (8.10) 式，对足够小的 $h$ 有：

$$|k|=|f(x+h)-f(x)|\leqslant\gamma|h|,$$

$$|(h,k)|=\max\{|h|,|k|\}\leqslant\gamma|h|.$$

于是，只要 $|h|$ 足够小，就有

$$|F(x+h,f(x)+k)-F(x,f(x))$$
$$-\mathrm{D}_xF(x,f(x))h-\mathrm{D}_yF(x,f(x))k|$$
$$<\varepsilon|(h,k)|\leqslant\varepsilon\gamma|h|.$$

又因为

$$F(x+h,f(x)+k)=F(x+h,f(x+h))=0,$$

$$F(x,f(x))=0,$$

所以有

$$|D_xF(x,f(x))h+D_yF(x,f(x))k|$$
$$<e|(h,k)|\leqslant e\gamma|h|.$$

由此得到

$$|k+(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x))h|$$
$$=|(D_yF(x,f(x)))^{-1}$$
$$\cdot(D_xF(x,f(x))h+D_yF(x,f(x))k)|$$
$$\leqslant|(D_yF(x,f(x)))^{-1}|$$
$$\cdot|D_xF(x,f(x))h+D_yF(x,f(x))k|$$
$$<\rho e\gamma|h|,$$

这里

$$\rho=|(D_yF(x,f(x)))^{-1}|.$$

我们看到，只要$|h|$充分小，就有

$$|f(x+h)-f(x)+(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x))h|$$
$$<\rho e\gamma|h|.$$

这证明了函数 $f$ 在任意一点 $x\in D$ 的可微性，并且得到

$$Df(x)=-(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x)).$$

从这表示式又可看出 $Df(x)$ 的连续性（因为等式右端连续依赖于变元$x$）. □

**推论** 在上面定理中，如果 $F$ 是 $r$ 阶连续可微的（$r\geqslant 1$），那么由

$$F(x,y)=0$$

所确定的隐函数

$$f:\ D\longrightarrow E\subset\mathbb{R}^p$$

也是 $r$ 阶连续可微的.

**证明** 用归纳法. 首先，$r=1$的情形已经包含在定理的结论之中. 在那里，我们求得

$$Df(x)=-(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x)).$$

作为归纳假设，我们认为本推论对于 $r=l-1$ 的情形已经成立．现在来考察 $r=l$ 的情形．如果 $F$ 是 $l$ 阶连续可微的，那么它当然更是 $l-1$ 阶连续可微的．根据归纳假设就可以判定 $f$ 至少是 $l-1$ 阶连续可微的．再来比较以下矩阵等式两边的分量：

$$\mathrm{D}f(x)=-(\mathrm{D}_yF(x,f(x)))^{-1}\mathrm{D}_xF(x,f(x)).$$

我们看到，矩阵 $\mathrm{D}f(x)$ 的各分量都是 $l-1$ 阶连续可微的．这说明 $f$ 是 $l$ 阶连续可微的． □

## §9 逆映射定理

### 9.a 微分同胚与局部微分同胚的概念

设 $G$ 和 $H$ 是两个集合，

$$\varphi:G\longrightarrow H$$

是一个映射．如果

Ⅰ．$\varphi$ 是单映射，即

$$x_1,x_2\in G,\ x_1\neq x_2\Longrightarrow\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2),$$

Ⅱ．$\varphi$ 是满映射，即

$$\varphi(G)=H,$$

那么就存在 $\varphi$ 的逆映射

$$\psi:H\longrightarrow G,$$

它由以下条件唯一确定

$$\psi(y)=x\Longleftrightarrow\varphi(x)=y.$$

这条件又可写成

$$\psi(\varphi(x))=x,\qquad\forall x\in G,$$
$$\varphi(\psi(y))=y,\qquad\forall y\in H.$$

如果 $G$ 和 $H$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，并且互逆的两个映射

$$\varphi:G\longrightarrow H\subset\mathbb{R}^m$$

和

$$\psi:H\longrightarrow G\subset\mathbb{R}^m$$

都是 $C^r$ 映射，那么我们就说 $\varphi$ 是从 $G$ 到 $H$ 的一个 $C^r$ 同胚（并且说 $\psi$ 是从 $H$ 到 $G$ 的一个 $C^r$ 同胚）。

我们约定把 $C^0$ 同胚简单地叫做同胚，把 $C^1$ 同胚叫做微分同胚（有时也把 $r>1$ 情形的 $C^r$ 同胚叫做 $C^r$ 微分同胚）。

现在设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

是一个 $C^r$ 映射，$a \in \Omega$。如果存在包含点 $a$ 的开集 $U$ 和包含点 $b=f(a)$ 的开集 $V$，使得 $f$ 限制在 $U$ 上是从 $U$ 到 $V$ 的一个 $C^r$ 同胚，那么我们就说 $f$ 在 $a$ 点是局部 $C^r$ 同胚.

我们把局部 $C^0$ 同胚简单地叫做局部同胚，把局部 $C^1$ 同胚叫做局部微分同胚（有时也把 $r>1$ 情形的局部 $C^r$ 同胚叫做局部 $C^r$ 微分同胚）。

一个有重要意义的问题是：在怎样的条件下，映射 $f$ 在 $a$ 点是局部微分同胚？下面将要介绍的逆映射定理，回答了这个问题。

### 9.b 逆映射定理

为了以下叙述方便，我们先对映射的限制作一说明. 设

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

是一个映射， $S \subset X$. 则 $\varphi$ 限制在 $S$ 上给出一个映射

$$\varphi|S: S \longrightarrow Y,$$

这映射的定义如下：

$$(\varphi|S)(x)=\varphi(x), \quad \forall x \in S.$$

换句话说，$\varphi|S$ 与 $\varphi$ 的对应法则是同样的，它们之间的区别仅仅在于前者的定义范围限制在子集 $S$ 上.

**定理 1（逆映射定理）** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

是一个连续可微映射，$a \in \Omega$. 如果

$$\det Df(a) \neq 0,$$

那么 $f$ 在 $a$ 点是局部微分同胚.

换句话说，就是：在所给的条件下，存在包含点 $a$ 的开集 $U$ 和包含点 $b=f(a)$ 的开集 $V$，使得 $f(U)=V$，$f:U\to V$ 是一一对应，并且 $f|U$ 的逆映射

$$g: V\longrightarrow U\subset \mathbb{R}^m$$

也是连续可微映射.

**证明** 考察这样一个向量值函数

$$F: \Omega\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m,$$

其定义为

$$F(x,y)=f(x)-y,\qquad \forall(x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^m.$$

映射 $F$ 显然是连续可微的，它还满足

$$F(a,b)=f(a)-b=0,$$

$$\det D_xF(a,b)=\det Df(a)\neq 0.$$

因而可以对 $F(x,y)=0$应用一般隐函数定理（但要注意，与 §8 定理中所用的符号相对照，这里的变元 $x$ 与变元 $y$ 所扮演的角色正好相反）. 我们断定：存在以点 $a$ 为中心的开方块 $W\subset\Omega$ 和以点 $b=f(a)$ 为中心的开方块 $V\subset\mathbb{R}^m$，使得

(1) 对任何 $y\in V$，恰存在唯一的 $x\in W$，满足

$$F(x,y)=f(x)-y=0,$$

因而方程

$$f(x)-y=0$$

定义了一个从 $V$ 到 $W$ 的映射 $x=g(y)$；

(2) 映射 $g: V\to W\subset\mathbb{R}^m$ 是连续可微的，并且对于 $y\in V$，$x=g(y)$，应有

$$\begin{aligned}Dg(y)&=-(D_xF(x,y))^{-1}D_yF(x,y)\\&=(Df(x))^{-1}.\end{aligned}$$

我们来考察集合

$$U=\{x\in W\mid f(x)\in V\}.$$

因为 $W$ 和 $V$ 都是开集，$f$ 是连续映射，所以对任何 $x_0\in U$，

存在$\delta>0$，使得

$$U(x_0,\delta)\subset W$$

并且

$$f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x_0),\varepsilon)\subset V,$$

即

$$U(x_0,\delta)\subset U.$$

这说明 $U$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的一个开集（图12-2）．显然 $f$ 限制在 $U$ 上是从 $U$ 到 $V$ 的一一对应，$f|U$ 的逆映射就是连续可微映射

$$g: V\longrightarrow U\subset\mathbf{R}^n. \qquad \square$$

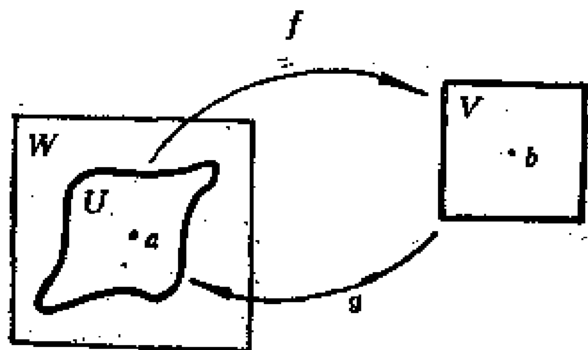



图 12-2

**注记** 在定理1的证明过程中，我们已经顺便得到了求逆映射微分的公式：对于 $y\in V$，$x=g(y)$，应有

$$\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(x))^{-1},$$

也就是

$$\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}.$$

**推论** 在定理1中，如果 $f$ 是 $r$ 阶连续可微的（$r\geqslant1$），那么局部逆映射 $g=(f|U)^{-1}$ 也是 $r$ 阶连续可微的．换句话说，在这条件下，$f$ 在 $a$ 点是一个局部 $C^r$ 同胚．

**定理2** 设$\Omega$是$\mathbf{R}^n$ 中的开集，

$$f:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}^n$$

是一个连续可微映射．如果

$$\det\mathrm{D}f(x)\neq0,\qquad \forall x\in\Omega,$$

那么 $f$ 把$\Omega$的任何开子集 $G$ 仍映成$\mathbf{R}^n$ 中的开集．

**证明** 设 $G$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，$G\subset\Omega$．我们来证明$H=$

$f(G)$ 仍是一个开集．对于 $H=f(G)$ 中的任意一点 $b$，存在 $a\in G$，使得 $f(a)=b$．因为

$$\det Df(a)\neq 0,$$

根据逆映射定理可以判定：存在开集 $U$ 和 $V$，满足条件

$$a\in U\subset G,\quad b\in V,\quad f(U)=V.$$

于是

$$b\in V=f(U)\subset f(G)=H.$$

由此得知 $b$ 是 $H=f(G)$ 的内点．我们看到，$H=f(G)$ 中的任何一点 $b$，都是这集合的内点．这说明 $H=f(G)$ 是一个开集． □

**注记** 如果映射 $f$ 把开集仍映成开集，那么我们就说 $f$ 是一个开映射．定理 2 中给出了保证 $f$ 是开映射的一个充分条件．

**定理 3** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，而

$$f: G\longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个 $r$ 阶连续可微的映射 ($r\geqslant 1$)．如果

(1) $f$ 是单一的（这就是说，对任何 $x_1,\ x_2\in G$，$x_1\neq x_2$，都应有 $f(x_1)\neq f(x_2)$），

(2) $\det Df(x)\neq 0$，$\forall x\in G$，那么 $f$ 是从开集 $G$ 到开集 $H=f(G)$ 的一个 $C^r$ 微分同胚．

**证明** 由条件(1)可知，$f$ 是从 $G$ 到 $H=f(G)$ 的一一对应，因而存在逆映射

$$f^{-1}: H\longrightarrow G.$$

又由于条件(2)，根据逆映射定理及其推论可以断定，在每一点 $b\in H=f(G)$ 的邻近，逆映射 $f^{-1}=g$ 都是 $r$ 阶连续可微的．这就是说，$f^{-1}$ 在 $H$ 上是 $C^r$ 的． □

请读者注意：定理 3 中的条件（1）并不能从条件(2)推得；我们举出以下反例．

**例 1** 考察映射

$$\varphi: \mathbb{C}\backslash\{0\}\longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

$$z\longmapsto z^2.$$

如果把 C中的点 $z=x+iy$ 和 $w=u+iv$ 分别等同于 $\mathbb{R}^2$ 中的点 $(x,y)$ 和 $(u,v)$，那么映射 $w=\varphi(z)$决定了一个从$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$到$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$的映射

$$f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2-y^2,\ 2xy).$$

映射 $f$ 的坐标表示为

$$\begin{cases} u=x^2-y^2, \\ v=2xy. \end{cases}$$

这映射的雅可必行列式为

$$\begin{aligned} \det Df(x,y) &= \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} \\ &= 4(x^2+y^2) > 0, \end{aligned}$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

我们看到，映射 $f$ 满足定理 3 中的条件（2），但它不满足该定理中的条件 (1)，因为对于 $(x,y)\neq(0,0)$，我们有

$$(-x,-y)\neq(x,y),$$
$$f(-x,-y)=f(x,y).$$

## §10　多元函数的极值

### 10.a　普通极值

**定义**　设 $m$ 元数值函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近有定义．如果存在 $\eta>0$，使得

$$f(x)\geqslant f(a), \qquad \forall x\in U(a,\eta),$$
$$(\leqslant)$$

那么我们就说函数 $f$ 在点 $a$ 取得极小值（极大值），如果存在

$\eta>0$，使得

$$f(x)>f(a),\qquad \forall x\in \check{U}(a,\eta),$$
$$(<)$$

那么我们就说函数 $f$ 在点 $a$ 取得严格极小值（严格极大值）.

极小值和极大值统称极值. 严格极小值和严格极大值统称严格极值. 在下一段中，我们还将讨论受到一定条件约束的极值——条件极值. 为了与那情形区别，这里定义的极值又称为普通极值.

设函数$f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 可微，于是

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{m}A_ih_i+o(\|h\|).$$

我们指出，如果函数 $f$ 在点 $a$ 取得极值，那么必定有

$$A_1=\cdots=A_m=0.$$

以下用反证法证明这一事实. 设 $\varepsilon$ 是充分小的正数，记

$$h_i=A_i\varepsilon,\qquad i=1,\cdots,m,$$
$$h=(h_1,\cdots,h_m),$$

则有

$$f(a\pm h)-f(a)=\pm\left(\sum_{i=1}^{m}A_i^2\right)\varepsilon+o(\varepsilon).$$

假设

$$\sum_{i=1}^{m}A_i^2\neq 0,$$

那么当 $\varepsilon$ 充分小时，$f(a\pm h)-f(a)$的符号由其主部

$$\pm\left(\sum_{i=1}^{m}A_i^2\right)\varepsilon$$

决定，于是

$$f(a+h)>f(a),\qquad f(a-h)<f(a),$$

——这说明函数 $f$ 不可能在点 $a$ 取得极值.

通过以上的讨论，我们得到了函数 $f$ 在点 $a$ 取得极值的必

要条件：

**定理 1** 设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近有定义并在这点可微. 如果 $f$ 在点 $a$ 取得极值, 那么它在这点的各偏导数均为 0：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

**注记** 设函数 $f$ 在点 $a$ 可微. 如果 $f$ 在这点的各偏导数都等于 0，那么我们就说点 $a$ 是函数 $f$ 的临界点. 于是，函数 $f$ 在点 $a$ 取得极值的必要条件可以陈述为：点 $a$ 是函数 $f$ 的临界点.

现在，设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近至少是二阶连续可微的，并设 $a$ 是函数 $f$ 的临界点：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0, \quad i=1,\cdots,m.$$

在这前提下，我们来探讨能保证函数 $f$ 在点 $a$ 取得极值的充分条件. 为此，利用带小 $o$ 余项的泰勒公式，在点 $a$ 把函数 $f$ 展开到二阶项：

$$\begin{aligned}
&f(a+h)-f(a)\\
&=\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(a)+o(\|h\|^2)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j+o(\|h\|^2)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}h_ih_j+o(\|h\|^2).
\end{aligned}$$

在这里，我们记

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a), \quad i,j=1,\cdots,m.$$

为了判别 $f(a+h)-f(a)$ 的符号，我们要用到代数中关于二次型的一些结果（对二次型的一般理论不够熟悉的读者，可

以限于考虑 $m=2$ 的情形. 这情形所涉及的二次型就是两个变元的二次三项式. 有关的结果都可以用配平方的办法简单地加以证明).

**定义** 设实数 $c_{ij}$ 满足条件

$$c_{ij}=c_{ji}, \quad i,j=1,\cdots,m.$$

我们把 $m$ 个变元 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 的二次齐次多项式

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\xi_i\xi_j$$

叫做二次型. 如果对任何

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)\in \mathbb{R}^m\setminus\{0\}$$

都有

$$Q(\xi)>0, \quad (<)$$

那么我们就说二次型 $Q(\xi)$ 是正定的（负定的）.

一个二次型

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\xi_i\xi_j$$

完全决定于它的系数方阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

$$(c_{ij}=c_{ji}, \quad i,j=1,\cdots,m),$$

如果二次型 $Q(\xi)$ 是正定的（负定的），那么我们就说它的系数方阵 $C$ 是正定的（负定的）.

关于二次型 $Q(\xi)$ （或它的系数方阵 $C$）的正定性, 有以下判别准则

**塞尔维斯特 (Sylverster) 定理** 二次型

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}\xi_i\xi_j \quad (c_{ij}=c_{ji}, \quad i,j=1,\cdots,m)$$

为正定的充分必要条件是：它的系数方阵 $C$ 的所有的顺序主子式都大于 0，即

$$c_{11}>0,\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}>0.$$

**注记** 对于 $m=2$ 的情形，这定理可以简单地证明如下：考察二次型

$$Q(\xi)=c_{11}\xi_1^2+2c_{12}\xi_1\xi_2+c_{22}\xi_2^2.$$

取 $\xi'=(1,0)$，就得到

$$Q(\xi')=c_{11}.$$

因此 $Q(\xi)$为正定的一个必要条件是 $c_{11}>0$．在这条件下，

$$Q(\xi)=c_{11}\left[\xi_1^2+2\frac{c_{12}}{c_{11}}\xi_1\xi_2+\left(\frac{c_{12}}{c_{11}}\xi_2\right)^2\right]$$

$$+\left(c_{22}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\xi_2^2$$

$$=c_{11}\left(\xi_1+\frac{c_{12}}{c_{11}}\xi_2\right)^2+\frac{c_{11}c_{22}-c_{12}^2}{c_{11}}\xi_2^2.$$

由此可以看出，要使 $Q(\xi)$ 对一切 $\xi\neq0$ 都取正值，必须

$$c_{11}>0,\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}=c_{11}c_{22}-c_{12}^2>0.$$

至于条件的充分性，也同样可从 $Q(\xi)$ 配平方后的表示式看出．

**推论** 二次型

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m}c_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$(c_{ij}=c_{ji},\qquad i,j=1,\cdots,m)$$

为负定的充分必要条件是

$$(-1)c_{11}>0, \qquad (-1)^2\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}>0, \cdots,$$

$$(-1)^m\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}>0.$$

**引理** 设二次型 $Q(\xi)$ 是正定的，那么存在常数 $\sigma>0$，使得

$$Q(\xi)\geqslant\sigma\|\xi\|^2, \qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^m.$$

**证明** 我们把$\mathbf{R}^m$ 中的全体单位向量的集合称为单位球面，并把它记为

$$S=\{\xi\in\mathbf{R}^m \mid \|\xi\|=1\}.$$

容易看出：$S$ 是$\mathbf{R}^m$ 中的有界闭集. 连续函数 $Q(\xi)$ 在 $S$ 上取得最小值$\sigma$. 这就是说，存在 $\zeta\in S$，使得

$$Q(\zeta)=\inf_{\xi\in S}Q(\xi)=\sigma.$$

因为 $Q(\xi)$ 是正定的， $\zeta\neq0$，所以

$$\sigma=Q(\zeta)>0.$$

对于任何不等于 0 的 $\xi\in\mathbf{R}^m$，我们有

$$\frac{\xi}{\|\xi\|}\in S.$$

因而

$$Q\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\geqslant\sigma.$$

即

$$\frac{1}{\|\xi\|^2}Q(\xi)\geqslant\sigma,$$

$$Q(\xi)\geqslant\sigma\|\xi\|^2.$$

上式对于 $\xi=0$ 显然也成立. 这样，我们证明了：

$$Q(\xi)\geqslant\sigma\|\xi\|^2,\qquad \forall\xi\in\mathbf{R}^m.\qquad\square$$

设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近至少是二阶连续可微的．考察由 $f$ 在点 $a$ 的二阶偏导数组成的方阵

$$H_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{m\times m}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_m}(a)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_m}(a)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a)\end{pmatrix}.$$

我们把 $H_f(a)$ 叫做函数 $f$ 在点 $a$ 的海赛（Hasse）方阵．

**定理 2** 设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 邻近至少是二阶连续可微的， $a$ 是 $f$ 的一个临界点。如果函数 $f$ 在点 $a$ 的海赛方阵 $H_f(a)$ 是正定的（负定的），那么函数 $f$ 在点 $a$ 取得严格极小值（严格极大值）．

**证明** 设 $a$ 是 $f$ 的临界点，$H_f(a)$ 是正定的．为书写简便，我们记

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a),\quad i,j=1,\cdots,m.$$

因为二次型

$$\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}h_ih_j$$

是正定的，所以存在 $\sigma>0$，使得

$$\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}h_ih_j\geqslant\sigma\|h\|^2,\quad\forall h\in\mathbf{R}^m.$$

利用带小 $o$ 余项的泰勒公式，我们得到

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}h_ih_j+o(\|h\|^2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sigma\ \|h\|^2+o(\|h\|^2)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sigma+o(1)\right)\|h\|^2.$$

于是，存在 $\delta>0$，使得只要

$$0<\|h\|<\delta,$$

就有

$$f(a+h)-f(a)\geqslant\left(\frac{1}{2}\sigma+o(1)\right)\|h\|^2$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\sigma\|h\|^2>0.$$

这证明了函数 $f$ 在点 $a$ 取得严格极小值.

类似地可以证明：如果 $a$ 是 $f$ 的临界点，$H_f(a)$ 是负定的，那么函数 $f$ 在点 $a$ 取得严格极大值. □

**注记** 设 $a$ 是函数 $f$ 的临界点，

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a),\qquad i,j=1,\cdots,m,$$

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\xi_i\xi_j.$$

如果 $Q(\xi)$ 是不定的（变号的），即存在 $\xi',\xi''\in\mathbb{R}^m$，使得

$$Q(\xi')<0<Q(\xi''),$$

那么对充分小的 $\varepsilon>0$就有

$$f(a+\varepsilon\xi')-f(a)=\frac{1}{2}Q(\xi')\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)<0,$$

$$f(a+\varepsilon\xi'')-f(a)=\frac{1}{2}Q(\xi'')\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)>0.$$

因而，对这种情形，函数 $f$ 在点 $a$ 不取得极值.

## 10.b 条件极值与拉格朗日乘数法

在求极值的实际问题中，对于所考察的某个函数，我们希望它所取的值尽可能大（或者尽可能小），以期达到最好的效益。这种能反映我们所企求的效益的函数，被称为目标函数。

在某些实际问题中，考察这样的目标函数

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_{m+p}), \tag{10.1}$$

它的变元必须满足一定的约束条件

$$\begin{cases} g_1(x)=g_1(x_1,\cdots,x_{m+p})=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_p(x)=g_p(x_1,\cdots,x_{m+p})=0. \end{cases} \tag{10.2}$$

我们需要寻求目标函数(10.1)在条件(10.2)的约束下的极值. 这样的极值被称为条件极值（或约束极值，限制极值）. 为了强调与这情形的区别，上段中讨论的不附加约束条件的普通极值，有时也被称为无条件极值.

在下面的讨论中，假定(10.1)和(10.2)中的各函数都连续可微足够多次，并且还假定(10.2)中的各函数（在所涉及的范围内）满足以下的正则条件：

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m+p}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_{m+p}} \end{pmatrix}=p. \tag{10.3}$$

在这里，记号 rank 表示矩阵的秩. 作了这些基本假设之后，我们来探索目标函数(10.1)在方程组(10.2)约束下的极值.

鉴于条件(10.3)，必要时适当改变编号，可以假定在所涉及的点邻近有

$$\frac{\partial(g_1,\cdots,g_p)}{\partial(x_{m+1},\cdots,x_{m+p})}\neq 0. \tag{10.4}$$

于是，在这点邻近，可以从(10.2)中解出

$$(10.5)\qquad \begin{cases} x_{m+1}=\psi_1(x_1,\cdots,x_m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m+p}=\psi_p(x_1,\cdots,x_m). \end{cases}$$

把(10.5)代入(10.1)，得到这样一个函数

$$(10.6)\qquad \varphi(x_1,\cdots,x_m)$$
$$=f(x_1,\cdots,x_m,\psi_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,\psi_p(x_1,\cdots,x_m)).$$

于是，所讨论的条件极值问题就化成了求目标函数(10.6)的无条件极值的问题.

以上做法虽然从原则上看来行得通，却很少用来解实际问题. 因为一般说来，要从方程组(10.2)中解出(10.5)那样的显式表示，绝不是一件容易的事.

处理条件极值问题的一个巧妙的办法，是拉格朗日提出的待定乘数法. 其基本手续如下：首先，定义一个含有 $p$ 个待定乘数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 的辅助函数

$$F(x_1,\cdots,x_{m+p},\ \lambda_1,\cdots,\lambda_p)$$
$$=f(x_1,\cdots,x_{m+p})+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r g_r(x_1,\cdots,x_{m+p});$$

然后，证明目标函数(10.1)在条件(10.2)约束下的极值点，都是这辅助函数的临界点.

**定理 3** 如果目标函数(10.1)，在条件(10.2)约束下，在点 $a=(a_1,\cdots,a_{m+p})$ 达到极值，那么存在 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$，使得 $(a,\lambda)$ 是辅助函数

$$(10.7)\qquad F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r g_r(x)$$

的临界点。这就是说，$a$ 和 $\lambda$ 应满足方程组

$$(10.8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\displaystyle\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\dfrac{\partial g_r}{\partial x_k}(a)=0, \qquad k=1,\cdots,m+p; \\ g_r(a)=0, \quad r=1,\cdots,p. \end{cases}$$

**证明** 如前所述，所讨论的条件极值问题，等价于函数(10.6)的无条件极值问题. 因而，在点$(a_1,\cdots,a_m)$处应有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\cdots,m,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\cdots,m. \tag{10.9}$$

这里出现的$\frac{\partial f}{\partial x_i}$和$\frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}$均在$(a_1,\cdots,a_{m+p})$处计值，而$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}$在$(a_1,\cdots,a_m)$处计值，$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,p$. 我们约定，以下遇到类似的情形，也照这样去理解. 想要避免计算隐函数偏导数的麻烦，我们设法消去(10,9)式中所含的$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}$. 为此，将利用以下一些恒等式关系：

$$g_r(x_1,\cdots,x_m,\psi_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,\psi_p(x_1,\cdots,x_m))=0,$$
$$r=1,2,\cdots,p.$$

这些恒等式两边对 $x_i(i=1,\cdots,m)$求偏导数得到

$$\frac{\partial g_r}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial g_r}{\partial x_{m+j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}=0,\quad r=1,2,\cdots,p. \tag{10.10}$$

将(10.10)中的各式分别乘以待定乘数$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$，然后加到(10.9)式上去，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial x_{m+j}}\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}=0, \tag{10.11}$$
$$i=1,2,\cdots,m.$$

因为

$$\frac{\partial(g_1,\cdots,g_p)}{\partial(x_{m+1},\cdots,x_{m+p})}(a)\neq0\quad(a=(a_1,\cdots,a_{m+p})),$$

我们可以选择 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$，使得

$$(10.12)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_{m+j}}(a)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial x_{m+j}}(a)=0,$$

$$j=1,\cdots,p.$$

对于这样选择的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$，从(10.11)式又可得到

$$(10.13)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(a)=0,$$

$$i=1,2,\cdots,m.$$

综合(10.12)和(10.13)，我们得到约束极值的必要条件：存在 $\lambda\in\mathbb{R}^p$，使得 $(a,\lambda)$ 适合方程组

(10.14)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\displaystyle\sum_{r=1}^{p}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial x_k}(a)=0,\\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,m+p;\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_r}(a,\lambda)=g_r(a)=0,\\ \qquad\qquad r=1,2,\cdots,p.\end{cases}$$

□

下面讨论约束极值的充分条件．为了叙述方便，我们把满足条件(10.2)的点 $x$ 的集合记为 $M$．设点 $a$ 满足定理 3 中所陈述的必要条件．对于 $M$ 上邻近于 $a$ 的点 $x$，我们记

$$h=x-a.$$

于是有

(10.15)

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^{m+p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m+p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}(a)h_kh_l+o(\|h\|^2).$$

但在这里，由于展式的一阶项不一定为 0，还不能利用二阶项来判别极值是否存在．为了便于讨论，我们又设法从(10.15)式中消去一阶项．对于 $a\in M,a+h\in M$，应有

$$0=g_r(a+h)-g_r(a),\qquad r=1,\cdots,p.$$

用带小 $o$ 余项的泰勒公式，把上式右边的表示式展开，我们得到

$$(10.16)\qquad 0=\sum_{k=1}^{m+p}\frac{\partial g_r}{\partial x_k}(a)h_k+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m+p}\frac{\partial^2 g_r}{\partial x_k\partial x_l}(a)h_kh_l$$

$$+o(\|h\|^2),\qquad r=1,2,\cdots,p.$$

将(10.16)中的各式分别乘以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$，然后加到(10.15)式上去——这里设 $a$ 和 $\lambda$ 满足条件(10.8)．于是，我们得到

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m+p}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)h_kh_l+o(\|h\|^2).$$

利用这一表示式，通过考察二次型

$$\sum_{k,l=1}^{m+p}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)h_kh_l,$$

我们得到以下的关于约束极值的充分条件：

**定理 4** 设(10.1)和(10.2)中的各函数至少是二阶连续可微的，设 $a$ 和 $\lambda$ 满足必要条件(10.8)，并记

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{r=1}^{p}\lambda_rg_r(x).$$

如果方阵

$$(10.17)\qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}(a,\lambda)\right)_{k,l=1}^{m+p}$$

是正定的（负定的），那么目标函数(10.1)在条件(10.2)的约束下，于 $a$ 点取得严格的极小值（严格的极大值）．

**注记** 在上面的定理中，没有涉及这样的情形：$(a,\lambda)$ 是辅助函数 $F(x,\lambda)$ 的临界点，但在这点方阵(10.17)是不定的．请注意，对这情形，我们不能得出“$f$ 不取得条件极值”的一般性结论．这可从下面的例子看出．

**例 1** 考察目标函数

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$$

和约束条件

$$g(x,y,z)=z=0.$$

我们作出辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$
$$=x^2+y^2-z^2+\lambda z.$$

显然$(x,y,z,\lambda)=(0,0,0,0)$是辅助函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 的临界点。在这点有

$$\begin{bmatrix} F_{x^2} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{y^2} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{z^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

显然这方阵是不定的. 但容易看出：目标函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$，在条件 $g(x,y,z)=z=0$ 的约束之下，在点 $(x,y,z)=(0,0,0)$取得约束极小值.

## 10.c 求极值的例子

**例 2** 在周长等于给定常数 $2p$ 的三角形当中，什么样的三角形面积最大?

**解** 用 $x,y,z$ 分别表示三角形三边的边长. 根据海伦公式，三角形的面积可以表示为

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

考察目标函数

$$f(x,y,z)=(p-x)(p-y)(p-z)$$

和约束条件

$$g(x,y,z)=x+y+z-2p=0.$$

我们来求 $f$ 在条件 $g=0$ 约束下的最大值. 在这里，很容易从约束条件中解出

$$z=2p-x-y.$$

于是，问题转化为求以下函数的普通最大值：

$$\varphi(x,y)=(p-x)(p-y)(x+y-p).$$

计算这函数的导数得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=(p-y)(2p-2x-y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=(p-x)(2p-x-2y).$$

考察以下集合（见图12-3）

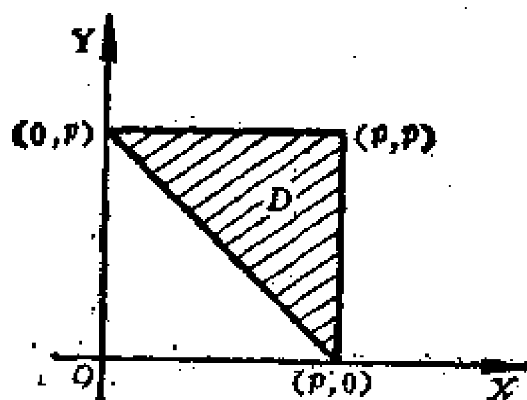



图 12-3

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x,y<p,x+y>p\}.$$

函数$\varphi$在有界闭集$\overline{D}$连续，因而它在$\overline{D}$上一定取得最大值．但在$\overline{D}$的边界上，函数$\varphi$的值总是0，所以这最大值一定在$D$内取得．函数$\varphi$在$D$内仅有的临界点为

$$\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right).$$

我们断定：当$x=y=\frac{2}{3}p$时，函数$\varphi$取得它在$\overline{D}$上的最大值．这就是说：在周长等于给定常数$2p$的三角形当中，等边三角形具有最大的面积

$$S=\frac{\sqrt{3}}{9}p^2.$$

**例3** 总和等于常数$C(C>0)$的$n$个非负实数，它们的乘积$P$最大为多少？

**解** 这里的目标函数为

$$P(x)=x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n,$$

约束条件为

$$Q(x)=x_1+x_2+\cdots+x_n-C=0.$$

从约束条件容易解出

$$x_n=C-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}.$$

于是问题转化为求以下函数的普通最大值：

$$\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$$
$$=x_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}(C-x_1-\cdots-x_{n-1}).$$

与上一例题的情形类似，很容易求得，当

$$x_1=\cdots=x_{n-1}=\frac{C}{n}$$

的时候，函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$取得最大值．这就是说，当

$$x_1=\cdots=x_{n-1}=x_n=\frac{C}{n}$$

的时候，目标函数 $P(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$ 在约束条件下取得最大值

$$P_{max}=\left(\frac{C}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

也可以用拉格朗日待定乘数法来解这道题．我们写出辅助函数

$$F(x,\lambda)=P(x)+\lambda Q(x).$$

然后考察以下方程组（记号 $\hat{x}_i$ 表示把 $x_i$ 这个因子换成数 1）：

$$(10.18)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=x_1\cdots\hat{x}_i\cdots x_n+\lambda=0, & i=1,2,\cdots,n,\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+\cdots+x_n-C=0.\end{cases}$$

如果某一个因数 $x_i=0$，那么乘积 $P(x)=0$．这显然不是最大值．因此，我们可以只限于考察 $x_1>0,\cdots,x_n>0$ 的情形．对这

情形，从方程组(10.18)可以解出

$$x_1=\cdots=x_n=\frac{C}{n}.$$

于是，在所述的条件约束之下，目标函数 $P$ 的最大值是

$$P_{\max}=\left(\frac{C}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

不论用那一种方法，我们都得到了算术平均与几何平均不等式的新的证明.

**例 4** 设有对称方阵

$$(10.19)\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}=a_{ji},\qquad i,j=1,\cdots,n.$$

我们来求二次型

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

在单位球面

$$S:\quad g(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1=0$$

之上的最大值和最小值. 为此，引入辅助函数

$$F(x,\lambda)=f(x)-\lambda g(x).$$

(这里，为了讨论方便，我们把待定乘数写成 $-\lambda$.) 考察方程组

$$(10.20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-\lambda x_i=0, & i=1,2,\cdots,n, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\right)=0. \end{cases}$$

我们看到，在单位球面上，使得 $f$ 取得最大值和最小值的点，

都应该是对称方阵 $A$ 的特征向量，而相应的乘数则是 $A$ 的特征值．将方程组(10.20)的前 $n$ 个方程依次乘以 $x_1,\cdots,x_n$，然后相加．再利用(10.20)中的最后一个方程，我们得到

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j=\lambda.$$

这就是说，二次型

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

在单位球面上的最大值和最小值，分别等于对称方阵 $A=(a_{ij})$的最大和最小的特征根．

# 第十三章　重　积　分

在第六章和第九章中，我们已经熟悉了一元函数的定积分．本章将进一步讨论多元函数的积分——重积分．

引出重积分概念的实际问题与引出定积分的情形十分相象．

**例1**　设 $Q=[a,b]\times[c,d]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个矩形，$z=f(x,y)$ 是在 $Q$ 上有定义并且连续的一个函数．我们来计算以 $Q$ 为底，以曲面 $z=f(x,y)((x,y)\in Q)$ 为顶的曲顶柱体的体积 $V$．为此，我们作矩形 $Q$ 的分割

$$P:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_r=b,$$
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_s=d.$$

这分割 $P$ 把 $Q$ 分成 $r\times s$ 个小矩形

$$Q_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],$$
$$i=1,\cdots,r,\quad j=1,\cdots,s.$$

在每一小矩形中取一点

$$(\xi_{ij},\eta_{ij})\in Q_{ij}$$
$$i=1,\cdots,r,\qquad j=1,\cdots,s.$$

然后作和数

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$
$$(\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad \Delta y_j=y_j-y_{j-1}).$$

这和数可以看作是体积 $V$ 的近似值（图13-1）．分割越细，近似值的精确度也就越高．当所分各小矩形的最大边长趋于0时（也就是各小矩形的直径趋于0时），上述和数的极限就应该是所求的体积

$$V=\lim\sum_i\sum_j f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

这里出现的和数的极限就是二重积分，我们将用以下记号来表示：

$$\iint_{Q} f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

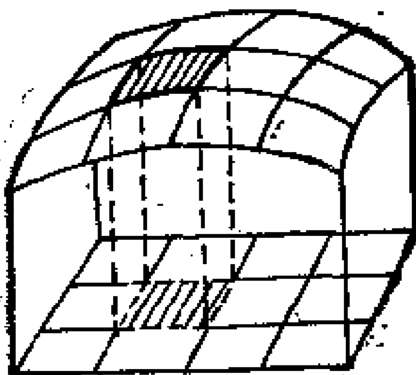


图 13-1

在第六章和第九章中，所讨论的定积分都是展布于闭区间之上的．对于一元的实际问题来说，这基本上够用了．多元的情形却不那么简单．实际问题所涉及的重积分，展布的范围可以是各种各样的．

**例2** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一块可求面积的闭区域，$z=f(x,y)$ 是在 $D$ 上有定义并且连续的一个函数，我们希望计算以 $D$ 为底，以曲面 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$ 为顶的曲顶柱体的体积（图 13-2）．仿照例1中的手续，我们先把 $D$ 分成若干个可求面积的小块

$$D_1,\cdots,D_q \quad (\text{小块 } D_k \text{ 的面积记为 } \Delta\sigma_k),$$

在每一小块中取一点

$$(\xi_k,\eta_k)\in D_k,\ k=1,\cdots,q,$$

然后作和数

$$\sum_{k=1}^{q} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k.$$

这样的和数可以看作所求体积的近似值．让分割各小块的直径趋

于 0，上述和数的极限就是所求的体积．这样的极限就是展布于闭区域 $D$ 上的二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

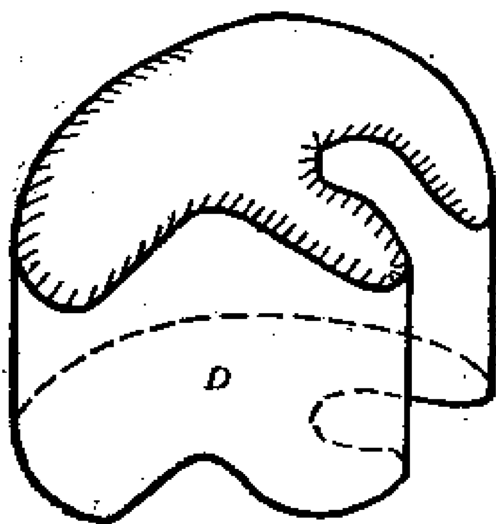



图 13-2

下面，将对 $m$ 元函数的一般情形，展开有关重积分的讨论．将会遇到的主要困难是：纷繁的符号与形式的推演有可能妨碍我们对问题实质的理解．为了顺利地克服这一困难，需要随时将抽象的符号与较低维空间（2 维或 3 维空间）的几何形象联系起来．我们这里再一次强调指出：较低维空间中的几何直观与类比，是帮助人们理解高维空间的向导．

## §1　闭方块上的积分——定义与性质

空间 $\mathbb{R}^m$ 中的闭方块是指以下形状的点集：

$$Q=Q^1\times\cdots\times Q^m,$$

$$Q^i=[a^i,b^i],\quad i=1,\cdots,m.$$

我们把 $Q^1,\cdots,Q^m$ 叫做 $Q$ 的棱，把各棱长度的乘积

$$(b^1-a^1)\times\cdots\times(b^m-a^m)$$

叫做 $Q$ 的体积（或容量）并约定用记号

$$\mathrm{Vol}(Q)$$

来表示：

$$\mathrm{Vol}(Q)=(b^1-a^1)\times\cdots\times(b^m-a^m).$$

与此类似，我们把以下形状的点集叫做 $\mathbb{R}^m$ 中的开方块：

$$G=G^1\times\cdots\times G^m,$$

$$G^i=(a^i,b^i),\quad i=1,\cdots,m,$$

并把这开方块的体积（容量）定义为

$$\mathrm{Vol}(G)=(b^1-a^1)\times\cdots\times(b^m-a^m).$$

考察闭方块

$$Q=Q^1\times\cdots\times Q^m,$$

$$Q^i=[a^i,b^i],\quad i=1,\cdots,m.$$

如果给 $Q$ 的每一条棱 $Q^i$ 一个分割

$$P^i:\ a^i=x_0^i<x_1^i<\cdots<x_{N_i}^i=b^i,$$

$$i=1,\cdots,m,$$

那么我们就得到 $Q$的一个分割

$$P=\{P^1,\cdots,P^m\}.$$

设 $x_{j_i}^i$ 是棱 $Q^i$ 上的一个分点，我们把集合

$$L_{j_i}^i=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\in Q\,|\,x^i=x_{j_i}^i\}$$

叫做分割 $P$ 的一个分界. 通过对维数较低（$m=2$或 3 ）的例子的考察，读者容易了解分界的几何形象（图13-3）.

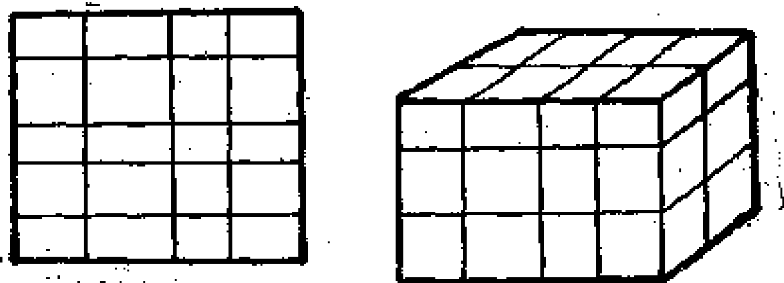


图 13-3

分割 $P$ 的各分界

$$L^i_{j_i},\quad j_i=0,\cdots,N_i,\quad i=1,\cdots,m.$$

将 $Q$ 分成了 $N_1\times N_2\times\cdots\times N_m$ 个闭子方块

$$Q_J=Q^1_{j_1}\times\cdots\times Q^m_{j_m}$$

这里

$$J=(j_1,\cdots,j_m),$$
$$Q^i_{j_i}=[x^i_{j_i-1},x^i_{j_i}],$$
$$1\leqslant j_i\leqslant N_i,\quad i=1,\cdots,m.$$

我们约定记

$$\begin{aligned}\Delta x_J&=\Delta x^1_{j_1}\times\cdots\times\Delta x^m_{j_m}\\&=(x^1_{j_1}-x^1_{j_1-1})\times\cdots\times(x^m_{j_m}-x^m_{j_m-1}).\end{aligned}$$

显然 $\Delta x_J$ 正好是闭子方块 $Q_J$ 的体积：

$$\Delta x_J=\mathrm{Vol}(Q_J).$$

对于所给的分割，我们还约定记

$$|P^i|=\max_{1\leqslant j_i\leqslant N_i}\{\Delta x^i_{j_i}\},$$
$$\begin{aligned}|P|&=\max\{|P^1|,\cdots,|P^m|\}\\&=\max_{\substack{1\leqslant j_i\leqslant N_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\{\Delta x^i_{j_i}\}.\end{aligned}$$

$|P|$被称为分割 $P$ 的模，它是所分成各闭子方块的棱长的最大值.

在分割 $P$ 将 $Q$ 分成的每一闭子方块 $Q_J$ 上任意选取一点

$$\xi_J\in Q_J,$$

我们把这样的 $N_1\times\cdots\times N_m$ 个点

$$\{\xi_J\}$$

叫做相对于分割 $P$ 的一组标志点（或代表点），并约定用单独一个字母 $\xi$ 来表示：

$$\xi=\{\xi_J\}.$$

在作了上面的准备之后，我们来讨论 $m$ 元函数的积分和.

设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块，$f$ 是在 $Q$ 上有定义的一个

（$m$ 元）数值函数，$P$ 是 $Q$ 的任意一个分割，$\xi=\{\xi_J\}$ 是对于分割 $P$ 的一组标志点．我们把和数

$$(1.1)\qquad \sigma(f,P,\xi)=\sum_J f(\xi_J)\Delta x_J$$

叫做函数 $f$ 相应于分割 $P$ 和标志点组 $\xi$ 的一个积分和（或黎曼和）．这里的求和号

$$\sum_J$$

表示对一切可能的$J=(j_1,\cdots,j_m)$ 求和（总共有 $N_1\times\cdots\times N_m$ 个加项）．

**例** 我们来看 $m=2$ 的情形．设

$$Q=[a,b]\times[c,d]$$

是一个 2 维闭方块，$f(x,y)$ 是在 $Q$ 上有定义的一个数值函数，$P$ 是 $Q$的一个分割：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_r=b,$$
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_s=d,$$

而

$$\{\xi,\eta\}=\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$$

是相对于分割 $P$ 的一组标志点，则有

$$\sigma(f,P,\{\xi,\eta\})=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

我们用 $\varepsilon$-$\delta$ 方式叙述 $m$ 重积分的定义如下：

**定义 1** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块，$f$ 是在 $Q$ 上有定义的一个（$m$ 元）数值函数，$I$ 是一个实数．如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 $Q$ 的分割 $P$ 满足条件

$$|P|<\delta,$$

不论对这分割的标志点组 $\xi$ 怎样选择，总有

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon,$$

那么我们就说函数 $f$ 在闭方块 $Q$ 上可积，并把 $I$ 叫做 $f$ 在

$Q$ 上的积分，记为

$$\int_Q \cdots \int f(x^1, \cdots, x^m) \mathrm{d}(x^1, \cdots, x^m) = I.$$

请注意，对于展布于 $m$ 维闭方块 $Q$ 上的积分，我们约定写 $m$ 层积分号，并把这样的积分叫做 $m$ 重积分．但为了书写省事，在不致于混淆的情形，也可以只写一层积分号．例如，上面定义中的积分可以简单地写成

$$\int_Q f(x^1, \cdots x^m) \mathrm{d}(x^1, \cdots, x^m)$$

或者

$$\int_Q f(x) \mathrm{d}x.$$

我们可以把定义 1 简单地表述为：

$$\int_Q f(x) \mathrm{d}x = \lim_{|P| \to 0} \sum_J f(\xi_J) \Delta x_J.$$

多重积分有许多性质与定积分（即单重积分）完全类似．我们只陈述有关结果，请读者仿照单重积分的情形写出证明．

首先，我们指出函数可积的一个必要条件：

**引理** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块．如果 $m$ 元数值函数 $f$ 在 $Q$ 上可积，那么 $f$ 在 $Q$ 上有界．

多重积分与单重积分一样，也具有线性和单调性等性质（可加性将在后面讨论）．

**定理 1**（线性） 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块．如果 $m$ 元函数 $f$ 和 $g$ 都在 $Q$ 上可积，$\lambda \in \mathbb{R}$，那么函数 $f+g$ 和 $\lambda f$ 也都在 $Q$ 上可积，并且

$$\int_Q (f(x) + g(x)) \mathrm{d}x = \int_Q f(x) \mathrm{d}x + \int_Q g(x) \mathrm{d}x,$$

$$\int_Q \lambda f(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_Q f(x) \mathrm{d}x,$$

**定理 2**（单调性） 设 $Q$ 是$\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块．如果$m$元函数 $f$ 和 $g$ 都在 $Q$ 上可积，并且满足条件

$$f(x)\leqslant g(x),\qquad \forall x\in Q,$$

那么

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_Q g(x)\mathrm{d}x.$$

**定理 3**（积分中值定理） 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭方块，$f$ 是在 $Q$ 上可积的 $m$ 元函数（于是 $f$ 在 $Q$ 上有界）．如果

$$\mu\leqslant f(x)\leqslant M,\qquad \forall x\in Q,$$

那么

$$\mu\mathrm{Vol}(Q)\leqslant\int_Q f(x)\mathrm{d}x\leqslant M\mathrm{Vol}(Q).$$

在下一节里，我们将证明，如果 $f$ 在 $Q$ 上连续，那么 $f$ 必在 $Q$ 上可积．对这种情形，可以断定：存在 $c\in Q$，使得

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x=f(c)\cdot\mathrm{Vol}(Q).$$

## §2 可积条件

在本节中，我们约定用字母 $Q$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中这样一个闭方块：

$$Q=Q^1\times\cdots\times Q^m,$$
$$Q^i=[a^i,b^i],\qquad i=1,\cdots,m.$$

假设函数 $f$ 在闭方块 $Q$ 上有定义并且有界，我们来考察重积分 $\int_Q f(x)\mathrm{d}x$存在的条件．这里的讨论，与第九章中对定积分所做过的十分类似．大部分细节的验证都将留给读者作为练习．

设 $P$ 是 $Q$ 的一个分割，它将 $Q$ 分成这样一些闭子方块：

$$Q_J=Q^1_{j_1}\times\cdots\times Q^m_{j_m},\quad J=(j_1,\cdots,j_m),$$

$$\begin{cases} Q_{j_i}^i=[x_{j_i-1}^i,x_{j_i}^i],\ 1\leqslant j_i\leqslant N_i, \\ a^i=x_0^i<x_1^i<\cdots<x_{N_i}^i=b^i, \\ i=1,\cdots,m. \end{cases}$$

我们引入记号

$$\mu_j=\inf_{x\in Q_j} f(x),\qquad M_j=\sup_{x\in Q_j} f(x),$$

$$\omega_j=M_j-\mu_j,$$

并约定记

$$\mu=\inf_{x\in Q} f(x),\ \ M=\sup_{x\in Q} f(x),$$

$$\omega=M-\mu.$$

我们来考察和数

$$L(f,P)=\sum_j \mu_j\Delta x_j,$$

$$U(f,P)=\sum_j M_j\Delta x_j.$$

这样的和数 $L(f,P)$ 与 $U(f,P)$ 分别被称为函数 $f$ 关于分割 $P$ 的下和与上和．显然有

$$L(f,P)\leqslant\sigma(f,P,\xi)\leqslant U(f,P).$$

还容易看出，对于给定的分割 $P$，有以下关系：

$$\inf_\xi \sigma(f,P,\xi)=L(f,P),$$

$$\sup_\xi \sigma(f,P,\xi)=U(f,P).$$

**引理1**　如果给 $Q$ 的分割 $P$ 添加一个分界而得到分割 $P'$，那么

(1)　$L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+\omega C|P|$，

(2)　$U(f,P)\geqslant U(f,P')\geqslant U(f,P)-\omega C|P|$，

这里

$$C=\max\left\{\frac{\mathrm{Vol}(Q)}{b^1-a^1},\cdots,\frac{\mathrm{Vol}(Q)}{b^m-a^m}\right\}.$$

**证明** 设分割 $P'$ 是由分割 $P$ 添加这样一个分界而得到的：

$$\{x=(x^1,\cdots,x^n)\in Q \mid x^k=\gamma\}.$$

为明确起见，不妨设

$$x^k_{k-1}<\gamma<x^k_k.$$

我们把下和 $L(f,P)$ 拆成两部分

$$L(f,P)=\sum_{J:j_k\neq k}\mu_J\Delta x_J+\sum_{J:j_k=k}\mu_J\Delta x_J.$$

前一部分中的各项与 $L(f,P')$ 中的相应项相同．后一部分中的每一项

$$\mu_J\Delta x_J=\mu_J\left(\frac{x^k_k-\gamma+\gamma-x^k_{k-1}}{\Delta x^k_k}\right)\Delta x_J,$$

在 $L(f,P')$ 中被代之以

$$\mu'_J\left(\frac{\gamma-x^k_{k-1}}{\Delta x^k_k}\right)\Delta x_J+\mu''_J\left(\frac{x^k_k-\gamma}{\Delta x^k_k}\right)\Delta x_J,$$

这里

$$\mu'_J=\inf_{x\in Q'_J}f(x),\qquad \mu''_J=\inf_{x\in Q''_J}f(x)$$

（$Q'_J$ 和 $Q''_J$ 是 $Q_J$ 被 $x^k=\gamma$ 分成的两个闭子方块）．于是

$$\begin{aligned}L(f,P')-L(f,P)&\\=\sum_{J:j_k=k}\Big[(\mu'_J-\mu_J)&\frac{\gamma-x^k_{k-1}}{\Delta x^k_k}\Delta x_J\\&+(\mu''_J-\mu_J)\frac{x^k_k-\gamma}{\Delta x^k_k}\Delta x_J\Big].\end{aligned}$$

但显然有

$$\mu_J\leqslant\begin{matrix}\mu'_J\\ \\ \mu''_J\end{matrix}\leqslant M_J.$$

所以

$$0\leqslant L(f,P')-L(f,P)$$

$$\leqslant \sum_{J:j_k=k}(M_J-\mu_J)\Delta x_J$$

$$\leqslant \omega \sum_{J:j_k=k}\Delta x_J$$

$$=\omega \frac{\Delta x_k^k}{b^k-a^k}\mathrm{Vol}(Q)$$

$$\leqslant \omega C|P|.$$

这证明了结论（1）：

$$L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+\omega C|P|.$$

至于结论（2），我们可以用类似的办法来证明．更简单的做法是：利用关系式

$$U(f,P)=-L(-f,P),$$

从结论（1）推出结论（2）． □

**推论** 如果给 $Q$ 的分割 $P$ 添加 $l$ 个分界而得到 $P'$，那么

(1) $L(f,P)\leqslant L(f,P')\leqslant L(f,P)+l\omega C|P|$,

(2) $U(f,P)\geqslant U(f,P')\geqslant U(f,P)-l\omega C|P|$.

仿照第九章§1中的做法，从引理1出发，很容易证明以下的引理2和引理3．

**引理2** 设 $P_1$ 和 $P_2$ 是 $Q$ 的任意两个分割，则有

$$L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2).$$

我们约定记

$$\underline{\int_Q} f(x)\mathrm{d}x=\underline{I}=\sup_P L(f,P),$$

$$\overline{\int_Q} f(x)\mathrm{d}x=\overline{I}=\inf_P U(f,P),$$

并分别把它们叫做 $f$ 在 $Q$ 的下积分与上积分．

**引理3** 我们有

(1) $\lim\limits_{|P|\to 0} L(f,P)=\underline{I}$;

(2) $\lim\limits_{\|P\|\to 0} U(f,P)=\overline{I}$.

在作了以上准备之后，又可仿照第九章中的做法证明以下基本定理.

**定理1** 设 $Q$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个闭方块，$m$ 元函数 $f$ 在 $Q$ 上有定义并且有界，则以下三条件互相等价：

(1) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $Q$ 的一个分割 $P$，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

(2) 函数 $f$ 在 $Q$ 的下积分与上积分相等：

$$\underline{I}=\overline{I}=I,$$

(3) 函数 $f$ 在 $Q$ 可积，

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x=I.$$

下面，我们把定理1改写为更便于应用的形式. 为此，先介绍记号

$$\begin{aligned}\Omega(f,P)&=U(f,P)-L(f,P)\\&=\sum_j(M_j-\mu_j)\Delta x_j\\&=\sum_j\omega_j\Delta x_j.\end{aligned}$$

显然有

$$\lim_{\|P\|\to 0}\Omega(f,P)=\overline{I}-\underline{I}.$$

采用这样的记号，我们可以把定理1改写为：

**定理1′** 设 $Q$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个闭方块，$m$ 元函数 $f$ 在 $Q$ 有定义并且有界，则以下三条件互相等价：

(1) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $Q$ 的分割 $P$，使得

$$\Omega(f,P)<\varepsilon,$$

(2) $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\Omega(f,P)=0$,

(3) $f$ 在 $Q$ 可积.

仿照第九章§2中的做法，利用上面给出的可积性判别准则（定理 1 或定理1′），可以证明以下的定理 2 和定理 3.

**定理 2** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭方块 $Q$ 上可积，$\lambda$ 是实常数，则

(1) $f(x)+g(x)$ 在 $Q$ 可积，

(2) $\lambda f(x)$ 在 $Q$ 可积，

(3) $|f(x)|$ 在 $Q$ 可积，

(4) $f(x)g(x)$ 在 $Q$ 可积，

(5) 如果存在常数 $\delta>0$，使得

$$|f(x)|\geqslant\delta, \qquad \forall x\in Q,$$

那么函数 $\frac{1}{f(x)}$ 也在 $Q$ 上可积.

**定理 3** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭方块. 如果 $m$ 元函数 $f$ 在 $Q$ 连续，那么这函数在 $Q$ 可积.

以下定理将在后面几节的讨论中用到.

**定理 4** 设 $Q$ 和 $\tilde{Q}$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭方块，$Q\subset\tilde{Q}$，而 $f$: $Q\to\mathbb{R}$ 是一个函数. 如果把 $f$ 按以下方式扩充：

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{对于} x\in Q,\\ 0, & \text{对于} x\in\mathbb{R}^m\backslash Q,\end{cases}$$

那么 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{Q}$ 可积的充分必要条件是 $f$ 在 $Q$ 可积. 在这条件满足时，我们有

$$\int_{\tilde{Q}}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\int_Q f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** *必要性* 设 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{Q}$ 可积分，

$$\int_{\tilde{Q}}\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x=\tilde{I}$$

按照可积性的定义，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\tilde{Q}$ 的分割 $\tilde{P}$ 满足条件

$$|\tilde{P}|<\delta,$$

就有

$$|\sigma(\tilde{f},\tilde{P},\tilde{\xi})-\tilde{I}|<\varepsilon.$$

现在设 $Q$ 的分割 $P$ 满足条件

$$|P|<\delta,$$

并设 $\xi$ 是对这分割的任意一组标志点．我们总可以把 $P$ 扩充为闭方块 $\tilde{Q}$ 的一个分割 $\tilde{P}$，使得仍有

$$|\tilde{P}|<\delta,$$

并可把 $\xi$ 扩充为对于分割 $\tilde{P}$ 的标志点组 $\tilde{\xi}$．于是，我们有

$$|\sigma(f,P,\xi)-\tilde{I}|=|\sigma(\tilde{f},\tilde{P},\tilde{\xi})-\tilde{I}|<\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=\tilde{I},$$

即 $f$ 在 $Q$ 可积，并且

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x=\tilde{I}=\int_{\tilde{Q}}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x.$$

充分性　设 $f$ 在 $Q$ 可积．则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $Q$ 的分割 $P$，使得

$$\Omega(f,P)<\varepsilon.$$

不论用怎样的方式将 $Q$ 的分割 $P$ 扩充为 $\tilde{Q}$ 的分割 $\tilde{P}$，扩充后的分割 $\tilde{P}$ 都使得

$$\Omega(\tilde{f},\tilde{P})=\Omega(f,P)<\varepsilon.$$

这证明了 $\tilde{f}$ 在 $\tilde{Q}$ 上可积． □

## §3 重积分化为累次积分计算

在本节中，约定把 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的点表示为

$$(x,y)=(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p),$$

并把 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的闭方块 $Q$ 写成这样的形式：

$$Q=V\times W,$$

——这里的 $V$ 和 $W$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^p$ 中的闭方块．我们来考察以下三种不同形状的积分：

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y),$$

$$\int_V\left(\int_W f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

和

$$\int_W\left(\int_V f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

这里的后两种积分被称为迭积分或累次积分．我们将证明，在一定的条件下，例如当 $f$ 在 $Q$ 上连续时，以上三种形状的积分都存在并且彼此相等：

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_W f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_W\left(\int_V f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

利用这结果，我们可以把 $m$ 维闭方块上的积分，逐次化为单重积分来计算．

对于累次积分，人们还采用这样的记号：

$$\int_V\mathrm{d}x\int_W f(x,y)\ \mathrm{d}y=\int_V\left(\int_W f(x,y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int_W\mathrm{d}y\int_V f(x,y)\ \mathrm{d}x=\int_W\left(\int_V f(x,y)\ \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

在下面的定理中，我们设 $Q=V\times W$ 是 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的闭方块，并设 $n+p$ 元数值函数 $f(x,y)$ 在 $Q$ 可积（因而在 $Q$ 有界）．于是可以定义

$$g(x)=\underline{\int}_W f(x,y)\mathrm{d}y, \quad h(x)=\overline{\int}_W f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这里的$\underline{\int}_W f(x,y)\,\mathrm{d}y\left(\overline{\int}_W f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$表示：对于固定的$x$，把$f(x,y)$当做$y$的函数在闭方块$W$的下积分（上积分）．这里要提醒读者注意：下积分（上积分）对任何有界函数都可以定义．

**定理1** 如果$n+p$元函数$f(x,y)$在闭方块$Q$可积，那么$n$元函数$g(x)$和$h(x)$都在闭方块$V$可积，并且有

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V g(x)\,\mathrm{d}x=\int_V h(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 设$P_V$和$P_W$分别是闭方块$V$和$W$的分割，则

$$P=\{P_V,P_W\}$$

给出闭方块$Q$的一个分割．如果$P_V$将$V$分成闭子方块

$$V_J, \quad J=(j_1,\cdots,j_n),$$

而$P_W$将$W$分成闭子方块

$$W_K, \quad K=(k_1,\cdots,k_p),$$

那么$P=\{P_V,P_W\}$将$Q$分成闭子方块

$$Q_{(J,K)},=V_J\times W_K.$$

如果$\xi=\{\xi_J\}$和$\eta=\{\eta_K\}$分别是相对于分割$P_V$和分割$P_W$的标志点组，那么

$$(\xi,\eta)=\{(\xi_J,\eta_K)\}$$

就是相对于分割$P=\{P_V,P_W\}$的一个标志点组．

我们记

$$I=\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

则对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$|P|=\max\{|P_V|,|P_W|\}<\delta,$$

不论对分割 $P_V$ 和 $P_W$ 的标志点组 $\xi=\{\xi_J\}$ 和 $\eta=\{\eta_K\}$ 怎样选择，都有

$$I-e<\sigma(f,P,(\xi,\eta))<I+e,$$

也就是

$$(3.1)\qquad I-e<\sum_J\sum_K f(\xi_J,\eta_K)\Delta x_J\Delta y_K<I+e.$$

在 (3.1) 式中，让 $\eta_K$ 在 $W_K$ 中变动取下确界和上确界，就得到

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} I-e&\leqslant\sum_J\Big(\sum_K\inf_{\eta_K\in W_K}f(\xi_J,\eta_K)\Delta y_K\Big)\Delta x_J\\ &\leqslant\sum_J\Big(\sum_K\sup_{\eta_K\in W_K}f(\xi_J,\eta_K)\Delta y_K\Big)\Delta x_J\\ &\leqslant I+e. \end{aligned}$$

我们指出，

$$\sum_K\inf_{\eta_K\in W_K}f(\xi_J,\eta_K)\Delta y_K$$

是 $y$ 的函数$f(\xi_J,y)$ 的下和，它不超过这函数的下积分：

$$\begin{aligned}&\sum_K\inf_{\eta_K\in W_K}f(\xi_J,\eta_K)\Delta y_K\\ &\qquad\leqslant\underline{\int}_W f(\xi_J,y)\mathrm{d}y=g(\xi_J).\end{aligned}$$

同样道理，

$$\begin{aligned}&\sum_K\sup_{\eta_K\in W_K}f(\xi_J,\eta_K)\Delta y_K\\ &\qquad\geqslant\overline{\int}_W f(\xi_J,y)\mathrm{d}y=h(\xi_J),\end{aligned}$$

于是，从 (3.2) 式可以得到

$$I-\varepsilon\leqslant\sum_{I}g(\xi_I)\Delta x_I$$

$$\leqslant\sum_{I}h(\xi_I)\Delta x_I\leqslant I+\varepsilon.$$

我们证明了：

$$\lim_{|P_V|\to 0}\sum_{I}g(\xi_I)\Delta x_I$$

$$=\lim_{|P_V|\to 0}\sum_{I}h(\xi_I)\Delta x_I=I.$$

即函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在闭方块 $V$ 可积，并且

$$\int_V g(x)\mathrm{d}x=\int_V h(x)\mathrm{d}x=\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y).\qquad\square$$

**推论 1** 设 $f(x,y)$ 在 $Q=V\times W$ 可积．如果对每个 $x\in V$，$f(x,y)$ 作为 $y$ 的函数在 $W$ 可积，那么

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_W f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

如果对每个 $y\in W$，$f(x,y)$ 作为 $x$ 的函数在 $V$ 可积，那么

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_W\left(\int_V f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

特别重要的情形是：如果 $f(x,y)$ 在 $Q$ 连续，那么

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_W f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_W\left(\int_V f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

**推论 2** 设 $Q=[a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块，函数 $f(x)=f(x^1,\cdots,x^n)$ 在 $Q$ 连续，则有

$$\int_Q f(x^1,\cdots,x^n)\mathrm{d}(x^1,\cdots,x^n)$$

$$=\int_{a^1}^{b^1}\mathrm{d}x^1\cdots\int_{a^{m-1}}^{b^{m-1}}\mathrm{d}x^{m-1}\int_{a^m}^{b^m}f(x^1,\cdots,x^m)\mathrm{d}x^m.$$

在下面的讨论中，我们把 $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 中的点写成

$$(x,y)=(x^1,\cdots,x^n,y),$$

并把 $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 中的闭方块 $Q$ 写成

$$Q=V\times W,$$

这里

$$V=[a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n],$$

$$W=[A,B].$$

**引理** 设 $V$ 和 $W$ 如上面所述，而

$$\varphi,\psi:\ V\longrightarrow W\subset\mathbb{R}$$

是连续函数. 我们记

$$\Phi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}|x\in V,\ \ y=\varphi(x)\},$$

$$\Psi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}|x\in V,\ \ y=\psi(x)\}.$$

则对任何 $\eta>0$，存在 $Q=V\times W$ 的分割 $P=\{P_V,P_W\}$，使得这分割把 $Q$ 分成的各闭子方块 $Q_{(j,k)}$ 当中，能与 $\Phi$ 或者 $\Psi$ 相交的那些闭子方块的体积之和小于 $\eta$.

**证明** 由于函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 在闭方块 $V$ 一致连续，对于

$$e_N=\frac{B-A}{N}>0,\qquad N\in\mathbb{N},$$

存在 $\delta_N>0$，使得只要 $x_1,x_2\in V$,

$$|x_1-x_2|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_1^i-x_2^i|\}<\delta_N,$$

就有

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\frac{B-A}{N},$$

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|<\frac{B-A}{N}.$$

先作 $W=[A,B]$ 的分割

$$P_W: A=y_0<y_1<\cdots<y_N=B,$$

这里

$$y_k=A+\frac{k}{N}(B-A), \quad k=0,\cdots,N.$$

然后作 $V=[a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n]$ 的分割 $P_V$，要求它满足这样的条件：

$$|P_V|<\delta_N.$$

我们来考察 $Q=V\times W$ 的分割

$$P=\{P_V,P_W\}.$$

这分割把 $Q=V\times W$ 分成若干闭子方块

$$Q_{(J,k)}=V_J\times W_k.$$

对于任意指定的一个 $J$，至多只有两个 $k$，能使 $Q_{(J,k)}=V_J\times W_k$ 与 $\Psi$ 相交（否则，在 $V_J$ 上将有 $x_1$ 和 $x_2$ 使得

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|\geqslant\frac{B-A}{N},$$

这与 $|x_1-x_2|\leqslant|P_V|<\delta_N$ 相矛盾）．于是，能与 $\Psi$ 相交的闭子方块的总体积不超过

$$\begin{aligned}\sum_J 2\left(\mathrm{Vol}(V_J)\times\frac{B-A}{N}\right) &=2\frac{B-A}{N}\sum_J \mathrm{Vol}(V_J)\\ &=2\frac{B-A}{N}\mathrm{Vol}(V).\end{aligned}$$

根据同样道理，能与 $\Phi$ 相交的闭子方块的总体积也不超过

$$2\frac{B-A}{N}\mathrm{Vol}(V).$$

只要我们事先取 $N$ 足够大，使得

$$4\frac{B-A}{N}\mathrm{Vol}(V)<\eta.$$

那么所作的分割 $P=\{P_V,P_W\}$ 就满足我们的要求：这分割将 $Q$ 分成的各闭子方块 $Q_{(j,k)}$ 当中，能与 $\Phi$ 或者 $\Psi$ 相交的那些闭子方块的体积之和小于 $\eta$. □

在下面的讨论中，仍约定

$$V=[a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n],$$

$$W=[A,B],\quad Q=V\times W.$$

设有连续函数

$$\varphi: V\longrightarrow W\subset\mathbb{R},$$

$$\psi: V\longrightarrow W\subset\mathbb{R},$$

满足这样的条件：

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x),\quad \forall x\in V.$$

我们来考察 $Q$ 的子集（参看图 13-4）

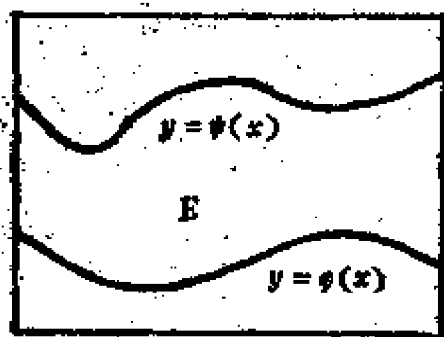



图 13-4

$$E=\{(x,y)\in Q\,|\,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}.$$

设函数 $f(x,y)$ 在 $E$ 上有定义. 将这函数扩充为

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & \text{对于 } (x,y)\in E,\\ 0, & \text{对于 } (x,y)\in Q\backslash E.\end{cases}$$

如果 $\tilde{f}$ 在 $Q$ 可积，那么我们就说 $f$ 在 $E$ 可积，并规定

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_Q\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

**定理 2** 设 $E$ 是如上所述的一个集合. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $E$ 连续，那么这函数在 $E$ 可积，并且

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

**证明** 容易看出：$E$ 是一个有界闭集. 我们记

$$\mu=\inf_{(x,y)\in Q}\tilde{f}(x,y),\quad M=\sup_{(x,y)\in Q}\tilde{f}(x,y),$$

$$\omega=M-\mu.$$

先作 $Q=V\times W$ 的分割 $P_0$，使得 $Q$ 被这分割所分成的各闭子方块当中，与 $\Phi$ 或者 $\Psi$ 相交的闭子方块的体积之和小于

$$\eta=\frac{\varepsilon}{2\omega}$$

（集合 $\Phi$ 与 $\Psi$ 的定义如上面引理中所述）．把这些与 $\Phi$ 或者 $\Psi$ 相交的闭子方块的并集记为 $H$，又把那些不与 $\Phi$ 和 $\Psi$ 相交的闭子方块的并集记为 $\Pi$．因为函数 $\tilde{f}$ 在有界闭集 $\Pi$ 之上是一致连续的，所以存在 $\delta>0$，使得只要

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\in\Pi,$$
$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta,$$

就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2\text{Vol}(Q)}.$$

在分割 $P_0$ 的基础上，用增加分界的办法进一步将 $Q$ 细分，使所得的分割 $P$ 满足条件

$$|P|<\delta.$$

设分割 $P$ 将 $Q$ 分成闭子方块

$$\{Q_{(J,k)}\}.$$

我们把函数 $\tilde{f}(x,y)$ 在 $Q_{(J,k)}$ 上的振幅（即上确界与下确界之差）记为

$$\omega_{(J,k)}.$$

显然有

$$\begin{aligned}\Omega(\tilde{f},P)&=\sum_{(J,k)}\omega_{(J,k)}\Delta x_J\Delta y_k\\&=\sum{}'\omega_{(J,k)}\Delta x_J\Delta y_k\\&\quad+\sum{}''\omega_{(J,k)}\Delta x_J\Delta y_k,\end{aligned}$$

这里 $\sum'$ 表示对满足条件 $Q_{(J,k)}\subset H$ 的那些 $(J,k)$ 求和，$\sum''$ 表示对满足条件 $Q_{(J,k)}\subset\Pi$ 的那些 $(J,k)$ 求和．分别估计这两部分和数，我们得到

$$\Omega(\tilde{f},P)<\omega\sum{}'\Delta x_j\Delta y_k+\frac{\varepsilon}{2\mathrm{Vol}(Q)}\sum{}''\Delta x_j\Delta y_k$$

$$<\omega\frac{\varepsilon}{2\omega}+\frac{\varepsilon}{2\mathrm{Vol}(Q)}\ \mathrm{Vol}(Q)$$

$$=\varepsilon.$$

这证明了 $\tilde{f}$ 在 $Q$ 可积，也就是 $f$ 在 $E$ 可积（按照我们所作的约定）．

再来考察函数 $\tilde{f}(x,y)$ 在 $Q$ 上的重积分与累次积分．对于任意取定的 $x$，$\tilde{f}(x,y)$ 作为 $y$ 的函数，在闭区间 $W=[A,B]$ 上至多只可能有两个间断点．因而存在积分

$$\int_W\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y=\int_A^B\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y.$$

根据定理 1 的推论 1，我们得到

$$\int_Q\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\mathrm{d}x\int_A^B\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y.$$

这就是

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\qquad\square$$

**例 1**　设一元函数 $f$ 在 $[a,b]$ 连续，一元函数 $g$ 在 $[c,d]$ 连续，试证

(1) $$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}f(x)g(y)\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y;$$

(2) $$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}f(x)f(y)\mathrm{d}(x,y)=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

**证明**　把重积分化为累次积分，我们得到

(1) $$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}f(x)g(y)\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(f(x)\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y,$$

(2)
$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

**例 2** 设 $f(x,y)$ 是二阶连续可微函数. 试计算

$$I=\iint\limits_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

**解** 化为累次积分计算，我们得到

$$I=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\int_\gamma^\delta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\delta)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,\gamma)\right)\mathrm{d}x$$

$$=f(\beta,\delta)-f(\alpha,\delta)-f(\beta,\gamma)+f(\alpha,\gamma).$$

**例3** 设$\Delta$是 $OXY$ 平面上由直线

$$y=a,\quad y=x \text{ 和 } x=b$$

所围成的闭区域 ($a<b$). 又设 $f(x,y)$ 是在$\Delta$上有定义并且连续的一个函数. 试证

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

**证明** 用两种办法把重积分

$$\iint\limits_\Delta f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

化为累次积分（参看定理 2），就得到要证的结果.

**例 4** 设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 连续， $x\in[a,b]$. 试证明

$$\int_a^x \mathrm{d}t_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_{n-2}\cdots\int_a^{t_1}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}\ f(t)\mathrm{d}t.$$

**证明** 我们对积分的层数作归纳．先看二层积分的情形．对这情形，利用例 3 就可得到

$$\int_a^x \mathrm{d}t_1\int_a^{t_1}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\mathrm{d}t\int_t^x f(t)\mathrm{d}t_1$$

$$=\int_a^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

假设对于 $n-1$ 层积分的情形结论成立，于是就有

$$\int_a^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_{n-2}\cdots\int_a^{t_2}\mathrm{d}t_1\int_a^{t_1}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_a^{t_{n-1}}(t_{n-1}-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t.$$

再一次利用例 3 就得到

$$\int_a^x\mathrm{d}t_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_{n-2}\cdots\int_a^{t_1}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x\mathrm{d}t_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}(t_{n-1}-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x\mathrm{d}t\int_t^x(t_{n-1}-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t.$$

## §4 若当可测集上的积分

我们先作一些准备，然后讨论展布于若当（Jordan）可测集上的积分．

### 4.a 零集

分析上节定理 2 中关于函数 $\tilde{f}$ 可积性的证明，我们发现：关键在于 $\tilde{f}$ 的不连续点的集合具有较特殊的性质．这启发我们作进一步的讨论．

**定义** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块，$\Delta\subset Q$．如果对任何 $\varepsilon>0$，都存在 $Q$ 的分割 $P$，使得在 $Q$ 被 $P$ 所分成的各闭子方块 $\{Q_j\}$ 当中，与 $\Delta$ 相交的那些闭子方块的体积之和小于 $\varepsilon$，即

$$(4.1)\qquad \sum_{Q_j\cap\Delta\neq\phi}\mathrm{Vol}(Q_j)<\varepsilon,$$

那么我们就说 $\Delta$ 是一个零集．

作为约定，我们把空集 $\phi$ 也看成一个零集．

仿照上节定理 2 的证明，容易得到：

**定理 1** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块，$F$ 是在 $Q$ 上有定义的一个函数．如果 $F$ 在 $Q$ 中的不连续点的集合 $\Delta$ 是一个零集，那么 $F$ 在 $Q$ 上可积．

**定理 2** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个闭方块，$F$ 是在 $Q$ 上有定义的一个函数，$\Delta$ 是 $Q$ 中的一个零集．如果

$$F(x)=0,\qquad \forall x\in Q\backslash\Delta,$$

那么 $F$ 在 $Q$ 可积，并且

$$\int_Q F(x)\mathrm{d}x=0.$$

下面，对零集作进一步的考察．

我们把 $\mathbb{R}^m$ 中的开方块定义为如下形状的点集

$$G=(\sigma^1,\tau^1)\times\cdots\times(\sigma^m,\tau^m),$$

并约定记

$$l(G)=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\tau^i-\sigma^i\},$$

$$\mathrm{Vol}(G)=(\tau^1-\sigma^1)\times\cdots\times(\tau^m-\sigma^m).$$

如果开方块 $G$ 的各棱等长，即

$$\tau^1-\sigma^1=\cdots=\tau^n-\sigma^n,$$

那么我们就把它叫做开正方块.

**引理** 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任何闭方块

$$\Pi=[\alpha^1,\beta^1]\times\cdots\times[\alpha^n,\beta^n],$$

存在有限个开正方块

$$G_1,\cdots,G_q,$$

满足以下条件：

$$\Pi\subset\bigcup_{k=1}^{q}G_k,$$

$$\sum_{k=1}^{q}\mathrm{Vol}(G_k)\leqslant 2^n\mathrm{Vol}(\Pi).$$

**证明** 先考察较简单的情形. 设 $\Pi$ 满足这样的条件：

$$\frac{\Pi\text{的最长棱的长度}}{\Pi\text{的最短棱的长度}}<2.$$

对这情形，我们作一个开正方块 $G$，使它的中心与 $\Pi$ 的中心重合，而边长等于$\Pi$的最短棱的长度的 2 倍. 于是有

$$\Pi\subset G,\qquad \mathrm{Vol}(G)\leqslant 2^n\mathrm{Vol}(\Pi).$$

对更一般的情形，我们设法把$\Pi$切割成有限个较小的闭方块 $\Pi_1,\cdots,\Pi_q$，使得每一个这样的闭子方块 $\Pi_k$ 满足条件

$$\frac{\Pi_k\text{ 的最长棱的长度}}{\Pi_k\text{ 的最短棱的长度}}<2.$$

具体做法如下：以$\Pi$的最短棱的长度

$$\gamma=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\beta^i-\alpha^i\}$$

与其他各棱的长度作比较，如果

$$2^l\gamma\leqslant\beta^k-\alpha^k<2^{l+1}\gamma,$$

那么我们就把棱 $[\alpha^k,\beta^k]$ 分成 $2^l$ 等分，并且过 $2^l$ 个分点作$\Pi$的分界面. 所有这些分界面把 $\Pi$ 分割成有限个闭子方块

$$\Pi_1, \cdots, \Pi_q,$$

其中每一个闭子方块 $\Pi_k$ 都满足我们的要求：

$$\frac{\Pi_k \text{ 的最长棱的长度}}{\Pi_k \text{ 的最短棱的长度}} < 2.$$

对每个 $h \in \{1, \cdots, q\}$，我们作一个开正方块 $G_h$，使它的中心与 $\Pi_h$ 的中心相重合，而边长等于

$$2\gamma = 2 \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\beta^i - \alpha^i\}.$$

这样的 $G_h$ 满足条件

$$\Pi_h \subset G_h,$$
$$\mathrm{Vol}(G_h) \leqslant 2^m \mathrm{Vol}(\Pi_h).$$

因而有

$$\Pi \subset \bigcup_{h=1}^{q} G_h,$$

$$\sum_{h=1}^{q} \mathrm{Vol}(G_h) \leqslant 2^m \sum_{h=1}^{q} \mathrm{Vol}(\Pi_h) = 2^m \mathrm{Vol}(\Pi). \qquad \square$$

**定理 3** 对于 $\mathbf{R}^m$ 的子集 $A$，以下各条陈述互相等价：

(1) $A$ 是一个零集；

(2) 对任何 $\varepsilon > 0$，存在有限个闭方块

$$\Pi_1, \cdots, \Pi_r,$$

使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{r} \Pi_j, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(\Pi_j) < \varepsilon;$$

(3) 对任何 $\varepsilon > 0$，存在有限个开正方块

$$G_1, \cdots, G_s,$$

使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{s} G_k, \qquad \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}(G_k) < \varepsilon.$$

**证明** 我们将循以下途径证明所列各条互相等价：

“(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)”.

首先证明“(1) ⇒ (2)”. 按照零集的定义，$A$ 包含在某个闭方块 $Q$ 之中，并且对任何$\varepsilon>0$，存在 $Q$ 的分割$P$，使得

$$\sum_{Q_j \cap A \neq \phi} \mathrm{Vol}(Q_j)<\varepsilon,$$

——这里 $Q_j$ 表示 $Q$ 被 $P$ 分成的闭子方块. 于是，我们可以把满足条件

$$Q_j \cap A \neq \phi$$

的那些 $Q_j$ 记为

$$\Pi_1, \cdots, \Pi_r.$$

显然这些闭方块使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{r} \Pi_j, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(\Pi_j)<\varepsilon.$$

再来证明“(2) ⇒ (3)”. 对于$\frac{\varepsilon}{2^n}>0$，存在闭方块

$$\Pi_1, \cdots, \Pi_r,$$

满足条件

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{r} \Pi_j, \qquad \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(\Pi_j)< \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

对 $\Pi_1, \cdots, \Pi_r$ 的每一个应用上面的引理，我们得到有限个开正方块

$$G_1, \cdots, G_s,$$

这些开正方块使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{s} G_k,$$

$$\sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}(G_k) \leqslant 2^n \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(\Pi_j)<\varepsilon,$$

最后，我们来证明“(3) ⇒ (1)”．设 $Q$ 是包含 $A$ 的任意一个闭方块，并设开正方块

$$G_1,\cdots,G_r$$

满足条件

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{r} G_k,\qquad \sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(G_k)<\varepsilon.$$

我们可以作 $Q$ 的分割 $P$，使得 $G_1,\cdots,G_r$ 的边界在 $Q$ 中的部分全都被 $P$ 的分界所覆盖．设 $Q$ 被分割 $P$ 分成了闭子方块 $\{Q_j\}$．考察满足条件

$$Q_j\cap A\neq\phi$$

的那些闭子方块 $Q_j$．我们发现：每一个这样的 $Q_j$ 都包含在某个 $\overline{G_k}$ 之中．因而

$$\sum_{Q_j\cap A\neq\phi}\mathrm{Vol}(Q_j)\leqslant\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(\overline{G_k})$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(G_k)<\varepsilon.$$

至此，我们完成了定理的证明．□

虽然前面给出的零集定义涉及到包含这集合的一个闭方块 $Q$，但从定理 3 可以看出：

**推论 1** 一个集合 $A$ 是否零集，是这集合本身的性质，不取决于它放在怎样的闭方块之中．

从定理 3，还容易得到：

**推论 2** (1) 零集的子集仍然是零集；

(2) 有限个零集的并集仍然是零集．

**证明** (1) 的证明留给读者作为练习．我们来证明 (2)．设 $\Gamma$ 和 $A$ 都是零集，则存在开正方块 $D_1,\cdots,D_r$ 和 $G_1,\cdots,G_s$，分别使得

$$\Gamma\subset\bigcup_{j=1}^{r} D_j,\qquad \sum_{j=1}^{r}\mathrm{Vol}(D_j)<\frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{s} G_k,\qquad \sum_{k=1}^{s}\mathrm{Vol}(G_k)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是， $D_1,\cdots,D_r$, $G_1,\cdots,G_s$ 这有限个开正方块就使得

$$\Gamma\cup A\subset\left(\bigcup_{j=1}^{r} D_j\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{s} G_k\right),$$

$$\sum_{j=1}^{r}\mathrm{Vol}(D_j)+\sum_{k=1}^{s}\mathrm{Vol}(G_k)<\varepsilon. \qquad \square$$

**推论5** 设 $A$ 是零集，则 $A$ 的闭包 $\mathrm{Cl}A$ 与边界 $\mathrm{Bd}A$ 也都是零集.

**证明** 对任何 $\varepsilon>0$，存在有限个闭方块

$$\Pi_1,\cdots,\Pi_r,$$

使得

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{r}\Pi_j,\qquad \sum_{j=1}^{r}\mathrm{Vol}(\Pi_j)<\varepsilon.$$

因为 $\bigcup_{j=1}^{r}\Pi_j$ 是包含 $A$ 的一个闭集，所以它也必定包含了 $A$ 的闭包 $\mathrm{Cl}A$. 我们有

$$\mathrm{Cl}A\subset\bigcup_{j=1}^{r}\Pi_j,\qquad \sum_{j=1}^{r}\mathrm{Vol}(\Pi_j)<\varepsilon.$$

这证明了 $\mathrm{Cl}A$ 是零集.

$\mathrm{Bd}A$ 是 $\mathrm{Cl}A$ 的子集，因而也是零集. $\square$

### 4.b 若当可测集

对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $E$，可以定义这样一个函数

$$C_E(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in E,\\ 0, & \text{如果 } x\notin E.\end{cases}$$

我们把 $C_E$ 叫做集合 $E$ 的特征函数.

以下结果可以直接根据特征函数的定义加以验证.

**引理** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，$\phi$ 表示空集，则有

(1) $C_{A\cup B}(x)=C_A(x)+C_B(x)-C_{A\cap B}(x)$;

(2) $C_{A\cap B}(x)=C_A(x)\cdot C_B(x)$,

(3) $C_\phi(x)=0$.

如果 $A\cap B=\phi$，那么从上面的（1），（2）和（3）就可得到

$$C_{A\cup B}(x)=C_A(x)+C_B(x).$$

**定义** 设 $Q$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭方块，$S\subset Q$. 如果 $S$ 的边界 $\mathrm{Bd}S$ 是零集，那么我们就说 $S$ 是一个若当可测集（Jordan Measurable Set）或者可量集(Contented Set). 若当可测集也简称为 $J$ 可测集. 对于若当可测集 $S$，特征函数 $C_S(x)$ 在 $Q$ 上可积分（因为 $C_S(x)$ 的间断点集合是零集 $\mathrm{Bd}S$). 我们把

$$v(S)=\int_Q C_S(x)\mathrm{d}x$$

叫做集合 $S$ 的若当测度（Jordan Measure）或者容量(Content). 若当测度又可简称为 $J$ 测度.

**注记 1** 根据本节定理 3 的推论 1 和 §2 的定理 4，我们确信：在上面的定义中，包含集合 $S$ 的闭方块 $Q$ 实际上可以任意选择.

**注记 2** 根据本节定理 2，我们得知：零集必定是若当可测的，并且它的若当测度等于 0.

**定理 4** 如果 $S$ 和 $T$ 都是若当可测集，那么

$$S\cup T,\quad S\cap T \text{ 和 } S\backslash T$$

也都是若当可测集，并且

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T)-v(S\cap T),$$

$$v(S\backslash T)=v(S)-v(S\cap T).$$

**证明** 关于集合的边界，有以下关系成立（请读者自己验证）：

$$\mathrm{Bd}(S\cup T)\subset \mathrm{Bd}S\cup \mathrm{Bd}T,$$

$$\mathrm{Bd}(S\cap T)\subset \mathrm{Bd}S\cup \mathrm{Bd}T,$$

$$\mathrm{Bd}(S\backslash T)\subset \mathrm{Bd}S\cup \mathrm{Bd}T.$$

如果 $\mathrm{Bd}S$ 和 $\mathrm{Bd}T$ 都是零集，那么 $\mathrm{Bd}S\cup\mathrm{Bd}T$ 也是零集，于是 $\mathrm{Bd}(S\cup T)$，$\mathrm{Bd}(S\cap T)$ 和 $\mathrm{Bd}(S\backslash T)$ 也都是零集．这证明了定理的第一个论断．

又，从特征函数的等式

$$C_{S\cup T}(x)=C_S(x)+C_T(x)-C_{S\cap T}(x),$$
$$C_{S\backslash T}(x)=C_S(x)-C_{S\cap T}(x),$$

可得

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T)-v(S\cap T),$$
$$v(S\backslash T)=v(S)-v(S\cap T).\qquad\square$$

**推论** 如果 $S$ 和 $T$ 都是若当可测集，并且 $v(S\cap T)=0$，那么

$$v(S\cup T)=v(S)+v(T).$$

下面，我们来说明若当测度（容量）的几何意义．设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块，$E$ 是 $Q$ 的任意子集，$C_E$ 是集合 $E$ 的特征函数．如果 $Q$ 的分割 $P$ 把 $Q$ 分成闭子方块 $\{Q_J\}$，那么

$$U(C_E,P)=\sum_{Q_J\cap E\neq\phi}\mathrm{Vol}(Q_J),$$

$$L(C_E,P)=\sum_{Q_J\subset E}\mathrm{Vol}(Q_J).$$

这就是说，$U(C_E,P)$ 正好是与 $E$ 相交的那些闭子方块 $Q_J$ 的体积之和，$L(C_E,P)$ 正好是完全包含在 $E$ 中的那些闭子方块 $Q_J$ 的体积之和（图13-5）．

我们把

$$\bar{v}(E)=\overline{\int_Q}C_E(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{|P|\to 0}U(C_E,P)$$

称为集合 $E$ 的若当外测度或外容量，并把

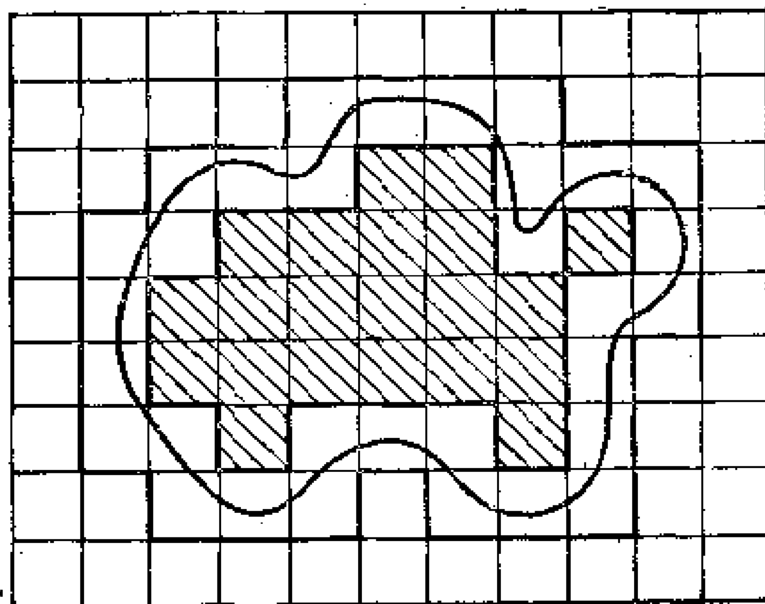


图 13-5

$$\underline{v}(E)=\underline{\int}_Q C_E(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{|P|\to 0} L(C_E,P)$$

称为集合 $E$ 的若当内测度或内容量. 显然有

$$0\leqslant \underline{v}(E)\leqslant \overline{v}(E).$$

如果 $E$ 是若当可测集，那么 $C_E$ 是可积的，对这情形就有

$$v(E)=\underline{v}(E)=\overline{v}(E).$$

我们约定把有限个闭方块的并集叫做简单图形. 通过以上的讨论可以看到：若当测度是外逼近简单图形体积与内逼近简单图形体积的共同的极限值. —— 这正是通常的面积与体积等概念的一般化.

再回过头来看零集这一概念，我们发现以下三件事是互相等价的：

(1) $A$ 是零集；

(2) $A$ 是若当可测集并且 $v(A)=0$；

(3) $\Delta$ 的若当外测度等于 0，即

$$\bar{v}(\Delta)=0.$$

### 4.c 若当可测集上的积分

设 $E\subset\mathbb{R}^n$，函数 $f(x)$ 在集合 $E$ 上有定义．于是，函数 $C_E(x)f(x)$ 也在集合 $E$ 上有定义．我们约定按以下方式把函数 $C_E(x)f(x)$ 扩充定义于 $\mathbb{R}^n$ 之上：

$$C_E(x)f(x)=\begin{cases}f(x), & \text{如果} x\in E,\\ 0, & \text{如果 } x\notin E.\end{cases}$$

不论函数 $f(x)$ 在 $E$ 以外的定义如何，所作的约定都不会引起混淆．在以下的讨论中，我们始终采取这样的约定．

**定义** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭方块，$E\subset Q$ 是一个若当可测集．如果函数

$$C_E(x)f(x)$$

在 $Q$ 可积，那么我们就说函数 $f(x)$ 在 $E$ 可积，并把 $f(x)$ 在 $E$ 上的积分定义为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_Q C_E(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

**注记** 在上面的定义中，涉及到包含集合 $E$ 的一个闭方块 $Q$．这闭方块实际上可以任意选取．——请参看 §2 的定理 4．

展布于若当可测集上的积分，也具有线性和单调性等性质．对于这样的积分，还有以下形式的积分中值定理成立：

**定理 5** 设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若当可测集，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $E$ 上可积，则函数 $f(x)g(x)$ 也在 $E$ 上可积．如果对于任何 $x\in E$ 都有

$$\mu\leqslant f(x)\leqslant M,\qquad g(x)\geqslant 0,$$

那么就有

$$\mu\int_E g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 设 $Q$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块，$E\subset Q$. 因为

$$C_E(x)f(x) \text{ 和 } C_E(x)g(x)$$

都在 $Q$ 上可积，所以

$$C_E(x)f(x)g(x)=(C_E(x)f(x))\cdot(C_E(x)g(x))$$

也在 $Q$ 上可积. 又因为 $\forall x\in Q$ 都有

$$\mu C_E(x)g(x)\leqslant C_E(x)f(x)g(x)\leqslant MC_E(x)g(x),$$

根据积分的单调性就得到

$$\mu\int_Q C_E(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant\int_Q C_E(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M\int_Q C_E(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

也就是

$$\mu\int_E g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$ □

**推论** 设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若当可测集，函数 $f(x)$ 在 $E$ 上可积，并且

$$\mu\leqslant f(x)\leqslant M,\qquad \forall x\in E,$$

则有

$$\mu v(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant Mv(E).$$

我们来考察有关重积分可加性的问题. 先证明一个引理.

**引理** (1) 设 $E_0$ 和 $E$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的若当可测集，$E_0\subset E$. 如果函数 $f$ 在 $E$ 可积，那么 $f$ 在 $E_0$ 上也可积.

(2) 设 $E_1$ 和 $E_2$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的若当可测集，$E=E_1\cup E_2$. 如果函数 $f$ 在 $E_1$ 和 $E_2$ 上可积，那么 $f$ 在 $E$ 上也可积，并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_1\cap E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** (1) 取 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块 $Q\supset E\supset E_0$. 因为函数

$$C_{E_0}(x) \text{ 和 } C_E(x)f(x)$$

都在 $Q$ 上可积，所以

$$C_{E_0}(x)f(x)=C_{E_0}(x)\cdot C_E(x)f(x)$$

也在 $Q$ 上可积.

(2) 记$E_3=E_1\cap E_2$, 则显然有

$$E_3\subset E_1, \quad E_3\subset E_2.$$

因为函数 $f$ 在 $E_1$ 和 $E_2$ 上可积，所以 $f$ 在 $E_3$ 上当然也可积. 又因为

$$C_E(x)=C_{E_1}(x)+C_{E_2}(x)-C_{E_3}(x),$$

所以

$$C_E(x)f(x)=C_{E_1}(x)f(x)+C_{E_2}(x)f(x)-C_{E_3}(x)f(x).$$

由此可知：函数 $f$ 在 $E$ 上可积分，并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_1\cap E_2} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**定理6** 设 $E_1,\cdots,E_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若当可测集，满足条件 $i\neq j$ 时，$E_i\cap E_j$ 是零集。

我们记

$$E=E_1\cup\cdots\cup E_k.$$

如果函数 $f$ 在 $E_1,\cdots,E_k$ 上可积，那么 $f$ 在 $E$ 上也可积，并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 我们对加项的数目作归纳法. 首先考察两个加项的情形. 对这情形，从上面的引理可知，函数 $f$ 在 $E_1\cup E_2$ 上可积分，并且

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_1\cap E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

但 $E_1\cap E_2$ 是零集，根据本节定理2可知

$$\int_{E_1\cap E_2} f(x)\mathrm{d}x=\int_Q C_{E_1\cap E_2}(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x=0.$$

我们得到

$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

假设对 $k$-1 个加项的情形定理的结论成立. 我们来考察 $k$ 个加项的情形. 对这情形，我们记

$$E_0=E_1\cup\cdots\cup E_{k-1}.$$

根据归纳法假设，函数 $f$ 在 $E_0$ 上可积分，并且有

$$\int_{E_0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{E_{k-1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

容易看出，$E_0\cap E_k$ 是零集. 根据上面对两个加项情形的讨论，我们断定：函数 $f$ 在若当可测集 $E=E_0\cup E_k$ 上可积分，并且

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_{E_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{E_1} (x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{E_{k-1}} f(x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$ □

设 $E$ 是一个非空的若当可测集. 如果有限个非空的若当可测集

$$E_1,\cdots,E_N$$

满足这样的条件：

(1) $j\neq k$ 时，$E_j\cap E_k$ 是零集，

(2) $E_1\cup\cdots\cup E_N=E$,

那么我们就说 $P=\{E_1,\cdots,E_N\}$ 是若当可测集 $E$ 的一个分割，并把 $P$ 的模定义为

$$|P|=\max_{1\leq j\leq N}\sup_{x,y\in E_j}\{|x-y|\}.$$

对于这样的分割，任意选取

$$\xi_j \in E_j, \quad j=1,\cdots,N,$$

并记

$$\xi=\{\xi_1,\cdots,\xi_N\}.$$

我们把和数

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)v(E_j)$$

叫做一般积分和（或一般黎曼和）. 仿照§2 中的做法，还可以定义一般达布和（上和与下和），并能推导一系列相应的结果. 我们不再作细致的讨论了. 这里只证明以下很有用的结果.

**定理 7** 设 $E$ 是一个闭若当可测集. 如果函数 $f$ 在 $E$ 连续，那么 $f$ 在 $E$ 可积，并且 $f$ 在 $E$ 上的积分正好是一般黎曼和的极限

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0} \sigma(f,P,\xi).$$

**证明** 设 $Q$ 是包含 $E$ 的任意一个闭方块. 因为函数 $C_E(x)f(x)$ 在 $Q$ 中的间断点的集合是一个零集，所以这函数在 $Q$ 上可积. 我们证明了函数 $f$ 在 $E$ 上可积.

因为 $E$ 是一个有界闭集，函数 $f$ 在 $E$ 上是一致连续的，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x,y\in E, \quad |x-y|<\delta,$$

就有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{v(E)}.$$

设分割 $P=\{E_1,\cdots,E_N\}$ 满足条件

$$|P|<\delta,$$

则有

$$\left| \int_E f(x)\mathrm{d}x-\sigma(f,P,\xi) \right|$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{E_j} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)v(E_j)\right|$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{N}\int_{E_j}(f(x)-f(\xi_j))\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\int_{E_j}|f(x)-f(\xi_j)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon}{v(E)}v(E_j)$$

$$=\frac{\varepsilon}{v(E)}\sum_{j=1}^{N}v(E_j)=\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

### 4.d 若当可测集上的积分化为累次积分计算

对某些情形，若当可测集上的积分能够化为累次积分。

同前面一样，我们把 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的点记为

$$(x,y)=(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^p).$$

设 $Q=V\times W$ 是 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的一个闭方块，$E$ 是 $Q$ 的一个子集，$f$ 是在 $E$ 上有定义的一个函数．对于 $x\in V$，我们记

$$E_x=\{y\in\mathbb{R}^p\,|\,(x,y)\in E\}.$$

请注意，对某些 $x'\in V$，可能有 $E_{x'}=\phi$．如果对某个确定的 $x\in V$ 有 $E_x\neq\phi$，那么就可以定义一个函数

$$f(x,\cdot):\quad E_x\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$y\longmapsto f(x,y).$$

**定理 8** 设 $Q=V\times W$ 是 $\mathbb{R}^{n+p}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的一个闭方块，$E\subset Q$ 是一个若当可测集，$f$ 是在 $E$ 上可积的一个函数．如果对任何 $x\in V$，集合 $E_x$ 都是 $\mathbb{R}^p$ 中的若当可测集；并且对于

使得$E_x\neq\phi$ 的 $x$，函数 $f(x,\cdot)$ 在 $E_x$ 上可积，那么

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V \mathrm{d}x\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

——在这里和以下的讨论中，为了叙述方便，我们采取这样的约定：对于使得 $E_x=\phi$ 的 $x$，认为

$$\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)&=\int_Q C_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}(x,y)\\&=\int_V \mathrm{d}x\int_W C_E(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_V \mathrm{d}x\int_W C_{E_x}(y)f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_V \mathrm{d}x\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$ □

上面定理的意义在于：把计算 $m$ 重积分的问题转化为累次计算较低重数的积分．对于 $m\geqslant3$ 的情形，可以有不止一种方式把 $m$ 表示为 $m=n+p$．我们应当考察各种可能的情形，选择最便于计算的方案．例如，对于 $m=3$ 的情形，就有 $3=1+2$ 和 $3=2+1$ 两种典型的方案可供选择．具体说明如下：

设 $E$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的若当可测集，函数 $f$ 在 $E$ 上可积．我们希望运用定理 8 来计算 $f$ 在 $E$ 上的积分．

第一种方案（$3=1+2$）． 我们把 $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^2$ 中的点记为

$$(x,y)=(x,y^1,y^2).$$

设 $V=[a,b]$ 和 $W$ 分别是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间和 $\mathbb{R}^2$ 中的闭方块，

$$Q=V\times W\supset E.$$

如果对每一个 $x\in V$，截口集合 $E_x$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 中的若当可测集，并且对于使得 $E_x\neq\phi$ 的 $x$，函数 $f(x,\cdot)$ 在 $E_x$ 上可积，那么

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{E_x} f(x,y^1,y^2)\mathrm{d}(y^1,y^2).$$

如果遵照通常的习惯，把 $\mathbb{R}^3$ 中的点表示为 $(x,y,z)$，那么上面的公式可以写成

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z)=\int_a^b \mathrm{d}x\iint_{E_x} f(x,y,z)\mathrm{d}(y,z).$$

第二种方案（$3=2+1$）． 我们把$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1$中的点表示为

$$(x,y)=(x^1,x^2,y).$$

设 $V$ 和 $W$ 分别是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭方块和 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间，$Q=V\times W\supset E$．如果对每一个 $x\in V$，截口集合 $E_x$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的若当可测集，并且对于使得 $E_x\neq\phi$ 的 $x$，函数 $f(x,\cdot)$ 在 $E_x$ 上可积，那么

$$\int_E f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V \mathrm{d}x\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_V \mathrm{d}(x^1,x^2)\int_{E(x^1,x^2)} f(x^1,x^2,y)\mathrm{d}y.$$

如果照通常的习惯用 $(x,y,z)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的点，那么上面的公式就可以写成

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z)$$

$$=\iint_V \mathrm{d}(x,y)\int_{E(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

第二种方案特别适合于计算曲顶曲底柱形上的积分. 所谓曲顶曲底柱形，是指如下形状的集合

$$E=\left\{(x,y,z)\left|\begin{array}{l}(x,y)\in D,\\ \varphi(x,y)\leqslant z\leqslant\psi(x,y),\end{array}\right.\right\},$$

这里设 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭若当可测集，函数 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 在 $D$ 上连续，并且

$$\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y),\qquad \forall(x,y)\in D.$$

设闭方块 $Q=V\times W\supset E$，我们指出：

$$\mathrm{Bd}E\subset\mathrm{Bd}D\times W)\cup\Phi\cup\Psi,$$

这里

$$\Phi=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ z=\varphi(x,y)\},$$
$$\Psi=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ z=\psi(x,y)\}.$$

仿照 §3 中的作法（参看 §3 定理 2 前的引理），可以证明 $\mathrm{Bd}E$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的零集，因而 $E$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的若当可测集. 如果函数 $f(x,y,z)$ 在 $E$ 上连续，那么就有

$$\iiint_E f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z)$$
$$=\iint_V \mathrm{d}(x,y)\int_{E(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\iint_D \mathrm{d}(x,y)\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

下面介绍把重积分化为累次积分计算的一些例子.

**例 1** 设 $E$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由直线 $x=0$，$y=x$ 和 $y=1$ 围成的图形（图13-6），试计算二重积分

$$I=\iint_E x^2e^{-y^2}\mathrm{d}(x,y).$$

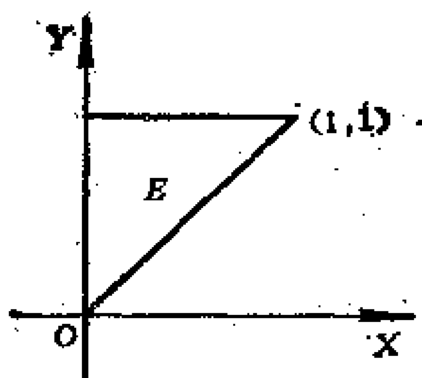



图 13-6

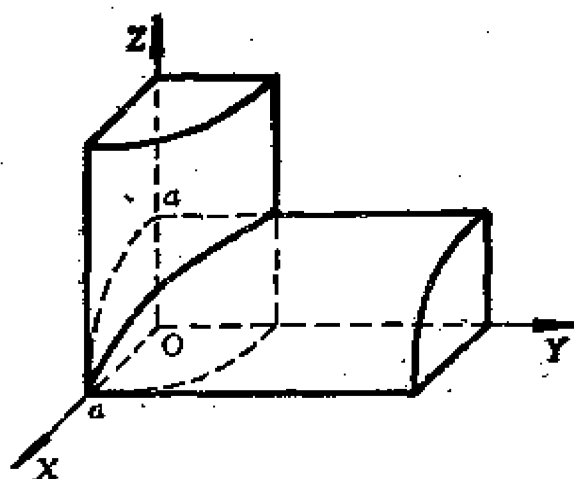



图 13-7

**解** 如果采取先对 $y$ 积分再对 $x$ 积分的方案，那么就会遇到不好计算的内层积分：

$$I=\int_0^1\left(x^2\int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

这里的$\int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y$ 不好计算．如果先对$x$积分，再对 $y$ 积分，就能够顺利地计算到底：

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

**例 2** 考察 $\mathbf{R}^3$ 中的圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $x^2+z^2\leqslant a^2$，试求这两个圆柱相交部分的体积 $V$ （参看图13-7）．

**解** 由于对称性，只须求出第一卦限内的部分体积再乘以8：

$$V=8\iiint_E \mathrm{d}(x,y,z),$$

这里

$$E=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \begin{matrix} x,y,z\geqslant 0 \\ x^2+y^2\leqslant a^2;\ x^2+z^2\leqslant a^2 \end{matrix}\right\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\},$$

$$D=\{(x,y)\mid x,y\geqslant 0,\quad x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

于是

$$V=8\iint\limits_D \mathrm{d}(x,y)\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z$$

$$=8\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$=8\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3.$$

另一种计算方案为

$$V=8\iiint\limits_E\mathrm{d}(x,y,z)$$

$$=8\int_0^a\mathrm{d}x\iint\limits_{E_x}\mathrm{d}(y,z),$$

这里 $E_x$ 是一个正方形：

$$E_x=\left\{(y,z)\ \middle|\ \begin{matrix}0\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}, \\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\end{matrix}\right\}.$$

用这方案计算同样得到

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3.$$

**例 3** 试计算积分

$$I=\iiint\limits_E\frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3},$$

这里 $E$ 是四面体

$$\{(x,y,z)\mid x,y,z\geqslant 0,\ \ x+y+z\leqslant 1\}.$$

**解** 化为累次积分计算得

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \iint_{E_x}\frac{\mathrm{d}(y,z)}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

**例 4** 试计算积分

$$I=\iiint_E\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}(x,y,z),$$

这里 $E$ 是椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\,.$$

**解** 把积分拆成三项，分别化为累次积分：

$$I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left(\frac{x^2}{a^2}\iint_{E_x}\mathrm{d}(y,z)\right)+\int_{-b}^{b}\mathrm{d}y\left(\frac{y^2}{b^2}\iint_{E_y}\mathrm{d}(x,z)\right)$$

$$+\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\left(\frac{z^2}{c^2}\iint_{E_z}\mathrm{d}(x,y)\right).$$

截口 $E_x$ 是一个椭圆面，它的两轴长分别为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \ 和\ \ c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

于是，$E_x$ 的面积等于

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

对截口 $E_y$ 与 $E_z$ 也可作类似的讨论. 于是, 我们求得

$$I=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{5}\pi abc.$$

**例5** 如下形状的集合被称为 $n$ 维单纯形:

$$C_n(r)=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\begin{array}{l}x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,\\ x_1+\cdots+x_n\leqslant r\end{array}\right\}.$$

试计算 $C_n(r)$ 的体积 $W_n(r)$.

**解** 我们来归纳 $W_n(r)$ 的一般公式. 首先, $W_1(r)$ 与 $W_2(r)$ 很容易求得:

$$W_1(r)=\int_0^r\mathrm{d}x_1=r,$$

$$W_2(r)=\int_0^r\mathrm{d}x_2\int_{C_1(r-x_2)}\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_0^r(r-x_2)\mathrm{d}x_2=\frac{1}{2}r^2.$$

假设对任何 $r\geqslant 0$ 已经求得

$$W_{n-1}(r)=\frac{1}{(n-1)!}r^{n-1},$$

那么就有

$$W_n(r)=\int_0^r\mathrm{d}x_n\int_{C_{n-1}(r-x_n)}\mathrm{d}(x_1,\cdots,x_{n-1})$$

$$=\int_0^r W_{n-1}(r-x_n)\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_0^r \frac{1}{(n-1)!}(r-x_n)^{n-1}\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{1}{n!}r^n.$$

**例6** 设 $B_n(r)$ 表示半径为 $r$ 的 $n$ 维闭球体，试计算 $B_n(r)$ 的体积 $V_n(r)$.

**解** 考察 $n=1,2,3$的情形，可以猜测 $V_n(r)$ 具有如下形式的表示：

$$V_n(r)=\alpha_n r^n.$$

我们来证明这公式并推导系数 $\alpha_n$ 的递推关系. 显然有

$$V_1(r)=2r,\qquad \alpha_1=2.$$

对一般情形有

$$V_n(r)=\int_{-r}^r \mathrm{d}x_n\int_{B_{n-1}(\sqrt{r^2-x_n^2})}\mathrm{d}(x_1,\cdots,x_{n-1})$$

$$=\int_{-r}^r \alpha_{n-1}(r^2-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x_n$$

$$=2\alpha_{n-1}\int_0^r (r^2-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}x_n$$

$$=\left(2\alpha_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t\right)r^n$$

$$=\alpha_n r^n.$$

我们看到：系数 $\alpha_n$ 满足递推关系

$$\alpha_n=2\alpha_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t,\qquad \alpha_1=2.$$

从这递推关系可以求得

$$\alpha_n = 2^n \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_1,$$

其中 $\beta_m$ 表示积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t dt.$$

根据第九章 § 6中的计算，

$$\beta_m = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{对奇数 } m, \\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{对偶数 } m. \end{cases}$$

我们求得：

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_3 = \frac{4}{3}\pi,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}\pi^2, \quad \alpha_5 = \frac{8}{15}\pi^2, \quad \cdots,$$

$$V_1(r) = 2r, \quad V_2(r) = \pi r^2, \quad V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$V_4(r) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4, \quad V_5(r) = \frac{8}{15}\pi^2 r^5, \quad \cdots.$$

$\alpha_n$ 与 $V_n(r)$ 的一般表示式为：

$$\alpha_{2k} = 2^{2k} \frac{1}{(2k)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k = \frac{\pi^k}{k!},$$

$$\alpha_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k$$

$$= \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!},$$

$$V_{2k}(r) = \frac{\pi^k}{k!} r^{2k},$$

$$V_{2k+1}(r) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}.$$

## §5 利用变元替换计算重积分的例子

在学习一元函数积分学的时候，我们已经熟悉了定积分的变元替换法则．设 $J=[\alpha,\beta]$ 是一个闭区间，$\varphi$：$J\to\mathbf{R}$ 是一个连续可微函数，满足条件

$$\varphi'(t)\neq 0,\quad \forall t\in \operatorname{int}J.$$

如果函数 $f$ 在闭区间 $\varphi(J)$ 连续，那么

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

注意到

$$\varphi(J)=\begin{cases}[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)], & \text{如果 } \varphi(\alpha)<\varphi(\beta),\\ [\varphi(\beta),\ \varphi(\alpha)], & \text{如果} \varphi(\alpha)>\varphi(\beta),\end{cases}$$

我们可以按以下方式改写（5.1）：

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(J)} f(x)\mathrm{d}x &= \pm\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x\\ &=\pm\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(\pm\varphi'(t))\mathrm{d}t\\ &=\int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这样得到

$$\int_{\varphi(J)} f(x)\mathrm{d}x=\int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

对于多重积分，也有类似形式的变元替换法则：

**定理** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射，$E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集．如果

(1) $\det D\varphi(t) \neq 0, \quad \forall t \in \operatorname{int} E$,

(2) $\varphi$ 在 $\operatorname{int} E$ 中是单一的，

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集，并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$(5.3) \qquad \int_{\varphi(E)} f(x) \mathrm{d}x = \int_E f(\varphi(t)) |\det D\varphi(t)| \mathrm{d}t.$$

这定理的证明过程比较长，我们将在下一节中予以介绍．本节先来看看运用变元替换公式计算重积分的例子．在计算一元函数定积分的时候，作变元替换是为了简化被积函数．对于重积分的计算来说，运用变元替换公式除了仍有简化被积函数的作用而外（这一点比较起来并不那么重要），更重要的目的在于简化积分区域．在实际计算的时候，需要根据积分区域的几何形状，选用合适的变元替换．

### 5.a 二重积分变元替换的例子

对于二重积分，公式 (5.3) 可以写成

$$\iint_{\varphi(E)} f(x,y) \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \iint_E f(x(u,v),\ y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}(u,v).$$

——这里的集合 $E$ 与映射 $\varphi$：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

应满足变元替换定理所要求的条件，函数 $f$ 在 $D = \varphi(E)$ 上连续．

**例1** 设（一元）函数 $f$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 连续，则有

$$\iint\limits_{|x|+|y|<1} f(x+y)\mathrm{d}(x,y)=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u.$$

**解** 上式左边的二重积分，其积分区域 $D$ 由四条直线 $x\pm y=\pm 1$ 围成（图13-8）。这提示我们作变元替换

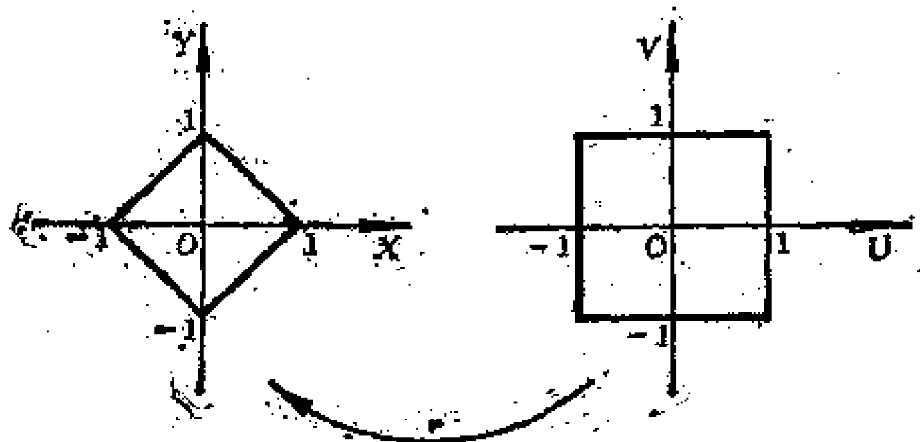



图 13-8

$$\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v \end{cases} \quad \left(\text{即}\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}\right).$$

变换的雅可比行列式很容易计算：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{2}.$$

通过变元替换，我们得到

$$\iint\limits_{|x|+|y|<1} f(x+y)\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{|u|<1,|v|<1} f(u)\mathrm{d}(u,v)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-1}^{1} f(u)du.$$

**注记** 在例1中，最初的二重积分展布在这样一个闭若当可测集上：

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\leqslant 1\}.$$

我们希望确定一个闭若当可测集 $E$，一个包含 $E$ 的开集 $W$ 和一个连续可微映射

$$\varphi:\ W\longrightarrow \mathbf{R},$$

要求这映射满足条件：

(1) $\det D\varphi(u,v)\neq 0,\quad \forall (u,v)\in \operatorname{int}E,$

(2) $\varphi$ 在 $\operatorname{int}E$ 是单一的，

并要求

$$\varphi(E)=D.$$

我们的实际作法是：根据 $D$ 的几何形状确定一个变换

$$\psi:\ \begin{cases} u=x+y, \\ v=x-y, \end{cases}$$

这里 $\psi$ 在包含 $D$ 的一个开集 $V$ 上连续可微，并且满足以下条件

(1′) $\det D\psi(x,y)\neq 0,\quad \forall (x,y)\in V,$

(2′) $\psi$ 在 $V$ 中是单一的。

于是 $W=\psi(V)$ 是一个开集，$E=\psi(D)\subset W$ 是一个闭若当可测集，$\varphi=\psi^{-1}$ 满足变元替换定理的要求。

上面所说的做法可以加以推广。一般说来，如果积分区域 $D$ 表示为

$$\alpha\leqslant u(x,y)\leqslant\beta,\quad \gamma\leqslant v(x,y)\leqslant\delta,$$

那么我们可以试作变换

$$\psi:\ \begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases}$$

这里要求 $\psi$ 在包含 $D$ 的一个开集 $V$ 上连续可微，并要求它满

足上面的条件（1′）和（2′）．$\psi$ 在 $V$ 中的单一性意味着：对任意确定的 $(u_0, v_0)$，至多只有唯一的 $(x_0, y_0) \in V$ 能够使得 $\psi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$. 我们可以用几何式的语言来表述这一条件. 考察两族曲线

$$u(x,y) = \text{const} \text{ 和 } v(x,y) = \text{const}.$$

条件（2′）等价于说：第一族曲线中的任意一条与第二族曲线中的任意一条，在 $V$ 中至多只有一个交点. 在实际解题时，对某些情形，只须根据条件（1′）和（2′）确认 $\varphi = \psi^{-1}$ 的存在，并不一定需要求出 $\varphi$ 的具体表示.

**例 2** 试计算

$$(1)\ I = \iint\limits_{|x|+|y|<1} \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} \mathrm{d}(x,y),$$

$$(2)\ J = \iint\limits_{|x|+|y|<1} (x^2-y^2)^p \mathrm{d}(x,y).$$

**解** 用例 1 中的变换，我们求得

$$I = \frac{1}{2} \iint\limits_{|u|<1,|v|<1} \frac{u^2}{1+v^2} \mathrm{d}(u,v)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^2 \mathrm{d}u \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$$

$$= \frac{\pi}{6},$$

$$J = \frac{1}{2} \iint\limits_{|u|<1,|v|<1} u^p v^p \mathrm{d}(u,v)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^p \mathrm{d}u \int_{-1}^{1} v^p \mathrm{d}v$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{(p+1)^2}, & \text{如果 } p \text{ 是偶数}, \\ 0, & \text{如果 } p \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

**例 3** 考察抛物线 $y^2=\alpha x$, $y^2=\beta x$, $x^2=\gamma y$ 和 $x^2=\delta y$ $(0<\alpha<\beta,\ 0<\gamma<\delta)$. 设 $D$ 是由这四条抛物线围成的闭区域，试计算：

(1) $D$ 的面积 $\sigma(D)$,

(2) $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}(x,y)$,

(3) $J=\iint\limits_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}(x,y)$.

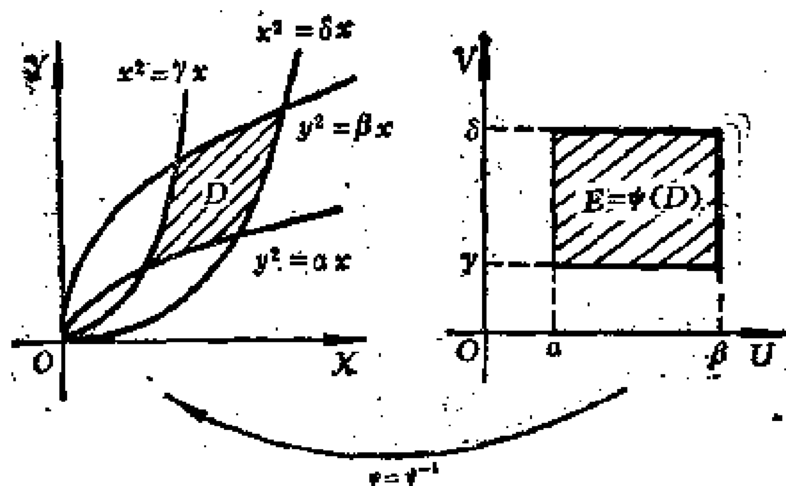



图 13-9

**解** （参看图13-9）闭区域 $D$ 的形状提示我们作变换

$$\psi:\ \begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x}, \\ v=\dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$$

计算变换的雅可比行列式得

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}=-3,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3}.$$

通过变元替换，我们得到

$$\sigma(D)=\iint_D \mathrm{d}(x,y)=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_\gamma^\delta \mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\delta-\gamma).$$

$$I=\iint_D xy\,\mathrm{d}(x,y)=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_\gamma^\delta uv\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{12}(\beta^2-\alpha^2)(\delta^2-\gamma^2).$$

$$J=\iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_\gamma^\delta \frac{1}{uv}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{\beta}{\alpha}\cdot\ln\frac{\delta}{\gamma}.$$

**例4** 设 $D$ 是第一象限内由双曲线 $xy=a$，$xy=b$ 与直线 $y=px$，$y=qx$ 围成的闭区域（$0<a<b$，$0<p<q$），试计算

(1) $D$ 的面积 $\sigma(D)$，

(2) $I=\iint_D \frac{y}{x}\mathrm{d}(x,y)$，

(3) $J=\iint_D xy^3\mathrm{d}(x,y)$.

**解** （参看图13-10）闭区域 $D$ 的形状提示我们采用变换

$$\psi:\ \begin{cases} u=xy, \\ v=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

计算雅可比行列式得

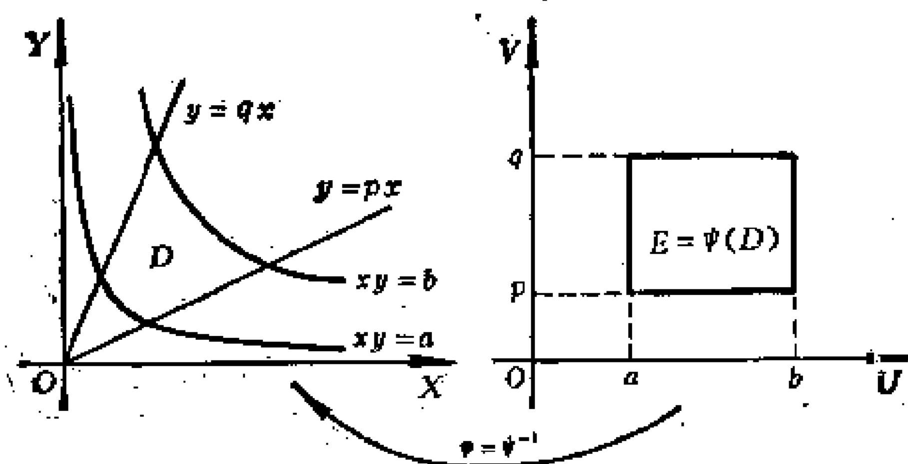



图 13-10

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}.$$

利用变元替换公式，我们得到

$$\sigma(D)=\iint_D d(x,y)=\int_a^b du\int_p^q \frac{1}{2v}dv$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)\ln\frac{q}{p},$$

$$I=\iint_D \frac{y}{x}d(x,y)$$

$$=\int_a^b du\int_p^q v\cdot\frac{1}{2v}dv$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(q-p),$$

$$J=\iint_D xy^3 d(x,y)$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}u \int_p^q u^2 v\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{6}(b^3-a^3)(q-p).$$

**注记** 利用变元替换计算面积的公式为

$$\sigma(D)=\iint_E\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

我们把

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

叫做曲线坐标下的面积元. 下面，我们来说明它的几何意义.

首先指出这样一个简单事实：以两向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(\xi_1,\eta_1)\ \text{和}\ \boldsymbol{\alpha}_2=(\xi_2,\eta_2)$$

为相邻两边的平行四边形，其面积为

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2|=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}$$

的绝对值. 其次，如果用平行于 $OX$ 轴和 $OY$ 轴的两族直线分割闭区域 $D$，那么边长为 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ 的微小矩形的面积应为 $\Delta x\Delta y$. 我们把

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Delta x\Delta y$$

叫做直角坐标系中的面积元.

现在，假设我们用两族曲线

$$u(x,y)=\text{const}\ \text{和}\ v(x,y)=\text{const}$$

来分割闭区域 $D$. 这里要求映射

$$\psi:\ \begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

在包含 $D$ 的一个开集 $V$ 上是连续可微的，并且满足以下条件

(1′) $\det D\psi(x,y)\neq 0,\quad \forall (x,y)\in V,$

(2′) $\psi$ 在 $V$ 中是单一的.

这样的两族曲线形成 $V$ 中的曲线坐标网. 我们来考察这曲线坐标网中一个微小的曲线四边形的面积（参看图13-11）.

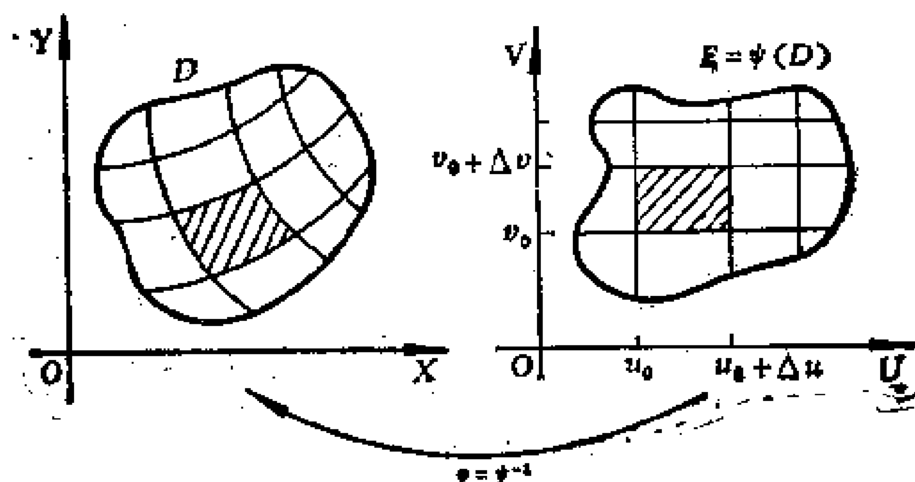



图 13-11

设这曲线四边形为以下四条曲线所围成

$$u(x,y)=u_0,\qquad u(x,y)=u_0+\Delta u,$$
$$v(x,y)=v_0,\qquad v(x,y)=v_0+\Delta v.$$

于是, 这曲线四边形的四个顶点分别为

$$(x_0,y_0)=(x(u_0,v_0),\ \ y(u_0,v_0)),$$
$$(x_1,y_1)=(x(u_0+\Delta u,v_0),\ \ y(u_0+\Delta u,v_0)),$$
$$(x_2,y_2)=(x(u_0,v_0+\Delta v),\ \ y(u_0,v_0+\Delta v)),$$
$$(x_3,y_3)=(x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),\ \ y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)).$$

对于充分小的 $\Delta u>0$ 和 $\Delta v>0$, 可以认为

$$x_1-x_0\approx\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\qquad y_1-y_0\approx\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u,$$

$$x_2-x_0\approx\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\qquad y_2-y_0\approx\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v.$$

我们可以把这微小的曲线四边形近似地看作一个平行四边形（参看图13-12）, 它以向量

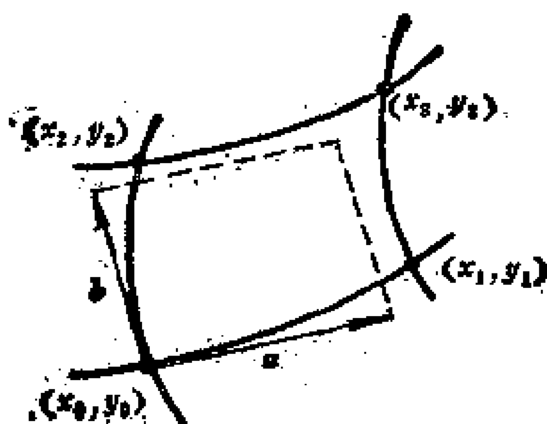



图 13-12

$$a=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\ \frac{\partial y}{\partial u}\ \Delta u\right)$$

和

$$b=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\ \frac{\partial y}{\partial v}\ \Delta v\right)$$

为相邻两边. 这平行四边形的面积为

$$|a\times b|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v.$$

我们看到:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\ =\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

近似地表示了曲线坐标网中一个微小的曲线四边形的面积，——正是因为这个缘故，人们把它叫做曲线坐标下的面积元.

**例 5** 设（一元）函数 $f$ 在闭区间[0,1]连续，试证

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x,y)=\pi\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

**解** 采用极坐标变换

$$\varphi:\ \begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

就可以把

$$E=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

变成

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

计算变换$\varphi$的雅可比行列式得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

在整个$(r,\theta)$平面上，映射$\varphi$是连续可微的．在$E$的内部有：

(1) $\det D\varphi(r,\theta)=r>0$,

(2) $\varphi$是单一的．

验证了这些条件之后，我们确信可以用$\varphi$来作变元替换．于是得到

$$\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x,y)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r^2)r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u.$$

**注记** 极坐标表示的面积微元为

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

请参看图13-13.

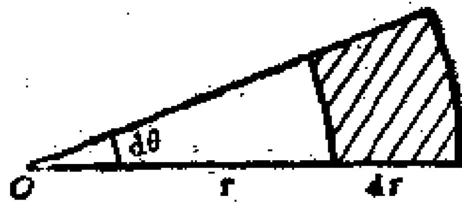



图 13-13

**例6** 设二元函数$f$在闭区域$D$连续．对以下情形(1)和(2)，试用极坐标变换把

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

化为累次积分，其中

(1) $D=\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$,

(2) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2ax\}$.

**解** (1) 作通常的极坐标变换就可得到

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

(2) 以 $(a,0)$ 为极点，作极坐标变换

$$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

我们得到

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(a+r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

**例7** 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所割，试计算割下那部分立体的体积 $V$.（十七世纪意大利数学家维维安尼(Viviani)曾提出过类似的问题．所以这立体又被称为维维安尼立体．）

**解** （参看图13-14）利用对称性，所求的体积可以表示为

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

其中的 $D$ 是 $OXY$ 平面上第一象限内的半圆

$$x^2+y^2\leqslant ax,\qquad y\geqslant 0.$$

作极坐标变换，我们得到

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

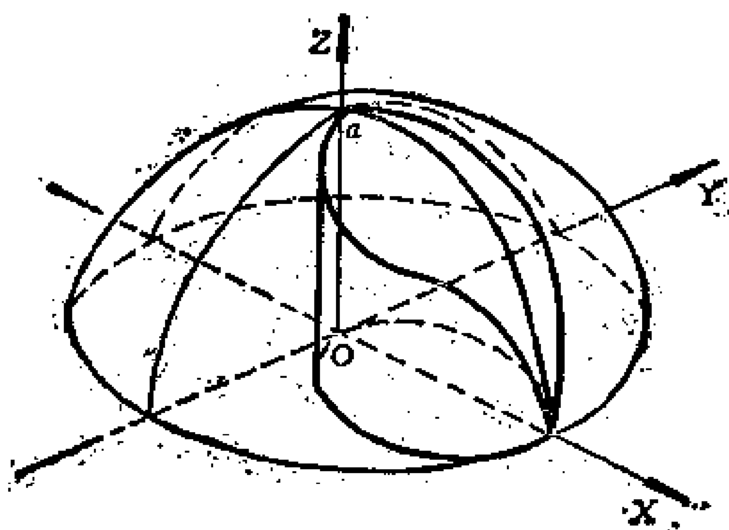



图 13-14

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{8}{9}a^3.$$

**例 8** 试证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},\qquad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**解** 因为 $e^{x^2}\geqslant 1+x^2$,

$$e^{-x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2},$$

所以两积分都收敛. 又, 显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

所以只须计算其中任何一个就可以了. 下面, 我们来计算第一个积分. 考察

$$I(a)=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

我们有

$$(I(a))^2=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{[-a,a]\times[-a,a]}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y).$$

显然有（参看图13-15）：

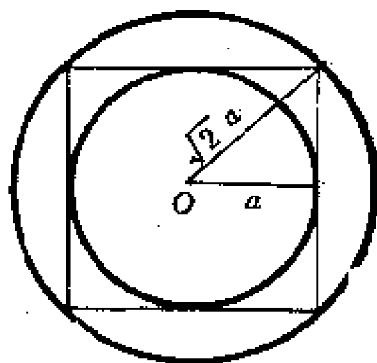



图 13-15

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y)$$

$$\leqslant(I(a))^2\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2a^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y).$$

换极坐标计算可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}e^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\pi(1-e^{-a^2}).$$

同样可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2a^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}(x,y)=\pi(1-e^{-2a^2}).$$

于是有

$$\pi(1-e^{-a^2})\leqslant(I(a))^2\leqslant\pi(1-e^{-2a^2}).$$

由此可得

$$\lim_{a\to+\infty}(I(a))^2=\pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}I(a)=\sqrt{\pi}.$$

**例 9** 试计算积分

$$I=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}(x,y).$$

**解** 先作变换

$$x=au,\qquad y=bv,$$

我们得到

$$I=ab\iint\limits_{u^2+v^2<1}\sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}(u,v).$$

再作极坐标变换就得到

$$I=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}ab.$$

其实，我们可以把两个变换合起来，从一开始就令

$$x=ar\cos\theta,\qquad y=br\sin\theta.$$

这样的变换被称为广义极坐标变换（或者：椭圆坐标变换），其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr.$$

### 5.b 三重积分与一般 $n$ 重积分变元替换的例子

对于三重积分的计算，常用的变换有柱坐标变换与球坐标变换．柱坐标变换为：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$$

通常让 $\theta$ 在 $[0,2\pi]$ 中变动. 柱坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r.$$

柱坐标表示的体积微元为

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

请参看图 13-16.

球坐标变换为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\cos\varphi,\\ z=r\sin\varphi.\end{cases}$$

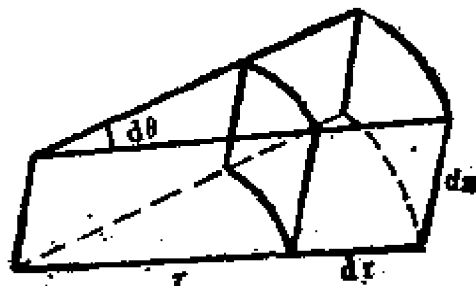


图 13-16

通常让 $\theta$ 在 $[0,2\pi]$ 中变动, $\varphi$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 中变动. 球坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\cos\varphi.$$

球坐标表示的体积微元为

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=r^2\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

请参看图13-17.

**例10** 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

其中的 $D$ 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 围成的锥体 (图 13-18).

**解** 采用柱坐标变换, 我们得到

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1 r^2\mathrm{d}z$$

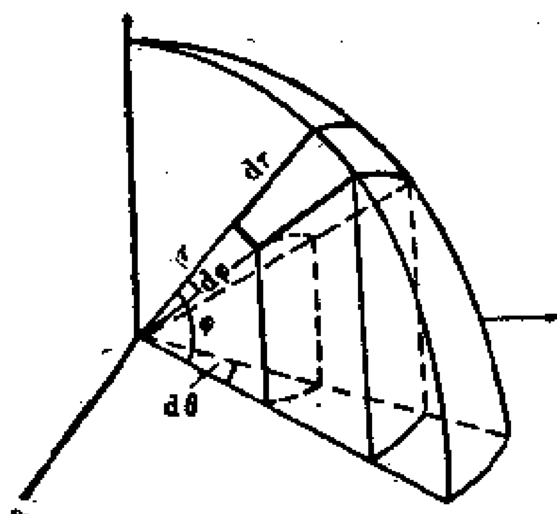



图 13-17

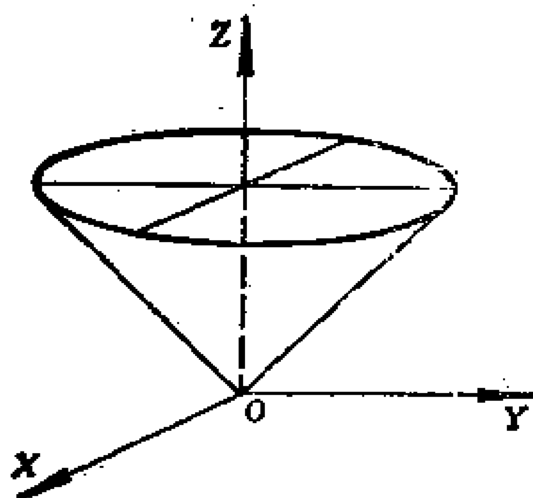



图 13-18

$$=2\pi\int_0^1(r^2-r^3)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

**例11** 试计算

$$I=\iiint_D e^{\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\mu z}\ \mathrm{d}(x,y,z),$$

这里 $D$ 是椭圆柱体

$$\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \ 0\leqslant z\leqslant c\right\}.$$

**解** 作广义柱坐标变换（椭圆柱坐标变换）

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$$

我们得到

$$I=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^c e^{\lambda r^2+\mu z}r\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{\lambda\mu}ab(e^{\lambda}-1)(e^{\mu c}-1).$$

**例12** 试计算

$$I=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}(x,y,z),$$

这里 $D$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所围成的闭区域（图13-19）.

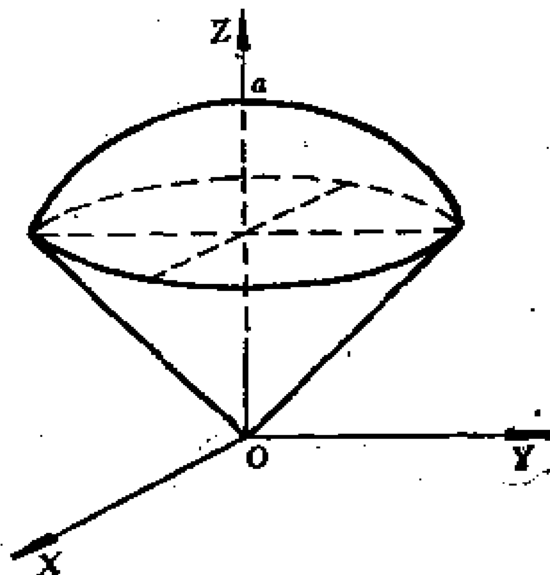



图 13-19

**解** 作球坐标变换可得

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^4\cos\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{5}a^5.$$

**例13** 试计算

$$I=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 2az}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}(x,y,z)$$

**解** 方法一 作通常的球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\cos\varphi,\\ z=r\sin\varphi,\end{cases}$$

这里 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2a\sin\varphi$. 我们得到

$$I=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2a\sin\varphi}r^4\cos\varphi dr$$

$$=\frac{64}{5}\pi a^5\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{32}{15}\pi a^5.$$

方法二 (参看图 13-20) 从积分区域的形状得到启发，我们选用以 $(0,0,a)$ 为极点的球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi,\\y=r\sin\theta\cos\varphi,\\z=r\sin\varphi+a.\end{cases}$$

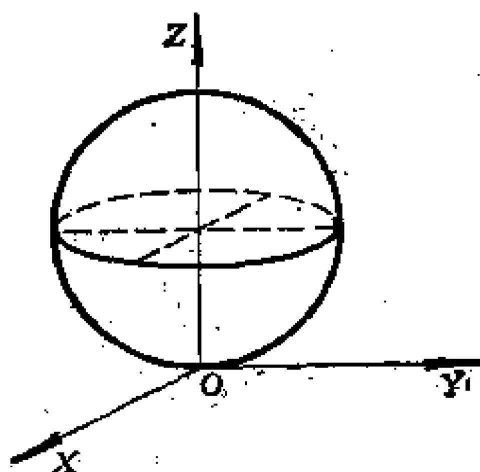



图 13-20

这样求得

$$I=\int_0^a dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(r^2+2ar\sin\varphi+a^2)r^2\cos\varphi d\varphi$$

$$=4\pi\int_0^a(r^2+a^2)r^2dr=\frac{32\pi}{15}a^5.$$

**例14** 试计算

$$I=\iiint_D(x+y-z)(-x+y+z)(x-y+z)d(x,y,z),$$

这里的 $D$ 是闭区域

$$0\leqslant x+y-z\leqslant 1,$$
$$0\leqslant -x+y+z\leqslant 1,$$
$$0\leqslant x-y+z\leqslant 1.$$

**解** 我们作变换

$$\begin{cases} u = x + y - z, \\ v = -x + y + z, \\ w = x - y + z. \end{cases}$$

计算雅可比行列式得

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{4}.$$

通过变元替换计算积分得

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 uvw\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{1}{32}.$$

例15 采用另一种较简便的办法，我们再来计算 $n$ 维球体 $B_n(a)$ 的体积

$$V_n(a) = \int_{B_n(a)} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_n).$$

首先，通过对低维情形的考察，可以猜测

$$V_n(a) = \alpha_n a^n,$$

这里的系数 $\alpha_n$ 不随球的半径 $a$ 的改变而改变. 下面，我们归纳证明这一猜测，并求 $\alpha_n$ 的具体表示.

假设对于维数$\leqslant n-1$ 的情形，上述推测已得到验证. 对于维数$=n$ 的情形，我们可以把 $V_n(a)$ 表示为以下的累次积分

$$\int_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}(x,y) \int_{B_{n-2}(\sqrt{a^2-x^2-y^2})} \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_{n-2}).$$

利用归纳假设，我们求得

$$V_n(a) = \int_{x^2+y^2\leqslant a^2} V_{n-2}(\sqrt{a^2-x^2-y^2})\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$= \alpha_{n-2} \int_{x^2+y^2\leqslant a^2} (a^2-x^2-y^2)^{\frac{n-2}{2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$=\alpha_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a (a^2-r^2)^{\frac{n}{2}-1} r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\alpha_{n-2}a^n\int_0^1 (1-s^2)^{\frac{n}{2}-1} s\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2\pi}{n}\alpha_{n-2}a^n$$

$$=\alpha_n a^n,$$

这里

$$\alpha_n=\frac{2\pi}{n}\alpha_{n-2}.$$

容易求得

$$\alpha_1=V_1(1)=2,$$
$$\alpha_2=V_2(1)=\pi.$$

于是得到

$$\alpha_{2k-1}=\frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!},$$

$$\alpha_{2k}=\frac{\pi^k}{k!},$$

$$V_{2k-1}(a)=\frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1},$$

$$V_{2k}(a)=\frac{\pi^k}{k!}a^{2k}.$$

最后，我们介绍 $n$ 维球坐标变换

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdot\cdots\cdot\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2\cdot\cdots\cdot\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_3=r\sin\theta_2\cdot\cdots\cdot\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n=r\sin\theta_{n-1}, \end{cases}$$

这变换把闭长方体

$$
(5.4) \qquad \begin{cases} 0\leqslant r\leqslant a, \quad 0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi, \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}\leqslant\dfrac{\pi}{2} \end{cases}
$$

变成闭球体

$$
x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2.
$$

在闭长方体 (5.4) 的内部，球坐标变换是单一的. 对这范围内的点，我们来计算变换的雅可比行列式

$$
J_n=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}.
$$

首先，请注意这样的事实：

$$
\frac{\partial x_i}{\partial\theta_{n-1}}=-\frac{r\sin\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}}\frac{\partial x_i}{\partial r},
$$

$$
i=1,2,\cdots,n-1.
$$

我们把 $J_n$ 写成如下的形式：

$$
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \sin\theta_{n-1} \\
\dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_1} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_{n-2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_{n-2}} & 0 \\
\dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial\theta_{n-1}} & r\cos\theta_{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

给这行列式的最后一行加上第一行的 $\lambda$ 倍，这里

$$
\lambda=\frac{r\sin\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}},
$$

我们得到：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \sin\theta_{n-1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-2}} & \cdots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \theta_{n-2}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{r}{\cos\theta_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

由此得到

$$J_n = \frac{r}{\cos\theta_{n-1}} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2})}. \tag{5.5}$$

但我们有

$$x_1 = \tilde{x}_1 \cos\theta_{n-1}, \ \cdots, \ x_{n-1} = \tilde{x}_{n-1}\cos\theta_{n-1},$$

这里 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n-1}$ 是 $n-1$ 维球坐标变换的表示式

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = r\cos\theta_1 \ \cos\theta_2 \cdot \cdots \cdot \cos\theta_{n-3} \ \cos\theta_{n-2}, \\ \tilde{x}_2 = r\sin\theta_1 \ \cos\theta_2 \cdot \cdots \cdot \cos\theta_{n-3} \ \cos\theta_{n-2}, \\ \tilde{x}_3 = \qquad r\sin\theta_2 \cdot \cdots \cdot \cos\theta_{n-3} \ \cos\theta_{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{x}_{n-2} = \qquad r\sin\theta_{n-3} \ \cos\theta_{n-2}, \\ \tilde{x}_{n-1} = \qquad r\sin\theta_{n-2}. \end{cases}$$

所以有

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2})} = J_{n-1}\cos^{n-1}\theta_{n-1}. \tag{5.6}$$

由 (5.5) 和 (5.6) 就得到

$$J_n = r\cos^{n-2}\theta_{n-1} \cdot J_{n-1}. \tag{5.7}$$

我们已经知道

$$J_2 = r. \tag{5.8}$$

从 (5.7) 和 (5.8) 就可得到

$$J_n = r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_{n-1}\cos^{n-3}\theta_{n-2}\cdots\cos\theta_2.$$

**注记** 还有其他表示形式的球坐标变换，例如：

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi_1, \\ x_2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \rho\sin\varphi_1 \quad \cdots\cdots \quad \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = \rho\sin\varphi_1 \quad \cdots\cdots \quad \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

这种形式球坐标变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}$$

$$= \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

对这种形式的变换，通常让 $\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$ 在如下的范围内变动：

$$\rho\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi,$$

$$0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

**例16** 把以下重积分化为单积分：

$$I = \int_{B_n(a)} f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})\ \mathrm{d}(x_1,\cdots,x_n),$$

这里设

$$B_n(a) = \{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2\},$$

并设（一元）函数 $f$ 在闭区间 $[0,a]$ 连续.

**解** 作球坐标变换，我们得到

$$I = \int_0^a \mathrm{d}r\int_S f(r)\,|J_n(r,\theta)|\,\mathrm{d}\theta,$$

这里 $S$ 是满足以下条件的 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$ 的集合：

$$0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta_2,\cdots,\theta_{n-1}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

而 $J_n(r,\theta)$ 是球坐标变换的雅可比行列式：

$$J_n(r,\theta)=r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_{n-1}\cos^{n-3}\theta_{n-2}\cdots\cos\theta_2.$$

显然有

$$J_n(r,\theta)=r^{n-1}J_n(1,\theta).$$

由此可得

$$I=\int_0^a dr\int_S f(r)\,|J_n(r,\theta)|\,d\theta$$

$$=\int_0^a f(r)r^{n-1}dr\int_S |J_n(1,\theta)|\,d\theta.$$

下面，我们设法计算积分

$$\int_S |J_n(1,\theta)|\,d\theta.$$

用等于 1 的式子

$$n\int_0^1 r^{n-1}dr.$$

与之相乘就得到：

$$\int_S |J_n(1,\theta)|\,d\theta$$

$$=n\int_0^1 r^{n-1}dr\ \int_S |J_n(1,\theta)|\,d\theta$$

$$=n\int_0^1 dr\int_S |J_n(r,\theta)|\,d\theta$$

$$=n\int_{B_n(1)} dx$$

$$=nV_n(1),$$

这里 $V_n(1)$ 是 $n$ 维单位球体的体积. 利用这些结果，我们得到：

$$I=\int_0^a dr\int_S f(r)\,|J_n(r,\theta)|\,d\theta$$

$$=\int_0^a f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\int_S |J_n(1,\theta)|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=nV_n(1)\int_0^a f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

在例15中，我们已经求得：

$$V_{2k}(1)=\frac{\pi^k}{k!},\ V_{2k+1}(1)=\frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}.$$

最后，我们得到

$$I=\begin{cases}\dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^a f(r)r^{2k-1}\mathrm{d}r, & n=2k;\\[2ex] \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}\displaystyle\int_0^a f(r)r^{2k}\mathrm{d}r, & n=2k+1.\end{cases}$$

▲

## §6 重积分变元替换定理的证明

在上一节中，我们已经陈述了重积分变元替换的基本定理：

**定理** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集，

$$\varphi:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射，$E\subset\Omega$ 是一个闭若当可测集．如果

(1) $\det\ \mathrm{D}\varphi(t)\neq0,\quad\forall t\in\mathrm{int}E$,

(2) $\varphi$ 在 $\mathrm{int}E$ 中是单一的，

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集，并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$(6.1)\qquad \int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))|\det\ \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

本节就来证明这一基本定理．为了叙述方便，我们把证明过程分成小段，先陈述并证明若干引理，最后完成定理的证明．

## 6.a 若当可测集的变换

对于 $x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$ 和 $y=(y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{R}^n$，我们约定记

$$\rho(x,y)=|x-y|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x^i-y^i|.$$

在涉及若当可测性的讨论中，采用这种距离往往比用欧氏距离更为方便．——因为按照这种距离定义的邻域是便于计算体积的开正方块：

$$U_\rho(a,\eta)=\{x\in\mathbb{R}^n|\rho(x,a)<\eta\}$$
$$=(a^1-\eta,a^1+\eta)\times\cdots\times(a^n-\eta,a^n+\eta).$$

对于 $x\in\mathbb{R}^n$，$\phi\neq S\subset\mathbb{R}^n$，我们又定义

$$\rho(x,S)=\inf_{z\in S}\rho(x,z).$$

对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$，$z\in S$，我们有

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

由此可得

$$\rho(x,S)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,S).$$

由此又可得到

$$|\rho(x,S)-\rho(y,S)|\leqslant\rho(x,y).$$

由此，$\rho(x,S)$ 作为 $x\in\mathbb{R}^n$ 的函数是连续的．如果 $F$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集，$x\notin F$，那么存在 $\delta>0$，使得

$$U_\rho(x,\delta)\cap F=\phi,$$

因而

$$\rho(x,F)\geqslant\delta>0.$$

对于任何一个集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 和 $\eta>0$，我们约定记

$$S_\eta=\{x\in\mathbb{R}^n|\rho(x,S)\leqslant\eta\}.$$

显然 $S_\eta$ 是包含 $S$ 的一个闭集．另外，如果 $S$ 是一个有界集，那么 $S_\eta$ 是包含 $S$ 的一个有界闭集．

**引理1** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，

$$\varphi:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射．则对任何紧致集

$$K\subset\Omega,$$

存在实数 $\lambda=\lambda(K)>0$，使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\lambda|x-y|,\quad \forall x,y\in K.$$

**证明** 我们记 $F=\mathbb{R}^n\setminus\Omega$．变元 $x$ 的连续函数 $\rho(x,F)$ 在紧致集 $K$ 的某一点 $a$ 达到它在 $K$ 上的最小值

$$\zeta=\inf_{x\in K}\rho(x,F).$$

因为 $F$ 是闭集，$a\notin F$，所以

$$\zeta=\rho(x,F)>0.$$

记 $\eta=\frac{1}{2}\zeta>0$．显然

$$K_\eta=\{y\in\mathbb{R}^n\mid\rho(y,F)\leqslant\eta\}$$

是一个紧致集，并且有

$$K\subset K_\eta\subset\Omega.$$

我们记

$$L=\sup_{\xi\in K_\eta}|\mathrm{D}\varphi(\xi)|,$$

$$M=\sup_{\xi\in K}|\varphi(\xi)|,$$

$$\lambda=\max\left\{L,\ \frac{2M}{\eta}\right\}.$$

如果 $x,y\in K$ 使得

$$|x-y|<\eta,$$

那么联结 $x$ 与 $y$ 的闭线段包含在 $K_\eta$ 之中：

$$[x,y]\subset K_\eta,$$

因而有

$$\begin{aligned}&|\varphi(x)-\varphi(y)|\\&\leqslant\Big(\sup_{\xi\in[x,y]}|\mathrm{D}\varphi(\xi)|\Big)\cdot|x-y|\\&\leqslant L|x-y|\leqslant\lambda|x-y|.\end{aligned}$$

如果 $x,y\in K$ 使得

$$|x-y|\geqslant\eta,$$

那么也有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant 2M\leqslant\lambda\eta$$
$$\leqslant\lambda|x-y|. \qquad \square$$

**引理 2** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，

$$\varphi: \ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射. 如果 $A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个零集，它的闭包

$$\mathrm{Cl}A\subset\Omega,$$

那么 $\varphi(A)$ 也是一个零集.

**证明** 因为 $F=\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ 是一个闭集， $\rho(x,F)$ 是变元 $x$ 的连续函数，$\mathrm{Cl}A$ 是一个紧致集，所以存在 $a\in\mathrm{Cl}A$，使得

$$\rho(a,F)=\inf_{x\in\mathrm{Cl}A}\rho(x,F)=\zeta>0.$$

记 $\eta=\frac{1}{3}\zeta$，并记

$$K=A_\eta.$$

显然 $K$ 是一个紧致集. 根据引理 1，存在常数 $\lambda>0$，使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\lambda|x-y|, \quad \forall x,y\in K. \tag{6.2}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，我们取

$$\varepsilon'=\min\left\{\frac{\varepsilon}{\lambda^n}, \ \eta^n\right\}.$$

因为 $A$ 是零集，所以存在开正方块

$$G_1,\cdots,G_r,$$

使得

$$A\subset\bigcup_{j=1}^r G_j, \qquad \sum_{j=1}^r \mathrm{Vol}(G_j)<\varepsilon'.$$

不妨设所有这些 $G_j$ 都与 $A$ 相交（否则可以去掉一些多余的 $G_j$）. 因为

$$l(G_j)<\eta,$$

所以

$$G_j \subset K = \Lambda_\eta.$$

由 (6.2) 式可知，每个 $\varphi(G_j)$ 都包含在某个开正方块 $H_j$ 之中，这开正方块满足条件

$$\mathrm{Vol}(H_j) \leqslant \lambda^n \mathrm{Vol}(G_j).$$

于是，开正方块 $H_1, \cdots, H_r$ 满足条件

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{j=1}^{r} \varphi(G_j) \subset \bigcup_{j=1}^{r} H_j,$$

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(H_j) \leqslant \lambda^n \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Vol}(G_j) < \varepsilon.$$

这证明了 $\varphi(A)$ 是一个零集. □

设 $\varphi$: $\Omega \to \mathbb{R}^m$ 是连续可微映射，$E \subset \Omega$ 是若当可测集. 如果想要考察集合 $\varphi(E)$ 的若当可测性，就需要了解 $\mathrm{Bd}\varphi(E)$ 是否零集. 请不要误以为

$$\mathrm{Bd}\varphi(E) = \varphi(\mathrm{Bd}E).$$

以下的反例说明了这等式一般并不成立.

**例** 考察 $\mathbb{R}^2$ 中的点集

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, \ y \geqslant 0\}$$

和连续可微映射

$$\varphi: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy)$$

(这是复映射 $w = z^2$ 所对应的实映射). 显然 $\varphi$ 在 $E$ 的内部是单一的，并且

$$\det \ \mathrm{D}\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}$$

$$= 4(x^2 + y^2) > 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathrm{int}E.$$

但即使在这样的条件下，仍不能保证

$$\mathrm{Bd} \ \varphi(E) = \varphi(\mathrm{Bd} \ E).$$

实际上，$E$ 的一部分边界点经 $\varphi$ 映射之后变成了 $\varphi(E)$ 的内点。所以对本例的情形有

$$\mathrm{Bd}\varphi(E)\neq\varphi(\mathrm{Bd}E).$$

**引理 3** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集，

$$\varphi:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

是一个映射，$E\subset\Omega$ 是一个有界闭集.

(1) 如果 $\varphi$ 是连续映射，那么 $\varphi(E)$ 也是一个有界闭集；

(2) 如果 $\varphi$ 是连续可微映射，并且满足这样的条件

$$\det\ D\varphi(x)\neq 0,\quad \forall x\in\mathrm{int}E,$$

那么

$$\mathrm{Bd}\varphi(E)\subset\varphi(\mathrm{Bd}E).$$

**证明** (1) 我们指出 $\varphi(E)$ 是一个列紧集，因而也就是有界闭集. 设 $\{v_n\}$ 是 $\varphi(E)$ 中的任意一个点列. 因为 $v_n\in\varphi(E)$，所以存在 $u_n\in E$，使得 $\varphi(u_n)=v_n$，$n=1,2,\cdots$. 因为 $E$ 是有界闭集，也就是列紧集，所以从 $\{u_n\}$ 中可以抽出一个子序列 $\{u_{n_k}\}$，这子序列收敛于 $E$ 中的某点 $x$：

$$\lim u_{n_k}=x\in E.$$

于是有

$$v_{n_k}=\varphi(u_{n_k})\longrightarrow\varphi(x)\in\varphi(E).$$

我们证明了 $\varphi(E)$ 是列紧集——有界闭集.

(2) 因为 $\varphi(E)$ 是有界闭集，所以

$$\mathrm{Bd}\varphi(E)\subset\varphi(E).$$

对于任何 $y\in\mathrm{Bd}\varphi(E)\subset\varphi(E)$，存在 $x\in E$，使得 $\varphi(x)=y$. 我们指出：$x\notin\mathrm{int}E$，——否则由逆映射定理就会得出 $y=\varphi(x)\in\mathrm{int}\varphi(E)$，与所设矛盾. 于是，只能有

$$x\in\mathrm{Bd}E,\quad y\in\varphi(\mathrm{Bd}E).$$

这样，我们证明了

$$\mathrm{Bd}\varphi(E)\subset\varphi(\mathrm{Bd}E).\qquad\square$$

**推论** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射，$E\subset\Omega$ 是一个闭若当可测集．如果

$$\det \mathrm{D}\varphi(x)\neq 0, \ \forall x\in \operatorname{int}E,$$

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集．

## 6.b 简单图形逼近

如果 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $S$ 可以表示为有限个两两无公共内点的闭方块的并集，那么我们就说 $S$ 是一个简单图形．任何简单图形当然都是闭若当可测集．

**引理 4** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射，$E\subset\Omega$ 是一个闭若当可测集．如果

$$\det \mathrm{D}\varphi(t)\neq 0, \quad \forall t\in \operatorname{int}E,$$

那么对任何 $\varepsilon>0$，存在简单图形

$$S=S_\varepsilon\subset \operatorname{int}E,$$

使得

$$v(E\backslash S)<\varepsilon,$$

$$v(\varphi(E)\backslash\varphi(S))<\varepsilon.$$

**证明** 记 $F=\mathbb{R}^n\backslash\Omega$．变元 $t$ 的连续函数 $\rho(t,F)$ 在紧致集 $E$ 的某点 $\tau$ 达到最小值

$$\zeta=\inf_{t\in E}\rho(t,F).$$

因为 $F$ 是闭集，$\tau\notin F$，所以

$$\zeta=\rho(\tau,F)>0.$$

我们记

$$\eta=\frac{1}{3}\zeta.$$

根据引理 1，对于紧致集

$$K=E_\eta\subset\Omega,$$

存在常数 $\lambda > 0$，使得

(6.3) $$|\varphi(s)-\varphi(t)|\leqslant\lambda|s-t|, \quad \forall s,t\in K.$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，我们取

$$\varepsilon'=\min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\lambda^m}, \eta^m\right\}.$$

因为 $\mathrm{Bd}E$ 是零集，所以存在开正方块

$$G_1,\cdots,G_r,$$

使得

$$\mathrm{Bd}E\subset\bigcup_{k=1}^{r}G_k, \quad \sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(G_k)<\varepsilon'<\varepsilon.$$

可以认为所有这些 $G_k$ 都与 $E$ 相交. 因为

$$l(G_k)<\eta,$$

所以

$$G_k\subset E_\eta=K.$$

由 (6.3) 式可知，每一 $\varphi(G_k)$ 都包含在一个开正方块 $H_k$ 之中，这开正方块满足条件

$$\mathrm{Vol}(H_k)\leqslant\lambda^m\mathrm{Vol}(G_k).$$

于是，开正方块 $H_1,\cdots,H_r$ 满足条件

$$\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(H_k)\leqslant\lambda^m\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(G_k)$$

$$<\lambda^m\varepsilon'<\varepsilon.$$

任取一个闭方块 $Q\supset E$. 作 $Q$ 的分割 $P$，使得各 $G_k(k=1,\cdots,r)$ 的边界在 $Q$ 中的部分都被 $P$ 的分界所覆盖. 设 $Q$ 被分成了闭子方块 $\{Q_j\}$. 我们记

$$S=S_\varepsilon=\bigcup_{Q_j\subset\mathrm{int}E}Q_j.$$

显然 $S$ 是简单图形，并且

$$E\backslash S\subset\bigcup_{Q_j\cap\mathrm{Bd}E\neq\phi}Q_j\subset\bigcup_{k=1}^{r}\bar{G}_k,$$

$$\varphi(E)\setminus\varphi(S)\subset\varphi(E\setminus S)$$

$$\subset\varphi\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{r}}\bar{G}_k\right)$$

$$\subset\dot{\bigcup_{k=1}^{r}}\bar{H}_k .$$

因而有

$$v(E\setminus S)\leqslant\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(\bar{G}_k)<\varepsilon,$$

$$v(\varphi(E)\setminus\varphi(S))\leqslant\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Vol}(\bar{H}_k)$$

$$<\varepsilon. \quad \square$$

下面的引理说明，要证明重积分的变元替换公式，只须考虑积分区域最简单的情形.

引理5　设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，$E\subset\Omega$ 是一个闭若当可测集，而

$$\varphi:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射，满足这样的条件：

(1) $\det D\varphi(t)\neq0,\quad \forall t\in\mathrm{int}E$,

(2) $\varphi$ 在 $\mathrm{int}E$ 内是单一的.

如果函数 $f$ 在集合 $\varphi(E)$ 上是连续的，并且对任意闭方块

$$\Pi\subset\mathrm{int}E$$

都有

$$\int_{\varphi(\Pi)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\Pi}f(\varphi(t))|\det D\varphi(t)|\mathrm{d}t ,$$

那么就有

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))\,|\det\ \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**证明** 根据引理 4，对任何 $\varepsilon>0$，存在简单图形

$$S_\varepsilon\subset \mathrm{int}E,$$

使得

$$v(E\backslash S_\varepsilon)<\varepsilon,$$
$$v(\varphi(E)\backslash\varphi(S_\varepsilon))<\varepsilon.$$

对于简单图形 $S_\varepsilon$，应该有

$$(6.4)\qquad \int_{\varphi(S_\varepsilon)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{S_\varepsilon} f(\varphi(t))\,|\det\mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

而我们又有

$$\left|\int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\varphi(S_\varepsilon)} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\int_{\varphi(E)\backslash\varphi(S_\varepsilon)} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant Bv(\varphi(E)\backslash\varphi(S_\varepsilon))$$
$$<B\varepsilon$$
$$(B=\sup_{x\in\varphi(E)}|f(x)|),$$

$$\left|\int_E f(\varphi(t))\,|\det\ \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.-\int_{S_\varepsilon} f(\varphi(t))\,|\det\ \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right|$$
$$=\left|\int_{E\backslash S_\varepsilon} f(\varphi(t))\,|\det\mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant Cv(E\backslash S_\varepsilon)$$
$$<C\varepsilon$$

$$(C=\sup_{t\in E}|f(\varphi(t))\det\ D\varphi(t)|).$$

在 (6.4) 式中让 $\varepsilon\to 0$ 取极限，就得到

$$\int_{\varphi(E)}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))|\det\ D\varphi(t)|\mathrm{d}t. \qquad \square$$

## 6.c 简单变换情形

设 $\varphi^h(t^1,\cdots,t^m)$ 是一个连续可微函数，我们把如下形状的变换叫做简单变换：

$$\begin{cases}x^i=t^i\ (i\neq h),\\ x^h=\varphi^h(t^1,\cdots,t^m).\end{cases}$$

换句话说，简单变换是这样一种连续可微映射

$$\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m,$$

它(至多)只改变 $t=(t^1,\cdots,t^m)\in\Omega$的一个坐标.

我们先对简单变换情形证明重积分的变元替换公式.

**引理6** 设$\Omega$是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集，$E\subset\Omega$是一个闭若当可测集，而

$$\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

是一个简单变换，满足这样的条件：

(1) $\det D\varphi(t)\neq 0,\quad \forall t\in \operatorname{int}E$,

(2) $\varphi$在 $\operatorname{int}E$ 内是单一的.

如果函数 $f$ 在集合 $\varphi(E)$ 上连续，那么

$$\int_{\varphi(E)}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(\varphi(t))|\det D\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

**证明** 必要时给变元重新编号，可设变换 $x=\varphi(t)$ 具有这样的形式

$$\begin{cases}x^i=t^i\ (i=1,\cdots,m-1),\\ x^m=\psi(t^1,\cdots,t^m).\end{cases}$$

根据引理 5，只须对任意闭方块

$$\Pi \subset \operatorname{int} E$$

证明公式

$$\int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\Pi} f(\varphi(t))\,|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

不妨设在 $\Pi$ 上有

$$\det \mathrm{D}\varphi(t) = \frac{\partial \psi}{\partial t^m}(t) > 0$$

(另一种情形可类似地讨论). 把 $\Pi$ 写成:

$$\Pi = \Pi' \times \Pi'' \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R},$$

这里

$$\Pi' = [\alpha^1, \beta^1] \times \cdots \times [\alpha^{m-1}, \beta^{m-1}],$$
$$\Pi'' = [\alpha, \beta].$$

我们有

$$\varphi(\Pi) = \left\{ (x', x^m) \;\middle|\; \begin{matrix} x' \in \Pi', \\ \psi(x', \alpha) \leqslant x^m \leqslant \psi(x', \beta) \end{matrix} \right\},$$

因而

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(\Pi)} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\Pi'} \mathrm{d}x' \int_{\psi(x',\alpha)}^{\psi(x',\beta)} f(x', x^m)\mathrm{d}x^m \\
&= \int_{\Pi'} \mathrm{d}x' \int_\alpha^\beta f(x', \psi(x', t^m)) \frac{\partial \psi(x', t^m)}{\partial t^m}\,\mathrm{d}t^m \\
&= \int\limits_{\Pi'} \mathrm{d}t' \int_\alpha^\beta f(t', \psi(t', t^m)) \frac{\partial \psi(t', t^m)}{\partial t^m}\,\mathrm{d}t^m \\
&= \int\limits_{\Pi} f(\varphi(t))\,|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}$$

### 6.d 一般情形

**引理 7** 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集,

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

是一个连续可微映射, $\tau \in \Omega$. 如果

$$\det D\varphi(\tau)\neq 0,$$

那么存在 $\delta>0$，使得重积分的变元替换公式对于包含在$U_\rho(\tau,\delta)$之中的任何闭若当可测集成立．这就是说，对任何闭若当可测集$E\subset U_\rho(\tau,\delta)$ 和任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f$ 都有

$$(6.5)\qquad \int\limits_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_E f(\varphi(t))|\det D\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

**证明** 因为

$$\det D\varphi(\tau)=\frac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)}{\partial(t^1,\cdots,t^m)}(\tau)\neq 0,$$

所以这行列式的前 $m-1$ 行至少含有一个不等于0的 $m-1$ 阶子式．我们可以给变元 $t^1,\cdots,t^m$ 重新编号，使得 $\det D\varphi(\tau)$ 的 $m-1$ 阶主子式

$$\frac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^{m-1})}{\partial(t^1,\cdots,t^{m-1})}(\tau)\neq 0.$$

仿此，用归纳法就能证明：适当地给变元 $t^1,\cdots,t^m$ 编号，可以使得 $\det D\varphi(\tau)$ 的各阶顺序主子式都不等于0．在下面的讨论中，假定变元 $t^1,\cdots,t^m$ 已经按照这样的要求排列妥当．

我们定义 $m$ 个变换

$$\theta_k:\ \begin{cases} x^i=\varphi^i(t^1,\cdots,t^m), & i\leqslant k,\\ x^j=t^j, & j>k,\end{cases}$$

$$k=1,\cdots,m.$$

容易看出：$\det D\theta_k(\tau)$ 与 $\det D\varphi(\tau)$ 的第 $k$ 个顺序主子式相等，因而

$$\det D\theta_k(\tau)\neq 0,\qquad k=1,\cdots,m.$$

我们可以取 $\delta>0$ 充分小，使得这 $m$ 个变换 $\theta_1,\cdots,\theta_m$ 在开集$U_\rho(\tau,\delta)$ 之上都是微分同胚（这里用到了逆映射定理）．再令

$$\psi_1=\theta_1,$$

$$\psi_k=\theta_k\circ\theta_{k-1}^{-1},\qquad k=2,\cdots,m.$$

又容易看出：$\psi_1=\theta_1$ 是定义于 $U_\rho(\tau,\delta)$ 之上的简单变换，$\psi_k=\theta_k\circ\theta_{k-1}^{-1}$ 是定义于 $\theta_{k-1}(U_\rho(\tau,\delta))$ 之上的简单变换，并且在$U_\rho(\tau,\delta)$ 之上有

$$\varphi=\psi_m\circ\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1,$$

请参看图 13-21。

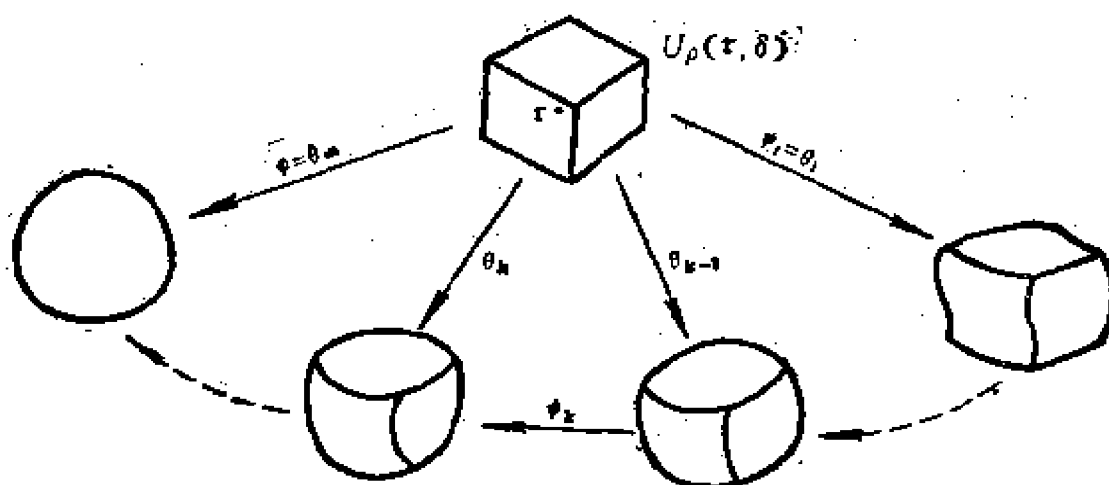



图 13-21

我们已将$\varphi$局部地分解为简单变换的复合. 在此基础上，逐次运用引理 6 就能得到所要证明的结果：

$$\int_{\varphi(E)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\psi_m\circ\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1(E)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\psi_{m-1}\circ\cdots\circ\psi_1(E)} f(\psi_m(u))\,|\det \mathrm{D}\psi_m(u)|\,\mathrm{d}u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\int_E f(\varphi(t))\,|\det \mathrm{D}\varphi(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

我们最后来完成重积分变元替换定理的证明.

**定理** 设$\Omega$是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个连续可微映射， $E \subset \Omega$ 是一个闭若当可测集．如果

(1) $\det D\varphi(t) \neq 0, \quad \forall t \in \operatorname{int} E$,

(2) $\varphi$ 在 $\operatorname{int} E$ 中是单一的，

那么 $\varphi(E)$ 也是一个闭若当可测集，并且对于任何在 $\varphi(E)$ 上连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_{\varphi(E)} f(x) dx = \int_E f(\varphi(t)) |\det \; D\varphi(t)| dt.$$

**证明** 根据引理 5，只须对任意的闭方块 $\Pi \subset \operatorname{int} E$ 证明以下的变元替换公式

$$\int_{\varphi(\Pi)} f(x) dx = \int_{\Pi} f(\varphi(t)) |\det D\varphi(t)| dt.$$

为此目的，我们来考察

$$\Delta(\Pi) = \left| \int_{\varphi(\Pi)} f(x) dx - \int_{\Pi} f(\varphi(t)) |\det D\varphi(t)| dt \right|.$$

对于任意一个 $\tau \in E$，存在一个相应的 $\delta = \delta(\tau) > 0$，使得 $U_\rho(\tau, \delta)$ 满足引理 7 的要求．开集族

$$\left\{ U_\rho\left(\tau, \frac{\delta(\tau)}{2}\right) \middle| \tau \in E \right\}$$

覆盖了有界闭集 $E$．于是存在这开集族中的有限个开集

$$U_\rho\left(\tau_1, \frac{\delta_1}{2}\right), \cdots, U_\rho\left(\tau_q, \frac{\delta_q}{2}\right)$$

$(\delta_1 = \delta(\tau_1), \cdots, \delta_q = \delta(\tau_q))$，使得

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{q} U_\rho\left(\tau_k, \frac{\delta_k}{2}\right).$$

我们记

$$\eta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \cdots, \frac{\delta_q}{2}\right\}.$$

设闭方块 $\Pi\subset \mathrm{int}E$. 我们可以把 $\Pi$ 分割成两两无公共内点的闭子方块

$$\Pi_1,\cdots,\Pi_r,$$

使得各闭子方块的棱长都小于 $\eta$:

$$l(\Pi_k)<\eta,\qquad k=1,\cdots,r.$$

每一个 $\Pi_k(k=1,\cdots,r)$ 必定与某个 $U_\rho\left(\tau_k,\ \frac{\delta_k}{2}\right)$ 相交. 因为 $l(\Pi_k)<\eta\leqslant\frac{\delta_k}{2}$, 所以 $\Pi_k$ 完全包含在 $U_\rho(\tau_k,\delta_k)$ 之中. 于是我们得到

$$\Delta(\Pi_k)=0,\qquad k=1,\cdots,r.$$

闭方块 $\Pi$ 是两两无公共内点的闭子方块 $\Pi_1,\cdots,\Pi_r$ 的并集. 根据 $\Delta(\Pi)$ 的定义并利用积分的可加性, 容易证明

$$0\leqslant\Delta(\Pi)\leqslant\Delta(\Pi_1)+\cdots+\Delta(\Pi_r).$$

由此得出结论

$$\Delta(\Pi)=0.$$

我们最后完成了定理的证明. □

设闭方块 $\Pi \subset \text{int} E$. 我们可以把 $\Pi$ 分割成两两无公共内点的闭子方块

$$\Pi_1, \cdots, \Pi_r,$$

使得各闭子方块的棱长都小于 $\eta$：

$$l(\Pi_k) < \eta, \quad k = 1, \cdots, r.$$

每一个 $\Pi_k (k=1,\cdots,r)$ 必定与某个 $U_\rho\left(\tau_k, \frac{\delta_k}{2}\right)$ 相交. 因为 $l(\Pi_k) < \eta \leqslant \frac{\delta_k}{2}$, 所以 $\Pi_k$ 完全包含在 $U_\rho(\tau_k, \delta_k)$ 之中. 于是我们得到

$$\Delta(\Pi_k) = 0, \quad k = 1, \cdots, r.$$

闭方块 $\Pi$ 是两两无公共内点的闭子方块 $\Pi_1, \cdots, \Pi_r$ 的并集. 根据 $\Delta(\Pi)$ 的定义并利用积分的可加性, 容易证明

$$0 \leqslant \Delta(\Pi) \leqslant \Delta(\Pi_1) + \cdots + \Delta(\Pi_r).$$

由此得出结论

$$\Delta(\Pi) = 0.$$

我们最后完成了定理的证明. □

# 数学分析新讲

## 第三册

张筑生 编著

北京大学出版社

北京大学教材

# 数学分析新讲

## 第三册

张筑生 编著



北京大学出版社



北京大学教材

数学分析新讲

第三册

张筑生　编著

责任编辑：刘　勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　14印张　360千字

1991年9月第一版　1991年9月第一次印刷

印数：0001—2,000册

ISBN7-301-01577-1/O·0254

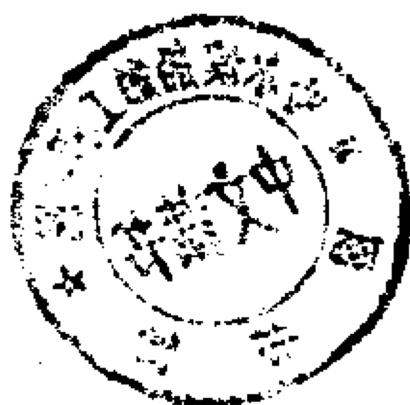
定价：4.30元

## 内容提要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义。改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养。书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用(包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律)。从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排，使传统的材料以新的面貌出现。书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）。

全书共三册。第一册内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用。第二册内容是：一元微积分的进一步讨论，广义积分，多元函数微分学，重积分。第三册内容是：微分学的几何应用，曲线积分与曲面积分，场论介绍，级数与含参变元的积分等。

本书可作为大专院校数学系数学分析基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科技工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书。



# 目　录

## 第五篇　曲线、曲面与微积分

# 第六篇　级数与含参变元的积分

# 第 五 篇

## 曲线、曲面与微积分

# 第十四章　微分学的几何应用

几何学有悠久的历史，至今仍是最重要的数学学科之一，是数学思想的重要源泉。笛卡尔的坐标法，开辟了用分析方法解决几何问题的道路。微积分创立时期的数学家，对于用新方法解决几何问题，有很浓厚的兴趣。从那时开始，一个以无穷小分析方法为特征的几何学分支——微分几何——迅速发展起来。著名的数学家高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)、嘉当(E. Cartan)等人，都对微分几何学的发展作出过永志于史册的贡献。

学习微分几何，当然需要单独的一门课程。但在微积分课程中，仍有必要初步了解无穷小分析方法怎样处理几何问题。

在本章中，所涉及的空间只限于通常的三维欧几里德空间 $\mathbb{R}^3$。另外，对于本章中所讨论的问题，最好把点和向量稍加区别。因此，我们约定用大写字母表示点，用粗黑体字母表示向量。

对于两个向量 $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$，我们用记号

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$

表示这两向量的内积(数量积)，又用记号

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$$

表示这两向量的外积(向量积或叉积)。于是

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

## §1 曲线的切线与曲面的切平面

### 1.a 曲线的切线

考察 $\mathbb{R}^3$ 中的一条参数曲线

$$(1.1)_1 \qquad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in J.$$

在这里，我们假设函数 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 都在区间 $J$ 连续可微并且满足条件

$$(1.2)_1 \qquad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0.$$

如果把从原点(0,0,0)到点$(x,y,z)$的向径记为 $\boldsymbol{r}$，那么参数方程 $(1.1)_1$ 可以写成更紧凑的形式

$$(1.1)_2 \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad t \in J,$$

这里 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$是连续可微的向量值函数，它满足条件

$$(1.2)_2 \qquad \|\boldsymbol{r}'(t)\| \neq 0.$$

当然，$(1.1)_1$ 与相应的$(1.1)_2$本来是一回事。在以下引用时，我们就不再加以区别了，都编号为(1.1)。同时，也就把$(1.2)_1$和$(1.2)_2$都编号为(1.2)。

设 $P_0$ 是曲线(1.1)上的一个定点(其向径 $\overrightarrow{OP_0} = \boldsymbol{r}(t_0)$)，而 $P$ 是同一曲线上的一个动点(其向径 $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(t)$)。我们来考察沿着割线 $P_0P$ 方向的向量

$$\frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

当 $t \to t_0$ 时，割线 $P_0P$ 的极限位置应是曲线在 $P_0$ 点的切线。这

样，我们求得曲线在给定点沿切线方向的一个向量

$$\text{(1.3)} \qquad \boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}.$$

于是，曲线(1.1)在 $P_0$ 点的切线方程可以写成

$$\text{(1.4)} \qquad \frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

这里 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z_0=z(t_0)$。

显式表示的曲线

$$\text{(1.5)} \qquad y=y(x),\quad z=z(x),\qquad x\in I,$$

可以看作参数曲线的特殊情形——以 $x$ 作为参数的情形：

$$x=x,\quad y=y(x),\quad z=z(x),\qquad x\in I.$$

对这种情形，切线的方程可以表示为

$$\text{(1.6)} \qquad \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

或者

$$\text{(1.6)}' \qquad \begin{cases} y=y_0+y'(x_0)(x-x_0), \\ z=z_0+z'(x_0)(x-x_0), \end{cases}$$

这里 $y_0=y(x_0)$，$z_0=z(x_0)$。

再来看由隐式给出的曲线

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

这里假设 $F$ 和 $G$ 都是连续可微函数，并且

$$\text{(1.8)} \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix}=2.$$

于是，在曲线(1.7)的每一个点$(x_0,y_0,z_0)$邻近，我们总可以解出某两个变元作为第三个变元的函数。这样把曲线的方程写成显式形式，然后套用(1.6)或者(1.6)′写出切线方程。但以下的讨论更有启发性：我们来考察方程组(1.7)在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$邻近的一个参数解

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta), \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

——这样的参数解一定存在，因为显式解就是一种参数解。把参数解$x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$代入(1.7)，就得到恒等式

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \\ G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

在$t = t_0$微分这些恒等式，就得到

$$(1.9) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0, \\ \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0. \end{cases}$$

我们介绍一个很有用的算子符号：

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

这里的$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$分别是$OX$轴正方向，$OY$轴正方向和$OZ$轴正方向的单位向量。这样定义的算子$\nabla$，被称为奈布拉算子(或奈布拉算符)。在点$P_0$，奈布拉算子$\nabla$作用于一个可微的数值函数$F(x,y,z)$，产生了一个向量

$$(\nabla F)_{P_0} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}.$$

利用奈布拉算子可以把(1.9)式改写为

$$\begin{cases} (\nabla F)_{P_0} \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0, \\ (\nabla G)_{P_0} \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0. \end{cases}$$

这就是说，曲线(1.7)在点 $P_0$ 的切向量与两向量$(\nabla F)_{P_0}$和$(\nabla G)_{P_0}$正交。因而这切向量平行于

$$(\nabla F)_{P_0} \times (\nabla G)_{P_0} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{P_0}.$$

据此，我们写出曲线(1.7)在点 $P_0$ 的切线方程

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}_{P_0}}. \tag{1.10}$$

平面参数曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in J$$

可以看作空间参数曲线的一种情形：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in J.$$

因而，平面参数曲线的切线方程可以写为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} \quad (z = 0).$$

类似地，平面显式曲线

$$y = y(x), \quad x \in I$$

的切线方程为

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0)\quad (z=0),$$

——这结果当然是大家早已知道了的。

隐式表示的平面曲线

$$F(x,y)=0$$

可以看作这样的空间曲线

$$\begin{cases}\tilde{F}(x,y,z)=F(x,y)=0,\\ \tilde{G}(x,y,z)=z=0.\end{cases}$$

这空间曲线在点

$$\tilde{P}_0=(P_0,0)=(x_0,y_0,0)$$

的切线方程可以写成

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial(\tilde{F},\tilde{G})}{\partial(y,z)_{\tilde{P}_0}}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial(\tilde{F},\tilde{G})}{\partial(z,x)_{\tilde{P}_0}}}\quad (z=0),$$

也就是

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)=0\quad (z=0).$$

### 1.b 曲面的切平面与法线

空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一块参数曲面表示为

$$(1.11)_1\qquad \begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}\quad (u,v)\in\Delta.$$

这里，设 $\Delta$ 是参数平面上的一个开区域，设 $x(u,v)$，$y(u,v)$和 $z(u,v)$是在 $\Delta$ 中连续可微的函数，并设

$$(1.12)_1 \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2.$$

参数曲面块的方程$(1.11)_1$又可写成向量形式

$$(1.11)_2 \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

而条件$(1.12)_1$意味着

$$(1.12)_2 \qquad \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

在下文中，提到(1.11)时，指的就是$(1.11)_1$或者$(1.11)_2$；提到(1.12)时，指的就是$(1.12)_1$或者$(1.12)_2$。

设$P_0$是曲面(1.11)上指定的一个点，其坐标为

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0),\ y(u_0, v_0),\ z(u_0, v_0)).$$

又设

$$u = u(t),\ v = v(t),\ t \in J$$

是参数区域$\Delta$中的一条连续可微的曲线，它满足条件

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0).$$

我们来考察曲面(1.11)上经过点$P_0$的连续可微曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)), \quad t \in J.$$

将上式对$t$求导，就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(u(t), v(t))) = \boldsymbol{r}_u u'(t) + \boldsymbol{r}_v v'(t).$$

由此可知：任何一条这样的曲线，过点$P_0$的切线都在同一张平面上。这平面通过点$P_0$，并且平行于向量

$$(\boldsymbol{r}_u)_{P_0} \text{ 和 } (\boldsymbol{r}_v)_{P_0}.$$

我们把这张平面叫做曲面(1.11)在点$P_0$的**切平面**。切平面上任意一点$P$的向径

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$$

应满足向量方程

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)_{P_0}=0.$$

据此，我们写出切平面的方程

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

过切点并且与切平面正交的直线，称为曲面在这点的法线。根据上面的讨论，我们得知：法线的方向向量为

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)_{P_0}.$$

因而，法线的方程可以写成

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}_{P_0}}.$$

显式表示的连续可微曲面

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D, \tag{1.13}$$

可以看成以$(x,y)$为参数的参数曲面：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y, & (x,y)\in D. \\ z=f(x,y), \end{cases}$$

这曲面过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面的方程可以写成

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}=0,$$

即

$$z=z_0+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

曲面(1.13)的过点 $P_0$ 的法线可以表示为

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1}.$$

再来考察隐式表示的曲面

(1.14) $$F(x,y,z)=0,$$

这里设 $F$ 是连续可微函数，并设

(1.15) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\neq 0.$$

在曲面(1.14)上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，考察这曲面上经过这点的任意一条连续可微的参数曲线

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in I \\ z=z(t), \end{cases}$$

$$(x(t_0),y(t_0),z(t_0))=(x_0,y_0,z_0).$$

我们有恒等式

$$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0.$$

将这式对 $t$ 微分，就得到

$$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)=0.$$

由此可知，任何一条这样的曲线，在点 $P_0$ 的切线都正交于向量

$$(\nabla F)_0=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0.$$

这里，为书写省事，我们记

$$(\nabla F)_0=(\nabla F)_{P_0},\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0},\cdots.$$

通过上面的讨论，我们写出曲面(1.14)在点 $P_0$ 的切平面的方程：向量形式的方程为

$$(\nabla F)_0\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0;$$

坐标形式的方程为

$$(F_x)_0(x-x_0)+(F_y)_0(y-y_0)+(F_z)_0(z-z_0)=0.$$

## §2 曲线的曲率与挠率，弗雷奈公式

曲率描述曲线弯曲的程度。挠率描述曲线偏离平面的程度——挠曲的程度。这两个量对于描述曲线的形状来说，具有决定性的意义。

### 2.a 几个引理

为了以下讨论方便，我们先介绍几个涉及向量值函数导数的引理。

**引理 1** 对于可导的向量值函数 $\boldsymbol{r}_1(t)$和 $\boldsymbol{r}_2(t)$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t))=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1(t)}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{r}_2(t)\right)+\left(\boldsymbol{r}_1(t),\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

**证明** 用坐标分量表示$(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t))$，然后再利用数值函数的求导法则。请读者自己补充证明的细节。 □

**引理 2** 向量值函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t\in J$$

保持定长的充分必要条件是：$\boldsymbol{r}'(t)$与$\boldsymbol{r}(t)$互相垂直，即

$$(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}(t))=0,\quad \forall t\in J.$$

**证明** 我们约定记 $\boldsymbol{r}^2(t)=(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}(t))$。显然有

$$\boldsymbol{r}^2(t)=\text{常值}\Longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^2(t)=0,\quad \forall t\in J.$$

根据引理 1，又有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^2(t)=(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}(t))+(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{r}'(t))$$

$$=2(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}(t))。$$

由此就可得出所要证明的结论。 □

**引理 3** 设$\boldsymbol{r}(t)$是单位长向量：

$$\|\boldsymbol{r}(t)\|=1,\quad \forall t\in J,$$

则$\boldsymbol{r}'(t)$在与$\boldsymbol{r}(t)$正交的方向上，它的模$\|\boldsymbol{r}'(t)\|$表示向量$\boldsymbol{r}(t)$转动的角度相对于参数$t$的变化率。

**证明** 我们用$\Delta\theta$表示从向量$\boldsymbol{r}(t)$到向量$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$的转角（图 14-1），则有

$$2\sin\frac{\Delta\theta}{2}=\|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\|,$$

$$\Delta\theta=2\arcsin\frac{\|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\|}{2}。$$

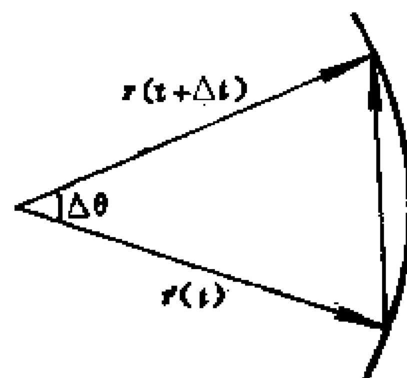


图 14-1

于是有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{2\arcsin\frac{\|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\|}{2}}{\Delta t}\right|$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{2\cdot\frac{\|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\|}{2}}{\Delta t}\right|$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right\|$$

$$=\|\boldsymbol{r}'(t)\|。\qquad \square$$

## 2.b 自然参数，曲率

考察曲线

(2.1) $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t\in J.$$
这里假设 $\boldsymbol{r}(t)$ 连续可微足够多次，并且满足条件

(2.2) $$\boldsymbol{r}'(t)\neq 0,\quad \forall t\in J.$$
曲线(2.1)的弧长可按下式计算

$$s=\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{r}'(t)\|\mathrm{d}t,$$

这里的 $t_0$ 是量测起始点的参数值。因为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\|\boldsymbol{r}'(t)\|>0,$$

根据反函数定理，可以断定 $t$ 是 $s$ 的连续可微足够多次的函数：

$$t=t(s).$$
于是，可以用弧长作为曲线的参数，把(2.1)改写成

(2.3) $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s)).$$
以下，我们把弧长参数 $s$ 叫做自然参数。为避免记号繁琐，对于不致于混淆的情形，就简单地把(2.3)写成

(2.4) $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).$$

在本章中，我们约定用圆黑点"·"表示对弧长参数求导。于是

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{r}'\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}'(t)/\|\boldsymbol{r}'(t)\|.$$

由此得知，$\dot{\boldsymbol{r}}$ 是一个单位长向量

$$\|\dot{\boldsymbol{r}}\|=1.$$

于是，$\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ 是曲线(2.4)在 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的单位长切向量。我们约定用记号

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$$

表示这单位长切向量。

请注意，为了讨论方便，我们约定把切向量看成自由向量，因而可以把各切向量的起点都移到坐标原点。读者以后逐渐能体会到这种看法的好处。

将 $T(s)=\dot{r}(s)$再对 $s$ 求导，我们得到

$$\dot{T}(s)=\ddot{r}(s).$$

既然 $T(s)=\dot{r}(s)$是单位长向量，那么向量 $\dot{T}(s)=\ddot{r}(s)$就在与 $T(s)$正交的方向上，并且 $\|\dot{T}(s)\|=\|\ddot{r}(t)\|$表示切向量 $T(s)$对弧长 $s$ 的转动速率

$$\|\dot{T}(s)\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,$$

——请参看图 14-2。

我们把切向量 $T(s)$相对于弧长 $s$ 的转动速率$\|\dot{T}(s)\|=\|\ddot{r}(s)\|$叫做曲线(2.4)在给定点的曲率，并把它记为$k(s)$。于是

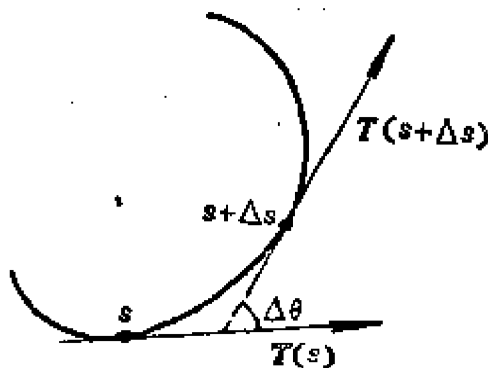


图 14-2

$$k(s)=\|\dot{T}(s)\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

曲率$k(s)$的倒数

$$\rho(s)=\frac{1}{k(s)}$$

被称为曲率半径。与$k(s)$一样，曲率半径 $\rho(s)$也表示曲线弯曲的程度。只不过 $\rho(s)$越小表示曲线弯曲得越厉害。对于 $k(s)=0$的情形，我们约定 $\rho(s)=+\infty$。

**例 1** 考察圆周的方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

换成弧长参数

$$s = \int_0^t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt = at,$$

圆周的方程写成

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{s}{a}, \\ y = a\sin\dfrac{s}{a}, \end{cases} \quad s \in [0, 2\pi a].$$

利用以弧长为参数的方程，容易求得曲率 $k$ 和曲率半径 $\rho$：

$$\begin{aligned} k(s) &= \| \ddot{r}(s) \| \\ &= \sqrt{(\ddot{x}(s))^2 + (\ddot{y}(s))^2} = \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)} = a.$$

**例 2** 某段曲线为直线段的充分必要条件是：在这段曲线上曲率处处为 0，即

$$k \equiv 0.$$

**证明** 如果某段曲线为直线段，那么这段曲线以弧长为参数的方程可以写成

$$r = r_0 + se, \quad s \in I.$$

这里 $e$ 是长度为 1 的常向量. 将上面的方程微分两次就得到

$$\ddot{r} \equiv 0.$$

因而

$$k(s) = \| \ddot{r}(s) \| = 0, \quad \forall s \in I.$$

这证明了条件的必要性。

再来证明条件的充分性。假设

$$k(s)=\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|=0, \quad \forall s\in I,$$

则有

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=0, \quad \forall s\in I.$$

于是

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{e} \quad (常向量).$$

由此又得到

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}_0+s\boldsymbol{e}, \quad s\in I.$$

这证明了条件的充分性。 □

### 2.c 弗雷奈标架，挠率

曲线上曲率等于0的点被称为平直点。我们来考察不含平直点的一段曲线。在这段曲线上

$$k(s)=\|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\|=\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|\neq 0,$$

所以可以定义

$$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{\|\dot{\boldsymbol{T}}(s)\|}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\|}.$$

这是正交于$\boldsymbol{T}(s)$的一个单位长向量，我们把它叫做曲线在给定点的**主法线向量**。利用切向量$\boldsymbol{T}(s)$和主法线向量$\boldsymbol{N}(s)$，又可作出第三个向量

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s).$$

因为$\boldsymbol{T}(s)$与$\boldsymbol{N}(s)$是互相正交的单位向量，所以

$$\|\boldsymbol{B}(s)\|=\|\boldsymbol{T}(s)\|\cdot\|\boldsymbol{N}(s)\|=1.$$

由此可知：$\boldsymbol{B}(s)$是与$\boldsymbol{T}(s)$和$\boldsymbol{N}(s)$都正交的单位向量。我们把

$\boldsymbol{B}(s)$叫做曲线在给定点的副法线向量。在曲线上的给定点，由切向量 $\boldsymbol{T}(s)$与主法线向量 $\boldsymbol{N}(s)$决定的平面，叫做曲线在这点的**密切平面**；由切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 与副法线向量 $\boldsymbol{B}(s)$决定的平面，叫做曲线在这点的**从切平面**；由主法线向量 $\boldsymbol{N}(s)$与副法线向量 $\boldsymbol{B}(s)$决定的平面，叫做曲线在这点的**法平面**。

这样，在曲线的每一个非平直点，我们建立了一个规范正交标架$\{\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$。这标架被称为弗雷奈(Frenet)标架。由这标架决定的三面形被称为基本三面形。

当点沿着曲线运动时，弗雷奈标架也随着运动(象这样的标架被称为活动标架)。我们需要考察弗雷奈标架运动的状况。先证明一个引理。

**引理4** 设$\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)$是向量值函数，对每一参数值 $t$ 它们都组成一个规范正交标架$\{\boldsymbol{e}_1(t),\boldsymbol{e}_2(t),\boldsymbol{e}_3(t)\}$。如果将

$$\boldsymbol{e}'_i(t)\quad(i=1,2,3)$$

按这标架展开

$$\boldsymbol{e}'(t)=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j(t),$$

那么展开的系数应是反对称的，即

$$\omega_{ji}=-\omega_{ij},\quad i,j=1,2,3.$$

由此可知

$$\omega_{ii}=0,\quad i=1,2,3.$$

**证明** 我们有

$$(\boldsymbol{e}_i(t),\boldsymbol{e}_j(t))=\begin{cases}1, & \text{对于 } i=j,\\ 0, & \text{对于 } i\neq j.\end{cases}$$

将这式对 $t$ 求导得到

$$(\boldsymbol{e}'_i(t),\boldsymbol{e}_j(t))+(\boldsymbol{e}_i(t),\boldsymbol{e}'_j(t))=0.$$

这就是

$$\omega_{ij}+\omega_{ji}=0,\quad i,j=1,2,3. \qquad \square$$

**定理** 对于曲线的弗雷奈标架

$$\{\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\},$$

我们有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}= & k\boldsymbol{N},\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-k\boldsymbol{T} & +\tau\boldsymbol{B},\\ \dot{\boldsymbol{B}}= & -\tau\boldsymbol{N},\end{cases}$$

这里 $k=k(s)$ 是曲线在给定点的曲率。

**证明** 对于标架$\{\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$用上面的引理就得到

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}= & \omega_{12}\boldsymbol{N}+\omega_{13}\boldsymbol{B},\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-\omega_{12}\boldsymbol{T} & +\omega_{23}\boldsymbol{B},\\ \dot{\boldsymbol{B}}=-\omega_{13}\boldsymbol{T}-\omega_{23}\boldsymbol{N}.\end{cases}$$

但我们知道

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\|\dot{\boldsymbol{T}}\|\boldsymbol{N}=k(s)\boldsymbol{N},$$

所以有

$$\omega_{12}=k,\quad \omega_{13}=0.$$

我们记

$$\omega_{23}=\tau.$$

于是就得到

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}= & k\boldsymbol{N},\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-k\boldsymbol{T} & +\tau\boldsymbol{B},\\ \dot{\boldsymbol{B}}= & -\tau\boldsymbol{N}.\end{cases} \qquad \square$$

上面定理中所给出的公式被称为弗雷奈公式。该公式中的系

数 $\tau$ 被称为曲线在给定点的挠率。下面，我们来说明挠率 $\tau$ 的几何意义。

引理5 设 $\boldsymbol{r}(t)$是一个 $n$ 阶连续可微的向量值函数，则有以下的泰勒展式

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)+(t-t_0)\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\boldsymbol{R}_{n+1}(t),$$

其中的 $\boldsymbol{R}_{n+1}(t)$满足条件

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\|\boldsymbol{R}_{n+1}(t)\|}{|t-t_0|^n}=0. \tag{2.5}$$

我们还可以把 $\boldsymbol{r}(t)$的泰勒展式写成如下形式：

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)+(t-t_0)\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+o(|t-t_0|^n),$$

这里的小 $o$ 余项表示满足条件(2.5)的向量值函数 $\boldsymbol{R}_{n+1}(t)$。

证明 设 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$。将 $\boldsymbol{r}(t)$的各分量按照带拉格朗日余项的泰勒公式展开就得到

$$x(t)=x(t_0)+(t-t_0)x'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}x''(t_0)+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}x^{(n)}(t_0+\theta_1(t-t_0)),$$

$$y(t)=y(t_0)+(t-t_0)y'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}y''(t_0)+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}y^{(n)}(t_0+\theta_2(t-t_0)),$$

$$z(t)=z(t_0)+(t-t_0)z'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}z''(t_0)$$

$$+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}z^{(n)}(t_0+\theta_3(t-t_0)).$$

若记

$$\boldsymbol{R}_{n+1}(t)=\frac{(t-t_0)^n}{n!}\{(x^{(n)}(t_0+\theta_1(t-t_0))-x^{(n)}(t_0))\boldsymbol{i}$$

$$+(y^{(n)}(t_0+\theta_2(t-t_0))-y^{(n)}(t_0))\boldsymbol{j}$$

$$+(z^{(n)}(t_0+\theta_3(t-t_0))-z^{(n)}(t_0))\boldsymbol{k}\},$$

则有

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)+(t-t_0)\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)$$

$$+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\boldsymbol{R}_{n+1}(t).$$

利用 $x^{(n)}(t)$, $y^{(n)}(t)$和 $z^{(n)}(t)$的连续性就得到

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\|\boldsymbol{R}_{n+1}(t)\|}{|t-t_0|^n}=0. \qquad \square$$

对于用自然参数表示的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，利用上面的引理可以得到

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(s_0)+(s-s_0)\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$$

$$+\frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)+o(|s-s_0|^2).$$

按照定义，切向量 $\boldsymbol{T}(s_0)$与主法线向量 $\boldsymbol{N}(s_0)$张成曲线在给定点的密切平面 $\Pi_0$。因为

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)=\boldsymbol{T}(s_0),\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)=k\boldsymbol{N}(s_0),$$

所以

$$\boldsymbol{r}(s_0)+(s-s_0)\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)+\frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)$$

是在密切平面 $\Pi_0$ 上的点。我们看到，在给定点邻近，曲线离密切平面 $\Pi_0$ 的距离是高于二阶的无穷小量。在这个意义上，我们说：密切平面 $\Pi_0$ 是在给定点与曲线贴合得最紧密的一张平面。在曲线上任何一点，副法线向量 $\boldsymbol{B}(s)$是该点密切平面的法线，而 $|\tau|=\|\dot{\boldsymbol{B}}\|$。这样，我们了解到挠率 $\tau$ 的几何意义：$|\tau|$表示副法线向量 $\boldsymbol{B}$ 相对于弧长的转动速率，也就是密切平面相对于弧长的转动速率。因此，$\tau$表示了曲线挠曲的程度(偏离平面曲线的程度)。

**例 3** 设某段曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$上没有平直点，则这段曲线为平面曲线的充分必要条件是：在这段曲线上挠率处处为 0，即$\tau\equiv 0$。

**证明** 先证条件的必要性。设某段曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在平面 $\Pi$ 上，则

$$\boldsymbol{T}=\dot{\boldsymbol{r}} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{N}=\ddot{\boldsymbol{r}}/k(s)$$

都在这平面上。于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ 是常向量(垂直于平面 $\Pi$ 的单位向量)，因而

$$|\tau|=\|\dot{\boldsymbol{B}}\|=0.$$

再来证明条件的充分性。设挠率 $\tau\equiv 0$，则

$$\dot{\boldsymbol{B}}=-\tau\boldsymbol{N}=0.$$

因而 $\boldsymbol{B}$ 是一个常向量。考察函数

$$\varphi(s)=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{r}(s)),$$

因为

$$\dot{\varphi}(s)=(\boldsymbol{B},\dot{\boldsymbol{r}}(s))=0,$$

所以

$$\varphi(s)=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{r}(s))=C\ （常数）.$$

我们看到：曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在平面

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}=C$$

之上。 □

**推论** 对于平面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，弗雷奈公式可以写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}= & k\boldsymbol{N},\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-k\boldsymbol{T}.\end{cases}$$

### 2.d 曲率与挠率的计算公式

如果曲线方程以弧长作为参数：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),$$

那么曲率与挠率的计算都比较简单。将$\boldsymbol{r}(s)$对弧长参数 $s$ 求导并利用弗雷奈公式整理求导的结果，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}&=\boldsymbol{T},\\ \ddot{\boldsymbol{r}}&=k\boldsymbol{N},\\ \dddot{\boldsymbol{r}}&=-k^2\boldsymbol{T}+\dot{k}\boldsymbol{N}+k\tau\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

由此可得

$$k=\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|,$$

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|^2},$$

在这里，我们用记号 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 表示向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的混合积：

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}.$$

对于更一般的参数，我们有

$$\boldsymbol{r}' = \dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

$$\boldsymbol{r}'' = \dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \ddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

$$\boldsymbol{r}''' = \dot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3} + 3\ddot{\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dddot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3.$$

因为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = k\boldsymbol{N},$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = k\boldsymbol{B},$$

所以

$$\|\ddot{\boldsymbol{r}}\| = \|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}\| = k.$$

于是，我们得到

$$\|\boldsymbol{r}'\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

$$\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\| = \|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}\|\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 = k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3,$$

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''') = (\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6.$$

由此得到一般参数曲线的曲率与挠率的计算公式：

$$k = \frac{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|}{\|\boldsymbol{r}'\|^3},$$

$$\tau = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{k^2} = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|^2}.$$

## 2.e 关于曲线运动的讨论

最后，我们利用本节得到的结果，考察质点的曲线运动。设运动质点的轨迹是曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),$$

这里的参数 $t$ 是时间。将 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间参数 $t$ 求导，就可求得运动的速度与加速度。运动的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\boldsymbol{T},$$

这里

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

是速度的数值——路程对时间的导数。运动的加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}+v^2k\boldsymbol{N}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{N},\end{aligned}$$

这里 $k$ 是运动轨迹的曲率，$\rho$ 是曲率半径。

我们看到，运动的速度沿着轨迹曲线的切线方向，其数值等于$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，运动的加速度分解为两个分量——切向加速度与法向加速度。切向加速度沿运动轨迹的切线方向，其数值为

$$a_T=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}。$$

法向加速度沿运动轨迹的主法线方向，其数值与速度的平方成正

比，与曲率半径成反比：

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}.$$

## §3 曲面的第一与第二基本形式

在本节中，我们考察曲面上曲线的弧长与曲率，从而引出第一基本形式与第二基本形式。

设曲面的参数方程为

$$(3.1) \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

为了讨论方便，我们假定 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 连续可微足够多次并且满足正则条件：

$$(3.2) \qquad \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \Delta.$$

在这条件下，曲面在每一点有确定的法线（因而有确定的切平面）。我们约定用记号 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u, v)$ 表示曲面在给定点的单位法向量：

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}.$$

### 3.a 曲面上曲线的弧长与曲面的第一基本形式

我们来考察曲面（3.1）上的一条连续可微曲线

$$(3.3) \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)), \quad t \in J,$$

这里假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 都在区间 $J$ 上连续可微。将(3.3)式对 $t$ 求导得

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v.$$

曲线（3.3）的弧长微元可以表示为

$$\mathrm{d}s = \|\boldsymbol{r}'\|\mathrm{d}t = \pm\|\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t\| = \pm\|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\|.$$

因而

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\|^2 \\ &= (\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}) \\ &= E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,\end{aligned}$$

这里

$$E = (\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u), \quad F = (\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)$$
$$G = (\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v)。$$

我们约定记

$$I(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

于是，曲面（3.1）上的曲线的弧长，可按下式计算：

$$\begin{aligned}S &= s_0 + \int_{t_0}^{t}\sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t \\ &= s_0 + \int_{t_0}^{t}\sqrt{I\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

我们把微分 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 的二次型

$$\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

叫做曲面的*第一基本形式*。曲面上曲线的弧长取决于这曲面的第一基本形式。在下一章中我们还将看到，曲面块的面积也取决于这曲面的第一基本形式。因此我们说：第一基本形式决定了曲面的度量性质。

### 3.b 曲面上曲线的曲率与曲面的第二基本形式

考察曲面上曲线的自然参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(s),v(s)), \quad s\in J. \tag{3.4}$$

为了讨论方便，我们假设 $u(s)$ 和 $v(s)$ 至少是二阶连续可微的。对（3.4）式求导得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2+\boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2}+\boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}.$$

因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0,$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2+2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}s^2},$$

这里

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu},\quad M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},\quad N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}.$$

我们把关于 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 的二次型

$$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$$

叫做曲面的**第二基本形式**。利用第一和第二基本形式的记号，可以把上面求得的式子写成

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{3.5}$$

如果把 $\boldsymbol{n}$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 之间的夹角记为 $\theta$，那么

$$\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|\cos\theta=k\cos\theta,$$

其中的 $k=\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|$ 是曲线（3.4）的曲率，于是上面所得的式子（3.5）又可写成

(3.6)
$$k\cos\theta=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

我们把

$$k_n=k_n(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\frac{\mathrm{II}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)}{\mathrm{I}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)}$$

叫做曲面在给定点沿方向 $(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$(或者说沿方向 $\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$)的法曲率。上面的(3.6)式又可写成

(3.7)
$$k\cos\theta=k_n.$$

在曲面的给定点，通过曲面法线的任何一张平面都被称为法面。法面截曲面所得到的曲线被称为法截线。请读者注意，每一个切方向

$$\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$$

与曲面的法线共同决定一张法面，从而也共同决定一条法截线。容易看出：法截线的主法线向量在曲面过该点的法线上，因而有

$$\theta=0 \text{ 或者 } \theta=\pi.$$

由(3.7)式可知，法截线在给定点的曲率为

$$\pm k_n.$$

换句话说，在曲面的给定点，沿任意给定的切方向，法曲率的绝对值 $|k_n|$ 就是法截线的曲率。有了第一与第二基本形式，就能计算沿任何方向的法曲率，从而也就能够了解曲面在给定点沿任何方向的弯曲程度。法曲率的倒数

$$\rho_n=\frac{1}{k_n}$$

被称为法曲率半径。(3.7)式又可以写成

(3.8)
$$\rho=\rho_n\cdot\cos\theta.$$

为了给(3.8)式一个直观的几何解释，我们设法把曲率半径看成向量：在曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的非平直点，约定把向量

$$\rho N = \frac{1}{k} N = \frac{1}{k^2} \ddot{r}$$

看作曲线在这点的曲率半径。这样，曲率半径越短意味着曲线在这点弯曲得越厉害。类似地，在曲面 $r = r(u, v)$ 的给定点，我们约定把向量

$$\rho_n n$$

看作曲面在这点（沿给定切方向）的法曲率半径。请注意，看作向量的法曲率半径与相应的法截线的曲率半径相等。在作了上面这些约定之后，我们可以把(3.8)式解释为：

**定理** 在曲面上，过给定点并且具有共同切方向的所有曲线当中，法截线的曲率半径最长，其他曲线的曲率半径等于法曲率半径在该曲线的密切平面上的投影（请参看图14-3）。

这一结果被称为默尼埃（Meusnier）定理。

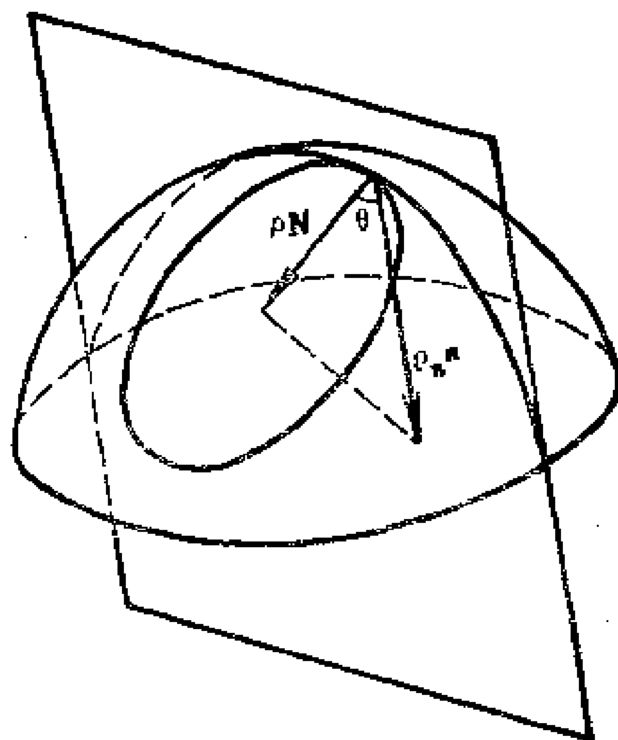



图14-3 默尼埃定理图示

在结束这一章的时候，为了以后讨论的需要，我们来解释多元函数在闭集上的可微性。

为了讨论多元函数 $f$ 在点 $x_0$ 的可微性，首先应要求这函数在该点的某个邻域内有定义。设函数 $f$ 在闭集 $F$ 上有定义。如果能将函数 $f$ 的定义扩充到某个包含了 $F$ 的开集 $G$ 上，并且扩充后的函数是可微的(或连续可微的)，那么我们就说函数 $f$ 在闭集 $F$ 上是可微的(或连续可微的)。

这样，以后的讨论中所出现的，定义于闭区域上的连续可微的参数曲面，就有了明确的含义。

# 第十五章　第一型曲线积分与第一型曲面积分

## §1　第一型曲线积分

我们已经知道怎样计算连续可微曲线的弧长(第六章§3)。在本节中，将对曲线弧长的概念作更细致的说明，然后讨论第一型曲线积分。

### 1.a　可求长曲线

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的一条连续的参数曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t\in[\alpha,\beta]. \tag{1.1}$$

如果曲线(1.1)的起点与终点重合，即

$$\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\beta),$$

那么我们就说这是一条闭曲线。如果曲线(1.1)没有自交点(即除非是 $t'=\alpha,t''=\beta$，只要 $t'<t''$，就有 $\boldsymbol{r}(t')\neq\boldsymbol{r}(t'')$)，那么我们就说这曲线是简单曲线。参数方程(1.1)用分量表示就是

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta].\\ z=z(t), \end{cases} \tag{1.1'}$$

设 $P'=(x(t'),y(t'),z(t'))$和$P''=(x(t''),y(t''),z(t''))$是曲线(1.1)上的两点，则联结这两点的直线段的长度可以表示为

$$\sqrt{(x(t')-x(t''))^2+(y(t')-y(t''))^2+(z(t')-z(t''))^2},$$

也就是

$$\|\boldsymbol{r}(t')-\boldsymbol{r}(t'')\|.$$

假设 $\gamma$ 是一条简单曲线，它的参数方程是(1.1)。考察参数区间$[\alpha,\beta]$的任意一个分割

$$\pi_k: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

对于 $k=1,\cdots,n$，将曲线 $\gamma$ 上参数为 $t_{k-1}$ 与 $t_k$ 的点用直线段联结起来，我们得到内接于 $\gamma$ 的一条折线。这折线的长度可以表示为

$$\lambda(\gamma,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \| \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \|.$$

**定义1** 如果

$$\sup_{\pi} \lambda(\gamma,\pi) < +\infty,$$

那么我们就说 $\gamma$ 是一条可求长曲线，并约定把

$$l(\gamma) = \sup_{\pi} \lambda(\gamma,\pi)$$

叫做曲线 $\gamma$ 的弧长。

**定理1** 设 $\gamma$ 是用参数方程(1.1)表示的一条简单连续曲线，则$\gamma$ 可求长的充分必要条件是存在有穷极限：

$$\lim_{|\pi|\to 0} \lambda(\gamma,\pi).$$

**证明** 充分性 设存在有穷极限

$$\lim_{|\pi|\to 0} \lambda(\gamma,\pi) = I.$$

则对 $\varepsilon = 1$，可选择 $\delta > 0$，使得

$$|\pi'| < \delta \Rightarrow \lambda(\gamma,\pi') < I + 1.$$

现在设 $\pi$ 是区间$[\alpha,\beta]$的任意一个分割。我们可以用增加分点的办法将 $\pi$ 进一步细分为 $\pi'$，使得

$$|\pi'| < \delta,$$

于是就有

$$\lambda(\gamma,\pi)\leqslant\lambda(\gamma,\pi')<I+1.$$

这证明了

$$\sup_{\pi}\lambda(\gamma,\pi)<I+1<+\infty.$$

**必要性** 如果

$$\sup_{\pi}\lambda(\gamma,\pi)=J<+\infty,$$

那么对任何 $\varepsilon>0$，存在$[\alpha,\beta]$的分割

$$\pi_0:\quad \alpha=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_{m+1}=\beta,$$

使得

$$J-\frac{\varepsilon}{2}<\lambda(\gamma,\pi_0)\leqslant J.$$

由于函数 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$在闭区间$[\alpha,\beta]$一致连续，存在$\delta,0<\delta<|\pi_0|$，使得只要

$$|t'-t''|<\delta$$

就有

$$\|\boldsymbol{r}(t')-\boldsymbol{r}(t'')\|<\frac{\varepsilon}{4m}$$

(这里 $m$ 是分割 $\pi_0$ 在$(\alpha,\beta)$内的分界点的数目)。现在设 $\pi$ 是$[\alpha,\beta]$的任意一个分割，满足这样的条件

$$|\pi|<\delta.$$

将 $\pi_0$ 和 $\pi$ 的分点合在一起，得到$[\alpha,\beta]$的一个分割 $\pi_1$。显然有

$$J-\frac{\varepsilon}{2}<\lambda(\gamma,\pi_0)\leqslant\lambda(\gamma,\pi_1)\leqslant J.$$

下面来证明

$$J-\varepsilon<\lambda(\gamma,\pi)\leqslant J.$$

为书写简便，我们引入记号

$$\varphi(t',t'') = \|r(t') - r(t'')\|.$$

和式

$$\lambda(\gamma,\pi) = \sum_i \varphi(t_{i-1},t_i)$$

可以拆成两部分：

$$\lambda(\gamma,\pi) = \sum_j{}' \varphi(t_{j-1},t_j) + \sum_k{}'' \varphi(t_{k-1},t_k),$$

其中第一部分所涉及的参数区间$[t_{j-1},t_j]$内部不含有$\pi_0$的分点；第二部分所涉及的参数区间内部含有$\pi_0$的分点（后一类区间总数不超过$m$个）。和数$\lambda(\gamma,\pi_1)$与和数$\lambda(\gamma,\pi)$相比较，差别只是第二部分和数中的每一项$\varphi(t_{k-1},t_k)$被改变为

$$\varphi(t_{k-1},\tau) + \varphi(\tau,t_k).$$

因为

$$\begin{aligned}
&\varphi(t_{k-1},\tau) + \varphi(\tau,t_k) - \varphi(t_{k-1},t_k) \\
&\leqslant \varphi(t_{k-1},\tau) + \varphi(\tau,t_k) \\
&< \frac{\varepsilon}{2m},
\end{aligned}$$

所以

$$\lambda(\gamma,\pi_1) - \lambda(\gamma,\pi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}
&J \geqslant \lambda(\gamma,\pi) \\
&\geqslant \lambda(\gamma,\pi_1) - \frac{\varepsilon}{2} > J - \varepsilon.
\end{aligned}$$

我们证明了

$$\lim_{|\pi|\to 0} \lambda(\gamma,\pi) = J. \qquad \square$$

**推论** 设 $\gamma$: $r=r(t), t\in[\alpha,\beta]$, 是一条连续可微(或分段连续可微)的参数曲线，则 $\gamma$ 是可求长的，并且

$$l(\gamma)=\int_\alpha^\beta\|r'(t)\|\mathrm{d}t.$$

### 1.b 第一型曲线积分

设有一段质地不均匀的直金属线 $L$ 放置在 $OX$ 轴上，所占的位置是闭区间$[a,b]$.设这金属线在点 $x$ 处的线密度等于 $\rho(x)$①，我们来求金属线 $L$ 的质量 $m$．这是一道典型的定积分应用题．利用微元法，很容易写出计算公式

$$m=\int_L\rho(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x.$$

再来考虑一个类似的问题：如果 $L$ 不是直金属线，而是一段弯曲的金属线，那么 $L$ 的质量又该怎样计算？为了解答这问题，我们用一串分点

$$A=P_0,P_1,\cdots,P_n=B$$

把 $L$ 分成 $n$ 小段(这里 $A$ 和 $B$ 是 $L$ 的两端点)。在 $P_{j-1}$ 到$P_j$ 这一小段曲线弧上任意选取一点

$$Q_j=(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)$$

并把这小段曲线弧的长度记为

$$\Delta s_j.$$

于是，从 $P_{j-1}$ 到 $P_j$ 这一小段金属线的质量可以近似地表示为

$$\Delta m_j=\rho(Q_j)\Delta s_j=\rho(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)\Delta s_j.$$

---

① 设 $x$ 是线状材料 $L$ 上的一点．在 $x$ 点邻近取一小段长度 $\Delta l$，将这一小段材料的质量记为 $\Delta m$，则 $L$ 在 $x$ 点的线密度定义为

$$\rho(x)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta l}.$$

整段金属线 $L$ 的总质量可以近似地表示为

$$\text{(1.2)}\qquad \sum_{j=1}^{n}\Delta m_j=\sum_{j=1}^{n}\rho(Q_j)\Delta s_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\rho(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)\Delta s_j.$$

如果所分弧段的最大长度趋于 0：

$$d=\max_j\{\Delta s_j\}\to 0,$$

那么(1.2)式的极限就应该是所求的质量：

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{j=1}^{n}\rho(Q_j)\Delta s_j.$$

这里的“分割——近似——求和——求极限”的手续，与定积分的情形十分类似，但却是沿着一条曲线实施的。由此可以引出第一型曲线积分的一般定义。

**定义2** 设 $L$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条可求长曲线，函数 $f(x,y,z)$ 在 $L$ 上有定义。我们用依次排列的分点

$$A=P_0,P_1,\cdots,P_n=B$$

把 $L$ 分成 $n$ 段（$A$ 和 $B$ 是 $L$ 的端点，对于闭曲线的情形认为 $A=B$）。约定把从 $P_{j-1}$ 到 $P_j$ 这一小段的曲线弧长记为 $\Delta s_j$，并记

$$d=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\Delta s_j\}.$$

在弧段 $P_{j-1}P_j$ 上任意选取点 $Q_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$，然后作和数

$$\text{(1.3)}\qquad \sum_{j=1}^{n}f(Q_j)\Delta s_j.$$

如果当 $d\to 0$ 时和数(1.3)收敛于有穷极限，那么我们就把这极限叫做函数 $f$ 沿曲线 $L$ 的第一型曲线积分，记为

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta s_i.$$

**注记** 我们把这种对弧长的积分叫做"第一型"曲线积分，是为了与以后将要学习的另一种曲线积分相区别。

读者容易看出：与定积分的情形类似，作为和数的极限的第一型曲线积分，具有线性、可加性等性质。

如果以弧长 $s$ 作为参数把曲线 $L$ 的方程写成

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s),$$
$$s_0 \leqslant s \leqslant s_*,$$

那么根据定义立即就可以把第一型曲线积分表示为定积分

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_*} f(x(s), y(s), z(s))\mathrm{d}s.$$

非弧长参数的连续可微曲线(或者分段连续可微曲线)，可以通过变元替换化成以弧长为参数的情形。我们有以下的计算公式：

**定理 2** 设 $L$：$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，$t \in [\alpha, \beta]$，是一条连续可微的参数曲线，满足条件

$$\boldsymbol{r}'(t) \neq 0,\quad \forall t \in (\alpha, \beta),$$

并设函数 $f$ 在 $L$ 上连续。则 $f$ 沿着 $L$ 的第一型曲线积分存在，并且这积分可按下式计算：

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s$$
$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

**证明** 在所给的条件下，曲线 $L$ 是可求长的，其弧长表示为

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

并且

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}>0.$$

根据反函数定理，参数 $t$ 是弧长 $s$ 的连续可微函数：

$$t=t(s).$$

于是，我们可以用弧长 $s$ 作为参数，将曲线 $L$ 的方程写成

$$x=x(t(s)),\quad y=y(t(s)),\quad z=z(t(s)),$$

$$0\leqslant s\leqslant s_*.$$

函数 $f$ 沿 $L$ 的第一型曲线积分表示为

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s=\int_0^{s_*} f(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s)))\mathrm{d}s.$$

在上式中作变元替换

$$s=\int_a^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

就得到定理中的计算公式。 □

## §2 曲面面积与第一型曲面积分

与上节的情形类似，我们先讨论这样一个问题：怎样计算由不均匀材料制成的曲面片的质量？设这曲面片 $S$ 在点 $Q=(x,y,z)$ 处的面密度为 $\rho(Q)$①．我们把曲面片 $S$ 分成若干小曲面块

$$S_1,S_2,\cdots,S_n,$$

把曲面块 $S_j$ 的直径(即 $S_j$ 上任意两点距离之上确界)记为 $d_j$，并记

$$d=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}.$$

将曲面块 $S_j$ 的面积记为 $\sigma(S_j)$，在每一块 $S_j$ 上任意选取一点

---

① 读者可以仿照线密度的情形叙述面密度的定义。

$Q_j$，然后作和数

$$\sum_{j=1}^{n}\rho(Q_j)\sigma(S_j). \tag{2.1}$$

让 $d\to0$，和数(2.1)的极限就应该表示曲面片 $S$ 的质量。

从上面例子的讨论可以引出第一型曲面积分的概念。但在叙述正式的定义之前，我们还需要弄清楚曲面面积的含义。——曲面面积的概念并不象乍一想来那么简单，这也许有点出人意料。

## 2.a 曲面面积

我们曾把曲线的弧长定义为内接折线长度的上确界。以前，人们也曾模糊地认为，可以把曲面面积定义为内接折面面积的上确界。然而，上世纪末德国数学家许瓦茨(H. A. Schwarz)举出了一个反例，说明即使像直圆柱面这样简单的曲面，也可以具有面积任意大的内接折面，——内接折面面积的上确界是 $+\infty$！因此，我们不能把曲面面积定义为内接折面面积的上确界。

我们将许瓦茨的例子稍作改变，以便更直观地用几何方式说明问题。

考察一个半径为 $R$ 高为 $H$ 的直圆柱(为了叙述方便，我们认为这直圆柱是竖直放置的——其母线垂直于水平面)。取充分大的自然数 $m$，作内接于圆柱的正 $2^m$ 棱柱 $P$。下面，我们从 $P$ 的侧面出发，作一串更接近于圆柱侧面 $S$ 的内接折面。设 $ABB_1A_1$ 是 $P$ 的一个侧面矩形。过矩形 $ABB_1A_1$ 的中心 $D$，作这矩形面的垂线，交这矩形所截的较小的那一段圆柱面于 $C$。用直线段联结 $AC, BC, B_1C, A_1C$。我们从矩形面 $ABB_1A_1$ 出发，得到了由四个三角形面组成的内接于圆柱侧面的折面 $ABB_1A_1C$(图15-1)。请注意，具有水平边的两三角形面积之和大于

$$AB\cdot CD.$$

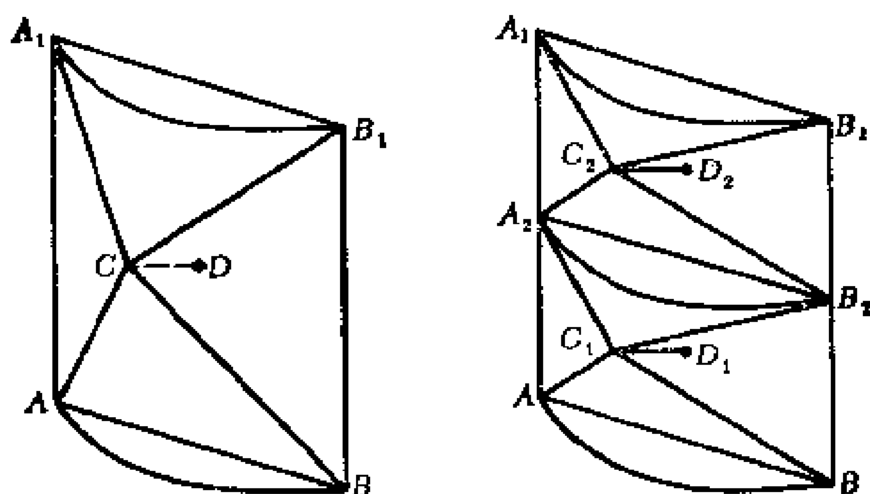



图 15-1

把 $AA_1$ 的中点记为 $A_2$，$BB_1$ 的中点记为 $B_2$，对矩形 $ABB_2A_2$ 和 $A_1B_1B_2A_2$ 重复上面的做法，得到 $ABB_2A_2C_1$ 和 $A_1B_1B_2A_2C_2$。将这两块拼起来代替 $ABB_1A_1C$。我们看到：具有水平边的四个三角形面积之和大于

$$2AB\cdot CD.$$

继续上面所说的手续，在对$P$ 的每一侧面做了 $n$ 次对分之后，我们得到内接于圆柱面的一个折面，这折面的具有水平边的各三角形的面积之和大于

$$2^{m+n}AB\cdot CD.$$

对于任意取定的 $m$，只要 $n$ 充分大，所作的内接折面的面积可以大于预先给定的任何正数。

读者已经注意到，随着 $n$ 越来越大，所作折面中具有水平边的各三角形面与圆柱面的切平面的夹角也越来越大。这正是问题的症结所在。为了合理地定义曲面面积，就应要求逼近曲面的各平面小块趋于与曲面切面平行的位置。从这分析得到启发，我们作出如下的定义：

设$S$是一块连续可微曲面，它在每一点有确定的切平面。用分段连续可微的曲线将$S$分成若干小块：

$$S_1, S_2, \cdots, S_n,$$

——我们把$S$的这样一个分割记为$\pi$，并约定记

$$|\pi| = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{diam} S_j,$$

这里$\operatorname{diam} S_j$表示集合$S_j$的直径。在所分割的每一小块$S_j$中任取一点$Q_j$，过$Q_j$作$S$的切平面$T_j$。将$S_j$垂直投影于$T_j$上，得到$T_j$上的一块平面区域。这平面区域的面积记为$\tau(S_j)$。考察和数

$$(2.2) \qquad \tau(S, \pi) = \sum_{j=1}^{n} \tau(S_j).$$

曲面块$S$的面积$\sigma(S)$就定义为

$$\sigma(S) = \lim_{|\pi| \to 0} \tau(S, \pi).$$

下面推导曲面面积的计算公式。先介绍简单曲面、正则曲面等概念。

设$D$是$\mathbf{R}^2$中的一个区域，向量值函数$\boldsymbol{r}(u,v)$在$D$上连续，曲面$S$的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \qquad (u, v) \in D.$$

如果映射$\boldsymbol{r}(u,v)$是单一对应，那么我们就说$S$是简单曲面。

设$D$是$\mathbf{R}^2$中的一个区域，曲面$S$的参数方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

如果$\boldsymbol{r}(u,v)$是连续可微映射并且满足条件

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0, \qquad \forall (u, v) \in D,$$

那么我们就说$S$是正则曲面。

我们来推导计算正则简单曲面面积的公式。设正则简单曲面$S$的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v), \quad (u,v)\in D.$$

用参数曲线网

$$u=\text{常数}, \quad v=\text{常数},$$

把曲面$S$分成小块。每一小块在切平面上的投影的面积可以近似地表示为(参看图15-2)：

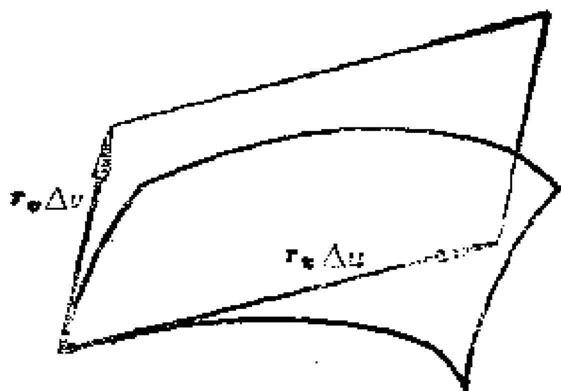



图 15-2

$$\|\boldsymbol{r}_u\Delta u\times\boldsymbol{r}_v\Delta v\|=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\Delta u\Delta v.$$

于是

$$\tau(S,\pi)=\sum\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\Delta u\Delta v.$$

由此得到

$$\sigma(S)=\lim_{|\pi|\to 0}\tau(S,\pi)$$

$$=\iint_D\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这就是简单正则曲面面积的计算公式。

我们考察这样的情形：$S$只是分块正则的曲面，而且可以有重点。如果能够把$S$剖分成若干块正则简单曲面，那么就可以分块计算面积，然后再相加。如果这时$S$仍有统一的参数表示：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v), \quad (u,v)\in D,$$

那么仍有同样形式的计算面积的公式：

$$\sigma(S)=\iint_D\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

下面，我们把曲面面积的计算公式改写为几种形式，以便于

以后引用。

**第一种形式** 因为

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k},$$

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

所以

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

**第二种形式** 利用恒等关系

$$\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|^2 + (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2 = \|\boldsymbol{r}_u\|^2 \|\boldsymbol{r}_v\|^2,$$

可得

$$\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| = \sqrt{\|\boldsymbol{r}_u\|^2 \|\boldsymbol{r}_v\|^2 - (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2}.$$

我们回忆起

$$\|\boldsymbol{r}_u\|^2 = E, \qquad \|\boldsymbol{r}_v\|^2 = G,$$

$$(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = F,$$

——这里 $E$,$F$ 和 $G$ 是曲面第一基本形式的系数。于是，又得到

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

我们看到：曲面的面积完全由这曲面的第一基本形式决定。

至于显式表示的曲面

$$z = f(x,y), \qquad (x,y) \in D,$$

它可以看作参数曲面的一种特殊形式：

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y), \end{cases} \qquad (x,y) \in D.$$

计算得

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial z}{\partial x}=-p,$$

$$B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial z}{\partial y}=-q,$$

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1,$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{p^2+q^2+1}.$$

因而有

$$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{p^2+q^2+1}\,dxdy,$$

这里

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

### 2.b 第一型曲面积分

**定义** 设 $S$ 是一张可求面积的曲面，函数 $f(x,y,z)$ 在 $S$ 上有定义。把 $S$ 分割为有限块可求面积的小曲面块

$$S_1,S_2,\cdots,S_n$$

（我们把这样一个分割记为 $\pi$，并记

$$|\pi|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\operatorname{diam}S_j.$$

这里 diam $S_j$ 表示曲面块 $S_j$ 的直径。）在每一小块曲面 $S_j$ 上任意选取一点

$$Q_j=(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

然后作和数

$$(2.3)\qquad \sum_{j=1}^{n} f(Q_j)\sigma(S_j)=\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j,\eta_j,\zeta_j)\sigma(S_j).$$

当$|\pi|\to 0$时和数（2.3）的极限就称为函数$f$沿 曲面$S$的第一型曲面积分，记为

$$\iint_S f(Q)\,d\sigma=\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(Q_j)\sigma(S_j).$$

读者容易看出：第一型曲面积分作为和数的极限，应该具有线性及可加性等性质。

以下推导第一型曲面积分的计算公式。基本的假设是：

（1） $S$是正则简单曲面，它的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\qquad (u,v)\in D,$$

——其中$D$是一个有界闭区域；

（2） 函数$f(x,y,z)$在$S$上连续。

由于复合函数$f(\boldsymbol{r}(u,v))$在$D$上的一致连续性，对任意$\varepsilon>0$，可以作$D$的充分细的分割，使得在所分成的每一闭子区域$D_j$上有：

$$|f(\boldsymbol{r}(u,v))-f(\boldsymbol{r}(u',v'))|<\varepsilon,$$
$$\forall\,(u,v),(u',v')\in D_j.$$

在每一$D_j$上任意选取一点$(u_j,v_j)$，记

$$Q_j=\boldsymbol{r}(u_j,v_j).$$

又记

$$S_j:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in D_j.$$

我们来考察和数

$$(2.4)\qquad \sum_j f(Q_j)\sigma(S_j)$$

$$= \sum_j f(r(u_j, v_j)) \iint_{D_j} W \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

这里为书写简便引入记号：

$$W = \| r_u \times r_v \|$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},$$

$$C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

$$E = \| r_u \|^2, \quad G = \| r_v \|^2,$$

$$F = (r_u, r_v).$$

将和数（2.4）与下面的积分 $J$ 比较：

$$J = \iint_D f(r(u, v)) W \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$= \sum_j \iint_{D_j} f(r(u, v)) W \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

我们看到

$$\left| \sum_j f(Q_j) \sigma(S_j) - J \right|$$

$$\leqslant \sum_j \iint_{D_j} | f(r(u_j, v_j)) - f(r(u, v)) | W \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_j \iint_{D_j} W \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \varepsilon \sigma(S).$$

这证明了

$$\lim \sum_j f(Q_j)\sigma(S_j) = J.$$

在所设条件下，我们推导出第一型曲面积分的计算公式：

$$\iint_S f(Q)\mathrm{d}\sigma$$
$$= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))W\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$W = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|$$
$$= \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}.$$

还可以考察这样的情形：$S$ 只是分块正则曲面。对这情形，如果能够把 $S$ 剖分成若干块正则简单曲面，那么就可以分块用上面的公式计算，然后再相加。如果这时 $S$ 仍有统一的参数表示：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

那么仍有同样形式的计算公式

$$\iint_S f(Q)\mathrm{d}\sigma$$
$$= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))W\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

### 2.c 例题

**例 1** 设 $S$ 是球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

试计算 $S$ 的面积 $\sigma(S)$。

**解** 我们引入球面的参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi),\quad (\theta,\varphi)\in D,$$

这里

$$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=(a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\varphi),$$

$$D=\left\{(\theta,\varphi)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

计算得

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-a\sin\theta\cos\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0),$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi=(-a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi),$$

$$E=\|\boldsymbol{r}_\theta\|^2=a^2\cos^2\varphi,$$

$$F=(\boldsymbol{r}_\theta,\boldsymbol{r}_\varphi)=0,$$

$$G=\|\boldsymbol{r}_\varphi\|^2=a^2,$$

$$W=\sqrt{EG-F^2}=a^2\cos\varphi.$$

所求的面积为

$$\sigma(S)=\iint\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=4\pi a^2$$

**例 2** 试计算球面

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

被围在柱面

$$x^2+y^2=ax$$

之内的那一部分的面积。

**解** 由于对称性，所求的面积为其在第一卦限内的部分的 4 倍。仍用例 1 中的参数表示，我们把所求的面积表示为

$$\sigma(S)=4\iint_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=4a^2\iint_{\Delta}\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

为确定积分区域 $\Delta$，把球面的参数表示代入不等式

$$x^2+y^2\leqslant ax,$$

这样得到

$$\cos^2\varphi\leqslant\cos\theta\cos\varphi.$$

我们看到：$(\theta,\varphi)\in\Delta$ 应满足这样的条件

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \cos^2\varphi\leqslant\cos\theta\cos\varphi.\end{cases}$$

由此确定

$$\Delta=\left\{(\theta,\varphi)\quad 0\leqslant\theta\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

所求的面积为

$$\begin{aligned}\sigma(S)&=4a^2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2(\pi-2)a^2.\end{aligned}$$

**例 3** 试计算双曲抛物面 $z=xy$ 被围在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内的那一部分的面积.

**解** 计算得

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=y,\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=x,$$

$$\sqrt{p^2+q^2+1}=\sqrt{x^2+y^2+1}.$$

于是

$$\sigma(S)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

换极坐标计算得到

$$\sigma(S)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{r^2+1}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[(a^2+1)^{3/2}-1\right].$$

**例 4** 问以下两积分相差多少：

$$I=\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\sigma,$$

$$J=\iint\limits_P(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\sigma,$$

这里

$$S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2\},$$
$$P=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|=a\}.$$

**解** 根据曲面积分的定义，很容易求出第一个积分

$$I=\iint\limits_S a^2\mathrm{d}\sigma=4\pi a^4.$$

利用对称性可以简化第二个积分的计算：

$$J=8\iint\limits_{P_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}\sigma,$$

这里 的 $P_1$ 是 $P$ 在第一卦限的那一部分，这部分曲面可以用显式方程表示为

$$z=a-x-y,\quad (x,y)\in\Delta_1,$$
$$\Delta_1=\{(x,y)\mid x,y\geqslant 0,\ x+y\leqslant a\}.$$

计算得

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$

$$\sqrt{p^2+q^2+1}=\sqrt{3}.$$

于是得到

$$J=8\sqrt{3}\iint\limits_{\Delta_1}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=8\sqrt{3}\left[\iint\limits_{\Delta_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Delta_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Delta_1}(a-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right].$$

直接计算得

$$\iint\limits_{\Delta_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{12}a^4,$$

$$\iint\limits_{\Delta_1}(a-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(a-x-y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^a(a-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{12}a^4.$$

我们得到

$$J=2\sqrt{3}a^4,$$

因而

$$I-J=2(2\pi-\sqrt{3})a^4.$$

**例 5** 试计算积分

$$K=\iint\limits_{S}z\mathrm{d}\sigma,$$

这里 $S$ 是一段螺旋面：

$$\boldsymbol{r}=(u\cos v, u\sin v, bv),$$
$$0\leqslant u\leqslant a,\quad 0\leqslant v\leqslant b.$$

**解** 直接计算得到

$$\boldsymbol{r}_u=(\cos v, \sin v, 0),$$
$$\boldsymbol{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, b),$$
$$E=\|\boldsymbol{r}_u\|^2=1,$$
$$F=(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)=0,$$
$$G=\|\boldsymbol{r}_v\|^2=u^2+b^2,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+b^2}.$$

因而

$$K=\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant a\\0\leqslant v\leqslant 2\pi}} bv\sqrt{u^2+b^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\pi^2 b\left(a\sqrt{a^2+b^2}+b^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

**例 6** 试计算积分

$$L=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

**解** 引入球面的参数表示当然可以进行计算（请读者自己练习），但利用对称性可以几乎不进行计算直接得出结果。事实上，我们有

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}\sigma,$$

所以

$$L = \frac{1}{3}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S a^2 \mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

# 第十六章　第二型曲线积分与第二型曲面积分

## §1　第二型曲线积分

我们已经熟悉了“对弧长”的曲线积分——第一型曲线积分。这里再来讨论“对坐标”的曲线积分——第二型曲线积分。

### 1.a　定义与性质

一条参数曲线

$$\gamma:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t\in J,$$

总是可以定向的。例如我们可以选择参数 $t$ 增加的方向为曲线的正方向。指定了正方向的一条曲线被称为有向曲线。

设在空间某区域 $\Omega$ 中有一个力场

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega.$$

设有一个单位质量的质点在这力场中沿一条曲线 $\gamma$ 从 $A$ 点移动到 $B$ 点。我们来考察力场对这质点所做的功。请注意，在这样的问题中，应该把 $\gamma$ 看作是从 $A$ 到 $B$ 的有向曲线。因为沿同一条曲线，从 $B$ 移动到 $A$ 所做的功，与从 $A$ 移动到 $B$ 所做的功，一般是不同的（符号正好相反）。

设曲线 $\gamma$ 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\quad t\in[\alpha,\beta].$$

给参数区间一个分割

$$\pi:\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta.$$

于是曲线 $\gamma$ 被分成 $n$ 小段。在第 $i$ 小段上，力场对质点所做的功

可以近似地表示为

$$W_j = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_j,$$

这里

$$\Delta \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}(t_j) - \boldsymbol{r}(t_{j-1}).$$

于是，力场对这质点所做的功可以近似地表示为：

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_j.$$

当$|\pi| \to 0$时，上式的极限就应是所求的功$W$：

$$(1.1) \qquad W = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_j.$$

设$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$是$\boldsymbol{F}(x,y,z)$在三个坐标轴方向的分量，则(1.1)式又可以写成以下形式：

$$W = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{j=1}^{n} (P\Delta x_j + Q\Delta y_j + R\Delta z_j).$$

从以上讨论得到启发，引出了第二型曲线积分的定义。

设$\gamma$是一条连续参数曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

为确定起见，我们假定参数增加方向为曲线的正方向。

**定义** 设$\gamma$是如上所述的一条有向连续曲线，$P(M) = P(x,y,z)$是在$\gamma$上连续的一个数值函数。给曲线$\gamma$的参数区间$[\alpha, \beta]$任意一个分割

$$\pi: \ \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

于是$\gamma$被剖分为曲线段

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n,$$

这里

$$\gamma_j: \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$
$$j = 1, 2, \cdots, n.$$

在每一曲线段 $\gamma_j$ 上任意选取一点

$$M_j = (x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)),$$
$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

然后作和数

$$\sum_{j=1}^{n} P(M_j)\Delta x_j \tag{1.2}$$

$$(\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}), j = 1, 2, \cdots, n).$$

当 $|\pi| \to 0$ 时，和数(1.2)的极限（如果存在）就定义为函数 $P$ 沿有向曲线 $\gamma$ 对 $x$ 坐标的曲线积分，记为

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_j P(M_j)\Delta x_j.$$

用类似的方式，可以定义函数 $Q$ 对 $y$ 坐标的曲线积分和函数 $R$ 对 $z$ 坐标的曲线积分：

$$\int_\gamma Q\mathrm{d}y = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_j Q(M_j)\Delta y_j,$$

$$\int_\gamma R\mathrm{d}z = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_j R(M_j)\Delta z_j.$$

以上这些对坐标的曲线积分，统统被称为第二型曲线积分。我们还约定记

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_\gamma P\mathrm{d}x + \int_\gamma Q\mathrm{d}y + \int_\gamma R\mathrm{d}z.$$

这积分的向量式写法是

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中

$$\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}.$$

如果有向曲线 $\gamma$ 的始端与终端相衔接，那么我们就说 $\gamma$ 是一条闭有向曲线。对于沿闭有向曲线的积分，常常把积分号写作$\oint$。例如

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \oint_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

等等。

从定义容易看出，第二型曲线积分具有以下重要性质（假定各等式右端的积分存在）：

1. 线性

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \alpha\int_{\gamma} f\mathrm{d}x + \beta \int_{\gamma} g\mathrm{d}x,$$

——这里 $\alpha$ 和 $\beta$ 是常数；

2. 可加性

设 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是两有向曲线，$\gamma_1$ 的终端就是 $\gamma_2$ 的始端，我们用记号 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ 表示由 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 连接起来作成的有向曲线，则有

$$\int_{\gamma} f\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} f\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f\mathrm{d}x;$$

3. 有向性

如果用记号 $-\gamma$ 表示由有向曲线 $\gamma$ 反转定向而得到的有向曲线，那么就有

$$\int_{-\gamma} f\mathrm{d}x = -\int_{\gamma} f\mathrm{d}x.$$

**注记** 平面曲线

$$\gamma: \ x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

可以看做空间曲线的特殊情形。沿这样的曲线显然有

$$\int_{\gamma} R\mathrm{d}z = 0$$

——因为沿这曲线 $z \equiv 0$。因而，对于平面曲线 $\gamma$，只须考虑以下形式的积分：

$$\int_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

### 1.b 第二型曲线积分的计算

设 $\gamma$ 是一条连续可微的参数曲线，它的向量方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

用分量表示，曲线 $\gamma$ 的方程可以写成

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

为确定起见，我们假定 $\gamma$ 以参数增加的方向为正方向。

**定理** 设 $\gamma$ 是如上所述的一条有向曲线，$P, Q$ 和 $R$ 是在 $\gamma$ 上连续的函数。则有

$$\int_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t)$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t$$

**证明** 因为$x'(t)$在闭区间$[\alpha,\beta]$上有界，可设

$$|x'(t)|\leqslant K,\quad \forall t\in[\alpha,\beta].$$

又因为复合函数$P(x(t),y(t),z(t))$在闭区间$[\alpha,\beta]$一致连续，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$t,t'\in[\alpha,\beta],|t-t'|<\delta,$$

就有

$$|P(x(t),y(t),z(t))-P(x(t'),y(t'),z(t'))|<\varepsilon.$$

对于$[\alpha,\beta]$的分割

$$\pi:\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

和任意选取的

$$\tau_j\in[t_{j-1},t_j],\quad j=1,2,\cdots,n,$$

只要

$$|\pi|<\delta,$$

就有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_j P(x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j))\Delta x_j\right.\\&\qquad\left.-\int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\sum_j P(x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j))\int_{t_{j-1}}^{t_j}x'(t)\mathrm{d}t\right.\\&\qquad\left.-\sum_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\sum_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}|P(x(\tau_j),y(\tau_j),z(\tau_j))\\&\qquad-P(x(t),y(t),z(t))||x'(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon K \sum_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt = \varepsilon K(\beta - \alpha).$$

这证明了

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_j P(x(\tau_j), y(\tau_j), z(\tau_j)) \Delta x_j$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.$$

至于对 $y$ 坐标的和对 $z$ 坐标的另外两个积分，可以用相同的办法处理。 □

例 1　设质量为 $m$ 的质点沿任意连续曲线 $\gamma$ 从空间位置 $A$ 移动到位置 $B$。试计算重力对这质点做的功 $W$。

解　设在 $OXYZ$ 直角坐标系中，$OZ$ 轴是竖直向上的。则功 $W$ 可以表示为

$$W = \int_\gamma (-mg) dz = -mg \int_\gamma dz.$$

根据定义容易得到

$$\int_\gamma dz = z_B - z_A.$$

因而

$$W = mg(z_A - z_B).$$

我们看到：重力场对质点所做的功，只与起点与终点的位置有关，与经过的路径无关。

例 2　试计算

$$I = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx,$$

$$J = \frac{1}{2} \oint_E x dy - y dx,$$

这里$C$是$OXY$平面上中心在原点半径为$a$的圆周，$E$是以$OX$轴和$OY$轴为对称轴并且两半轴长度分别为$a$和$b$的椭圆周。

**解** 我们写出$C$的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

用上面定理中的公式进行计算得

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t(a\cos t) - a\sin t(-a\sin t)]dt$$

$$= \pi a^2.$$

同样可得

$$J = \pi ab.$$

在例2中，我们看到，对于$\gamma = C$或者$\gamma = E$的情形，积分

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma x dy - y dx$$

正好等于$\gamma$所围图形的面积。这一结论可以推广于很一般的情形，我们将在以后作进一步的讨论。

**例3** 试计算

$$K = \oint_C x dy + y dx,$$

$$L = \oint_E x dy + y dx,$$

这里$C$和$E$如例2中所述。

**解** 用参数表示进行计算得

$$K = a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 0.$$

同样可得

$$L = ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t)\mathrm{d}t = 0.$$

**例 4** 试计算

$$M = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

这里 $C$ 同上两例中所述。

**解** 用参数表示进行计算可得

$$M = 2\pi.$$

**例 5** 试计算

$$N = \int_H x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z,$$

这里 $H$ 是 $k$ 圈螺旋线：

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2k\pi.$$

**解** 我们有

$$\begin{aligned}N &= \int_0^{2k\pi}[a\cos t\cdot(-a\sin t)\\&\qquad + a\sin t\cdot(a\cos t) + b^2]\mathrm{d}t\\&= 2k\pi b^2.\end{aligned}$$

### 1.c 与第一型曲线积分的联系

考察连续可微曲线 $C$：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\qquad t\in[a,b],$$

这里假设

$$\boldsymbol{r}'(t) \neq 0,\quad \forall t\in[a,b].$$

我们约定以参数增加的方向为曲线 $C$ 的正方向。于是，沿 $C$ 正方

向的切线单位向量为

$$\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}.$$

我们把这向量的分量 $\cos\alpha, \cos\beta$, $\cos\gamma$ 叫做有向曲线$C$的方向数：

$$\cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}}.$$

设函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$在曲线$C$上连续，则有

$$\begin{aligned}\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\int_a^b(Px'+Qy'+Rz')\mathrm{d}t\\&=\int_a^b(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\\&\quad\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t\\&=\int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

这样，借助于方向数 $\cos\alpha, \cos\beta$ 和 $\cos\gamma$，我们把第二型曲线积分形式上表示为第一型曲线积分：

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_C(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

请注意，第二型曲线积分与第一型曲线积分相比较，有一个根本不同之处：第二型曲线积分是有向的，而第一型曲线积分是无向的。在上面的公式中，之所以能用第一型曲线积分表示第二型曲

线积分，是因为在被积函数中引入了方向数——当曲线反转定向时，各方向数都改变符号.

## §2 曲面的定向与第二型曲面积分

### 2.a 问题的提出

我们通过一个实际问题，引出第二型曲面积分的概念. 设流体在空间某区域 $\Omega$ 内流动，并设这流动是稳定的——这就是说，在 $\Omega$ 中任意一点 $(x,y,z)$ 观察，流经该点的流体质点的速度不随时间而改变. 这样，速度 $\boldsymbol{v}$ 只是点 $(x,y,z)$ 的函数

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega.$$

设 $S$ 是 $\Omega$ 中的一块曲面. 我们希望计算在单位时间内从曲面 $S$ 的一侧流向另一侧的流体的量. 请注意，流量与曲面 $S$ 的定向有关，即与我们指定曲面 $S$ 的哪一侧为正侧有关. 从负侧流向正侧的流体的量算作正的，而从正侧流向负侧的流体的量算作负的.

为了计算流量，我们在曲面 $S$ 上任取一块微小的面积元 $d\sigma$，并把这面积元的法线上指向正侧的单位向量记为 $\boldsymbol{n}$. 于是，在单位时间内，通过这曲面微元的流体的量为

$$d\Theta=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma,$$

——请参看图 16-1. 因而，在单位时间内，通过曲面 $S$ 的流体总量为

$$\Theta=\iint_S(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma.$$

用分量来表示，设

$$\boldsymbol{v}=(P,Q,R),$$

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

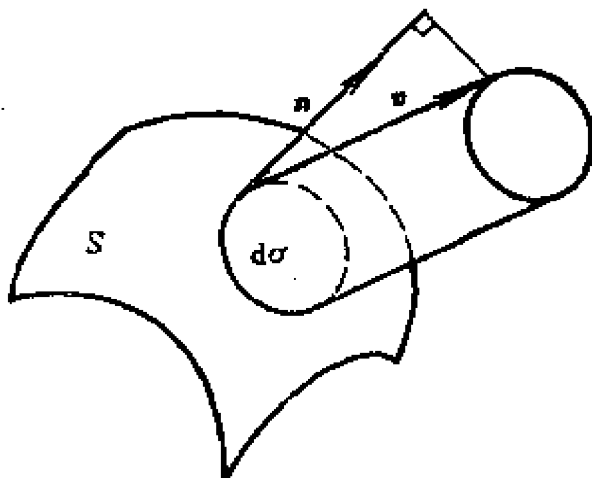



图 16-1

则有

$$\Theta = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma.$$

我们把形状如

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$$

的曲面积分叫做第二型曲面积分。请注意，虽然上式写成第一型曲面积分的形式，但因为被积表达式含有曲面的方向数 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$（即曲面正侧单位法向量的分量），所以这积分与曲面的定向有关。如果改变曲面的定向，把原来的负侧当做正侧，那么所有的方向系数都改变符号，整个积分就改变符号。我们强调指出：第二型曲面积分是一种有向的积分。

### 2.b 曲面的定向

在正式叙述第二型曲面积分的定义之前，需要对曲面的定向作一些说明。

首先，我们指出，任何正则简单曲面都是可定向的。事实上，设

$$S:\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in D$$

是一块正则简单曲面。因为

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0,$$

所以曲面 $S$ 在各点有确定的法线，两向量

$$\pm\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$$

都是法线上的单位向量。我们可以指定其中一个方向为正方向，例如可以指定

$$\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|}$$

的指向为法线的正方向。当参数对 $(u,v)$ 连续变化时，这样指定的正法向单位向量也连续变化，不会突然转到相反的方向上去。我们约定把曲面正法线指向的一侧叫做正侧，相反的一侧叫做负侧。于是曲面 $S$ 明确地分出正负两侧来——这样的曲面叫双侧曲面。

对于非简单的正则参数曲面，如果仍按照上面所说的方法去确定正法线向量或者正侧，就有可能遇到麻烦。因为很可能存在两对参数 $(u_1,v_1)$ 和 $(u_2,v_2)$，它们对应着曲面上的同一点，而在该点的两法向量

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\big|_{(u_1,v_1)}\quad 和\quad \boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\big|_{(u_2,v_2)}$$

具有相反的指向。

下面，我们介绍不可定向曲面的一个非常有名的例子——牟比乌斯（Möbius）带。

考察一条细长的矩形纸带 $AA'B'B$（图16-2）。

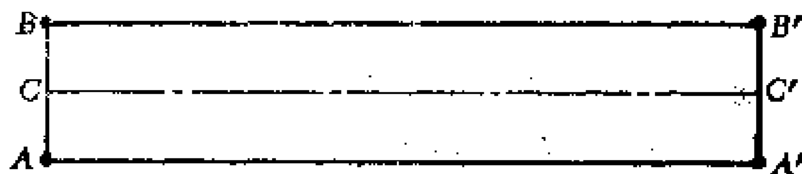



图 16-2

我们设想把这纸带弯曲并把 $A'B'$ 与 $AB$ 这两端粘合起来。这时可以有两种情形。

情形 1 $A'B'$ 与 $AB$ 按同一方向粘合（$A'$ 与 $A$ 粘合，$B'$ 与 $B$ 粘合）。这种情形粘合所成的曲面可以看成一个圆柱体的侧面。很容易说明这曲面是可定向的。因为我们可以把从圆柱体内

穿过侧面向外的方向，规定为法线的正方向。

**情形2** 纸带 $AA'B'B$ 在弯曲的过程中同时扭转，$A'B'$ 边扭了 $180°$ 再与 $BA$ 粘合（$A'B'$ 与 $AB$ 按相反方向粘合，$A'$ 与$B$ 粘合，$B'$ 与 $A$ 粘合）。这样粘合所成的曲面，被称为牟比乌斯带（图16-3）。下面，我们将说明：牟比乌斯带是不可定向的。

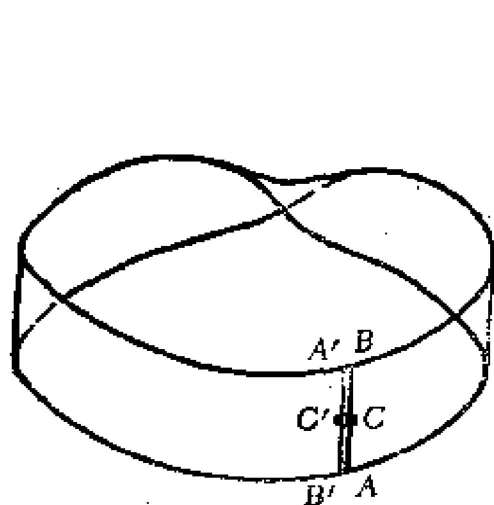



图 16-3

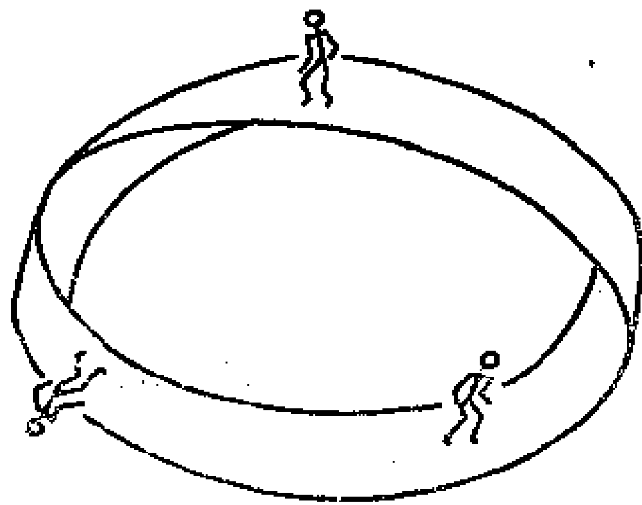


图 16-4

事实上，按照上述构造办法，矩形 $ABB'A$ 两端的中点 $C'$ 与$C$ 互相粘合，因而原矩形的中位线$CC'$粘成了一个闭圈。如果让点 $P$ 沿着闭圈 $CC'$ 在牟比乌斯带上绕行一周，在绕行过程中保持单位法线向量连续变化，那么不论我们在出发时指定怎样一个单位法线向量作为正方向，当我们绕行一周再回到出发点时，连续变化的单位法线向量必定指向相反的方向（参看图16-4）。

我们设法写出圆柱面与牟比乌斯带的参数方程。对于上述两种情形，实施粘合手续的时候，矩形 $AA'B'B$ 的中位线 $CC'$ 总是粘合成一个闭圈。设这闭圈在 $OXYZ$ 坐标系中的方程是

$$x^2+y^2=a^2, \quad z=0.$$

设 $AB$ 是垂直于这圆周的线段

$$x=a, \quad y=0, \quad -b\leqslant z\leqslant b.$$

情形1中的圆柱面，可以看作是由线段 $AB$ 沿圆周 $CC'$ 平行移动生成的。据此，我们写出这圆柱面的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a\sin u, \\ z = v, \end{cases}$$

$$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \qquad -b \leqslant v \leqslant b.$$

在情形2中，线段 $AB$ 沿圆周 $CC'$ 移动，同时绕中点扭转，在环行一周过程中总共扭转180°。据此，我们写出牟比乌斯带的参数方程

$$\begin{cases} x = \left(a + v\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u, \\ y = \left(a + v\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u, \\ z = v\cos\dfrac{u}{2}, \end{cases}$$

$$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \qquad -b \leqslant v \leqslant b.$$

利用参数方程，可以通过计算验证我们在上面的讨论中借助于几何直观说明的事实。——对两种情形，分别考察

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\big|_{(u,v)=(0,0)} \quad 和 \quad \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\big|_{(2\pi,0)}$$

就能揭示圆柱面与牟比乌斯带在定向问题上的差异。具体的计算与讨论留给读者作为练习。

我们常常会遇到那种由若干块连续可微曲面"拼接"而成的曲面——例如象正方体的表面那样的曲面。对"拼接曲面"的定向问题，需要作一些说明。

(a) 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，由一条连续并且是分段连续可微的简单闭曲线所围成的闭区域，被称为初等区域。

(b) 定义在初等区域上的正则简单参数曲面块被称为初等

曲面。

(c) 对于给定的有限块初等曲面，如果其中任意两块至多只相交于边界上的一段曲线，任意三块(或更多的块)至多只相交于边界上的一点，那么我们就说这有限块初等曲面是规则相处的。由规则相处的有限块初等曲面组成的曲面，被称为拼接曲面。

前面说过，正则简单参数曲面总是可以定向的。每一块初等曲面 $E$ 当然都可以定向。$E$ 的定向按照以下法则在其边界曲线 $\partial E$ 上诱导出一个定向。

(d) 诱导定向法则：在曲面 $E$ 的正侧沿边界曲线 $\partial E$ 的正方向前进，$E$ 应该始终在 $\partial E$ 的左方。

(e) 设 $E_1$ 和 $E_2$ 是规则相处的两块初等曲面，并设这两块曲面各自选定了正向。对以下两种情形，我们都说 $E_1$ 的定向与 $E_2$ 的定向是协调的：或者 $E_1$ 与 $E_2$ 无公共边界曲线（至多只能有一个公共边界点）；或者 $E_1$ 与 $E_2$ 在公共边界曲线上所诱导的定向正好相反。

(f) 对于拼接曲面 $S$，如果能给组成它的每一块初等曲面选择一个正向，使得任意两块初等曲面的定向都是协调的，那么我们就说这拼接曲面 $S$ 是可定向的。我们还约定，把协调选择的各初等曲面块的正向（正侧），看作是拼接曲面 $S$ 的正向(正侧)。

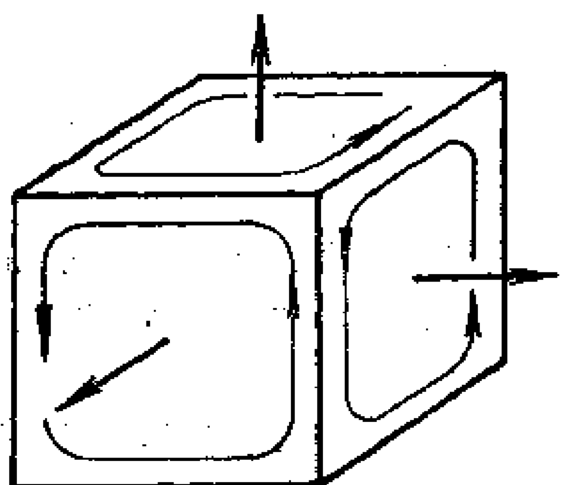


图 16-5

下面，我们通过具体的例子来说明拼接曲面的定向。

例 1　考察正方体的表面 $C$。如果我们选择各面块向外的法线方向为正方向，那么这些面块的定向是协调

的（参看图16-5）。因而$C$可以定向。

例 2　圆柱体的侧面$L$可以看成由三块初等曲面拼接而成的。这三块初等曲面可以协调定向，因而——如我们已经知道的——圆柱面$L$是可定向的（参看图16-6）。

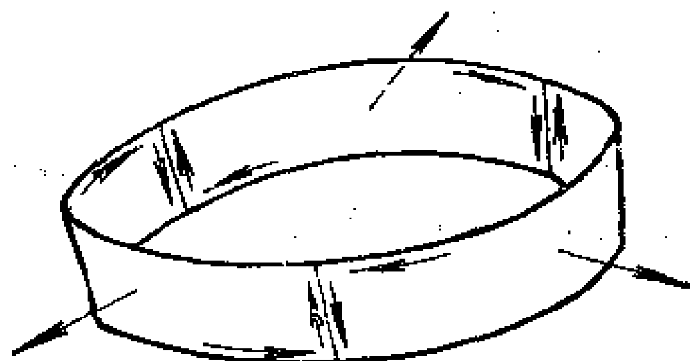


图　16-6

**例 3**　牟比乌斯带$M$也可以看成是由三块初等曲面拼接而成的，但这三块初等曲面不可能协调地定向。——这符合我们已经知道的事实：牟比乌斯带是不可定向的（请参看图16-7）。

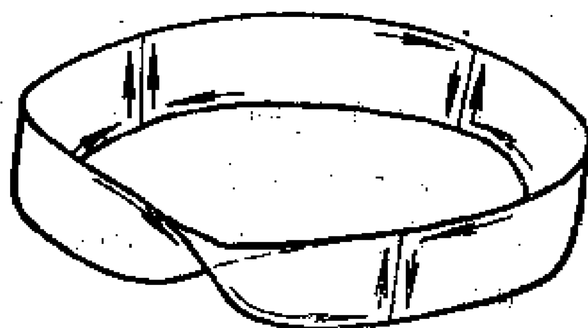


图　16-7

### 2.c　第二型曲面积分的定义

设$S$是$R^3$中的可定向正则曲面。如果指定了$S$的正法线单

位向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

那么也就指定了这曲面的正侧。$S$ 的正侧通常记为 $+S$ 或 $S^+$。我们还约定把同一曲面的相反一侧记为 $-S$ 或 $S^-$。请注意，像 $+S$ 与 $-S$ 这样的记号完全是相对的。我们先指定可定向曲面 $S$ 的任何一侧作为 $+S$，另外一侧就成为 $-S$。为了书写简单，有时候也就把 $+S$ 省略地写作 $S$。

设 $S$ 是如上所述的指定了正侧的曲面，并设 $f(M)=f(x,y,z)$ 是在 $S$ 上有定义并且连续的函数。我们约定把

$$\iint_S f(M)\cos\alpha(M)\,\mathrm{d}\sigma \tag{2.1}$$

叫做函数 $f$ 沿曲面 $S$ 的正侧对 $yz$ 坐标的曲面积分，并约定将这积分记为

$$\iint_{+S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

按照定义，积分 (2.1) 是以下和数的极限：

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cos\alpha(M_i)\sigma(S_i).$$

这里的 $\cos\alpha(M_i)\sigma(S_i)$ 是微小的有向曲面块 $S_i$ 在 $OYZ$ 坐标平面上的投影的（有向）面积。——这就是我们采用记号 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的理由。类似地，我们可以定义函数 $f$ 沿曲面 $S$ 的正侧对 $zx$ 坐标与对 $xy$ 坐标的曲面积分：

$$\iint_{+S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_S f(M)\cos\beta(M)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{2.2}$$

$$\iint_{+S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_S f(M)\cos\gamma(M)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2.3}$$

以上这些对坐标的曲面积分，统称为第二型曲面积分．为了书写简便，有时候也将 $dy\wedge dz$，$dz\wedge dx$ 和 $dx\wedge dy$ 等记号省略地写作 $dydz$，$dzdx$ 和 $dxdy$。例如，积分（2.1）可以记为

$$\iint_{+S} f(x,y,z)\,dydz,$$

在不致于混淆的情况下甚至可以更简单地记为

$$\iint_{S} f(x,y,z)\,dydz.$$

在许多实际问题中，常常会遇到以下形状的和：

$$\iint_{+S} P(x,y,z)\,dy\wedge dz+\iint_{+S} Q(x,y,z)\,dz\wedge dx+\iint_{+S} R(x,y,z)\,dx\wedge dy. \tag{2.4}$$

例如，在 2.a 段中，我们把流量的计算归结为以下形状的积分

$$\begin{aligned}\iint_S (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma &= \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma\\ &=\iint_{+S} P\,dy\wedge dz+\iint_{+S} Q\,dz\wedge dx+\iint_{+S} R\,dx\wedge dy.\end{aligned}$$

我们约定把（2.4）简单地记为

$$\iint P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy, \tag{2.5}$$

或者更简单地写成

(2.5)′ $$\iint_{+S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果 $+S$ 的法线单位向量选为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

那么 $-S$ 的法线单位向量就是

$$-\boldsymbol{n}=(-\cos\alpha,-\cos\beta,-\cos\gamma).$$

我们看到

$$\begin{aligned}\iint_{-S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z&=\iint_{S} f(M)(-\cos\alpha(M))\mathrm{d}\sigma\\&=-\iint_{S} f(M)\cos\alpha(M)\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

也就是

$$\iint_{-S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\iint_{+S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

这说明第二型曲面积分是一种有向的积分：如果改变曲面的定向，那么积分就改变符号。

记号 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 表示 $OYZ$ 坐标平面上的有向面积元。我们约定以 $OX$ 轴的指向为面积元 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的正法线方向，即约定以 $\boldsymbol{i}$ 作为面积元 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的正法线单位向量。我们还约定：记号 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y$ 表示以 $-\boldsymbol{i}$ 为正法线单位向量的同一块面积元，因而

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

对于面积元 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$，也有类似的约定：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

于是，我们约定

$$\iint_{+S} P\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = -\iint_{+S} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

$$\iint_{+S} Q\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\iint_{+S} Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,$$

$$\iint_{+S} R\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\iint_{+S} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

如果$S$是可定向的拼接曲面，那么沿$+S$的第二型曲面积分，就定义为同一被积表示式沿各曲面块正侧的积分之和。

对于可定向的闭曲面，人们常采用带圈的积分号。例如

$$\oiint_{+S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

——积分号上所加的“圈”，用以强调这里积分所展布的曲面是可定向的“闭”曲面。

### 2.d 第二型曲面积分的计算

我们来考察正则简单曲面

$$S: \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

这曲面的单位法线向量为

$$(2.6) \qquad \boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|}$$

$$= \pm \frac{A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k},$$

其中

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

根据第二型曲面积分的定义，我们有

$$\iint_{+S} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \iint_S P\cos\alpha\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D P\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \pm\iint_D PA\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这里的±号须根据曲面的定向来选取。如果在(2.6)式中选取+号来表示曲面$S$的正法线方向，那么这里也应选取+号。反之亦然。

于是，我们把第二型曲面积分归结为参数区域上的二重积分：

(2.7)： $$\iint_{+S} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \pm\iint_D PA\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$(2.7)_2 \qquad \iint_{+S} Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \pm \iint_D QB\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$(2.7)_3 \qquad \iint_{+S} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \pm \iint_D RC\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

一般地，我们有计算公式

$$(2.7) \qquad \iint_{+S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint_D (PA + QB + RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

以上各式右边的$P$，$Q$，$R$分别表示

$$P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$
$$Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$
$$R(x(u,v),y(u,v),z(u,v));$$

记号$A$，$B$，$C$的定义如前：

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

各式右边积分号前的±号，要根据曲面的定向来选取。

显式表示的曲面

$$S: \ z = f(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

可以看成是以$(x,y)$为参数的曲面．对这情形有

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad C = 1.$$

于是，第二型曲面积分的计算公式可以写成

$$\iint_{+S} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm\iint_D\left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果$P = Q = 0$，那么计算就特别简单：

$$\iint_{+S} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \pm\iint_D R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这些计算公式右边积分号前的±号，要根据曲面的定向来选取。如果以曲面$S$的上侧为正侧(即要求正法线方向与$OZ$轴的正方向夹锐角：$\cos\gamma>0$)，那么在这些公式中就应选取正号。如果以曲面$S$的下侧为正侧，那么在这些公式中就应选取负号。

**例 4**　试计算积分

$$I = \frac{1}{3}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里$S$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧。

**解**　球面$S$的外法线单位向量表示为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right).$$

因而

$$I = \frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S\frac{x^2+y^2+z^2}{a}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{a}{3}\iint_S\mathrm{d}\sigma = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

**例 5** 试计算与上例类似的积分

$$J=\frac{1}{3}\iint_{\Gamma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\Gamma$ 是如下的长方体的表面，约定以外侧为正侧：

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c.$$

**解** 长方体的外表面 $\Gamma$ 由六块侧面 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_6$ 拼接而成，这里

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1:\ x=a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c,\\
&\Gamma_2:\ x=-a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c,\\
&\Gamma_3:\ |x|\leqslant a,\ y=b,\ |z|\leqslant c,\\
&\Gamma_4:\ |x|\leqslant a,\ y=-b,\ |z|\leqslant c,\\
&\Gamma_5:\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ z=c,\\
&\Gamma_6:\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ z=-c.
\end{aligned}$$

在侧面 $\Gamma_1$ 上，$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，$x=a$，因而

$$\frac{1}{3}\iint_{\Gamma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Gamma_1} a\mathrm{d}\sigma=\frac{4}{3}abc.$$

同样可得

$$\frac{1}{3}\iint_{\Gamma_i} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{3}abc,\quad i=2,3,\cdots,6.$$

最后，我们得到

$$J = 6 \times \frac{4}{3} abc = 8abc.$$

**例6** 试计算积分

$$K = \frac{1}{3} \iint_{\Lambda} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\Lambda$ 是以下椭球面的外侧：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**解** 我们引入椭球面 $\Lambda$ 的参数表示：

$$\boldsymbol{r} = (a \cos \theta \cos \varphi, \ b \sin \theta \cos \varphi, c \sin \varphi),$$

$$(\theta, \varphi) \in D = \left\{ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

计算得

$$\boldsymbol{r}_\theta = (-a \sin \theta \cos \varphi, b \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (-a \cos \theta \sin \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \varphi),$$

$$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi = (bc \cos \theta \cos^2 \varphi, ac \sin \theta \cos^2 \varphi, ab \cos \varphi \sin \varphi),$$

$$A = bc \cos \theta \cos^2 \varphi, \quad B = ac \sin \theta \cos^2 \varphi,$$

$$C = ab \cos \varphi \sin \varphi.$$

于是有

$$K = \frac{1}{3} \iint_D abc(\cos^2 \theta \cos^3 \varphi + \sin^2 \theta \cos^3 \varphi + \cos \varphi \sin^2 \varphi) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{3} abc \iint_D \cos \varphi \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc.$$

在上面几例中，我们看到，积分

$$\frac{1}{3}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

正好等于闭曲面 $S$ 所围的体积。这实际上是一个普遍成立的事实。我们将在后面给予证明。

例 7 试计算

$$L = \iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $S$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧。

**解** 类似于例 4 中的做法，我们求得

$$L = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{a}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{a}\left(\iint_S x^3\mathrm{d}\sigma + \iint_S y^3\mathrm{d}\sigma + \iint_S z^3\mathrm{d}\sigma\right).$$

利用球面 $S$ 关于原点的对称性，很容易看出上式右端的三个积分都等于 0，因而

$$L = 0.$$

例 8 试计算

$$M = \iint_\Gamma f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\Gamma$ 是以下长方体的外表面：

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c.$$

**解** 仿照例 5 中的做法，我们求得

$$M = 4\{[f(a) - f(-a)]bc + [g(b) - g(-b)]ac + [h(c) - h(-c)]ab\}.$$

例 9 试计算积分

$$N=\iint_{A} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $A$ 是以下椭球面的外侧：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

**解** 我们把$N$分成三项

$$N=N_1+N_2+N_3,$$

先来计算

$$N_3=\iint_{A} z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如同例 6 中那样引入椭球面 $A$ 的参数表示，我们求得

$$N_3=\iint_{D} abc^3\cos\varphi\sin^4\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{5}\pi abc^3.$$

根据同样的道理，应该有

$$N_2=\iint_{A} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\pi ab^3c,$$

$$N_1=\iint_{A} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi a^3bc.$$

于是得到

$$N=N_1+N_2+N_3$$

$$=\frac{4}{5}\pi\,abc(a^2+b^2+c^2).$$

**例10** 设 $\Delta$ 是以(1,0,0)，(0,1,0)和(0,0,1)为顶点的三角

形面的上侧，试计算

$$I=\iint_{\Delta} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$J=\iint_{\Delta} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**解** 曲面 $\Delta$ 可以用显式方程表示为

$$z=1-x-y,\qquad (x,y)\in D,$$

这里

$$D=\{(x,y)\,|\,x,y\geqslant 0,\ \ x+y\leqslant 1\}.$$

计算偏导数得

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

于是得到

$$I=\iint_{D}[-xp-yq+(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

用同样办法可以计算 $J$：

$$J=\iint_{D}[x^2+y^2+(1-x-y)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}.$$

## §3 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式

在一定的条件下，沿适当几何形体边界的积分可以转换为展

布于这几何形体上的积分。本节将要介绍的格林（Green）公式、高斯（Gauss）公式和斯托克斯（Stokes）公式都涉及这种类型的变换。

### 3.a 格林公式

格林公式把绕二维区域边界的第二型曲线积分转换为展布于这区域上的二重积分。我们先分析两种较特殊的情形，然后介绍更一般的结论。

**情形1** 考察$\mathbb{R}^2$中的闭区域

$$D=\{(x,y)\mid y_0(x)\leqslant y\leqslant y_1(x),a\leqslant x\leqslant b\},$$

这里$y_0(x)$和$y_1(x)$是连续函数，$y_0(x)\leqslant y_1(x)$。为了叙述方便，以下我们把象$D$这样的区域叫做甲类区域。通常把$D$的边界记为$\partial D$，并约定在$\partial D$上按下述法则诱导定向：沿$\partial D$的正向前进时，$D$应在$\partial D$的左方。设函数$P(x,y)$在$D$上连续可微，我们来计算第二型曲线积分

$$\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x.$$

曲线$\partial D$可以分成四段（参看图16-8）：

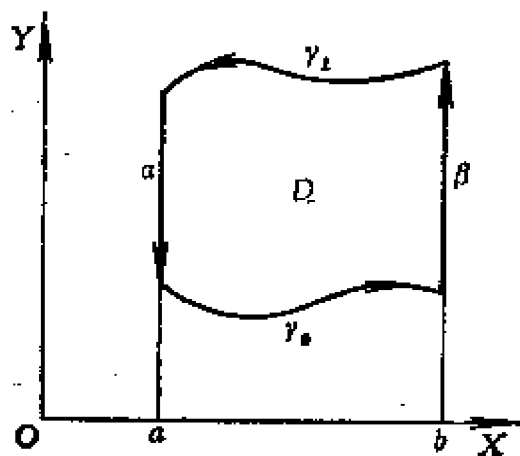



图 16-8

$$\gamma_0: \quad y = y_0(x), \quad a \leqslant x \leqslant b;$$
$$\beta: \quad x = b, y_0(b) \leqslant y \leqslant y_1(b);$$
$$\gamma_1: \quad y = y_1(x), \quad b \geqslant x \geqslant a;$$
$$\alpha: \quad x = a, y_1(a) \geqslant y \geqslant y_0(a).$$

于是

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x = \int_{\gamma_0} P\mathrm{d}x + \int_{\beta} P\mathrm{d}x + \int_{\gamma_1} P\mathrm{d}x + \int_{\alpha} P\mathrm{d}x.$$

直线段 $\alpha$ 和 $\beta$ 都垂直于 $OX$ 轴，根据第二型曲线积分的定义，应该有

$$\int_{\alpha} P\mathrm{d}x = \int_{\beta} P\mathrm{d}x = 0.$$

因而

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x &= \int_{\gamma_0} P\mathrm{d}x + \int_{\gamma_1} P\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b P(x, y_0(x))\mathrm{d}x + \int_b^a P(x, y_1(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b [P(x, y_0(x)) - P(x, y_1(x))]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

这样，我们把沿 $\partial D$ 的第二型曲线积分，转换为展布在 $D$ 上的二重积分：

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域 $\Omega$ 可以分拆为甲类区域——这就是说，$\Omega$ 可以表示成两两无公共内点的有限个甲类区域的并集：

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{m} D_i.$$

如果函数 $P$ 在 $\Omega$ 上连续可微，那么就有

$$\iint_{\Omega}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\partial D_i}P\mathrm{d}x.$$

相邻的 $D_i$ 和 $D_j$ 在它们的公共边界线上诱导的定向正好相反，这使得沿公共边界线的积分互相抵消(参看图16-9)，所以

$$\sum_{i=1}^{m}\oint_{\partial D_i}P\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x.$$

于是，我们得到

$$\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x=\iint_{\Omega}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

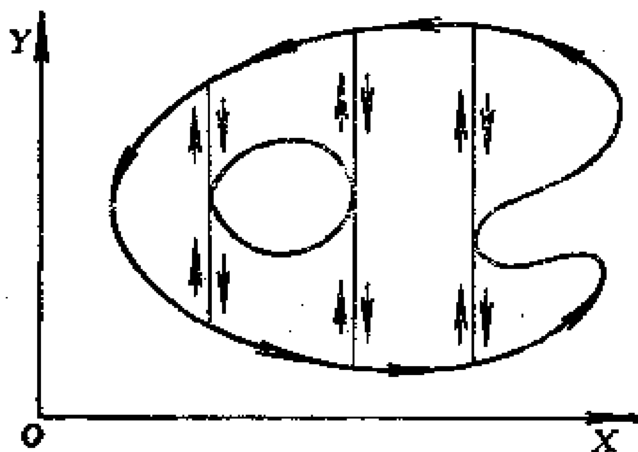



图 16-9

这是格林公式的一种特殊情形。

**情形 2** 再来考察另一类较特殊的区域

$$E=\{(x,y)\mid x_0(y)\leqslant x\leqslant x_1(y),\ A\leqslant y\leqslant B\},$$

这里 $x_0(y)$ 和 $x_1(y)$ 是连续函数，$x_0(y)\leqslant x_1(y)$。我们把象 $E$ 这样的区域叫做乙类区域。区域 $E$ 的边界 $\partial E$ 仍照以前所述的法则定向（沿 $\partial E$ 的正方向前进时，$E$ 在 $\partial E$ 的左边）。设函数 $Q$ 在 $E$ 上连续可微，我们来计算积分

$$\oint_{\partial E} Q\,\mathrm{d}y.$$

与情形 1 中的讨论类似，可以得到

$$\oint_{\partial E} Q\,\mathrm{d}y=\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域 $\Omega$ 可以分拆为乙类区域——这就是说，$\Omega$ 可以表示成两两无公共内点的有限个乙类区域的并集：

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{n} E_j.$$

如果函数 $Q$ 在 $\Omega$ 上连续可微，那么仍有

$$\oint_{\partial\Omega} Q\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这是格林公式的另一特殊情形。

**一般情形** 综合上面的情形 1 和情形 2，就可得到这样的结论：

设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域，它既可以分拆为甲类区域又可以分拆为乙类区域。如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $\Omega$ 上连续可微，那么就有

$$\oint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\partial\Omega$ 是 $\Omega$ 的边界，它按照我们前面所述的诱导法则定向。

在上面的陈述中，要求闭区域 $\Omega$ 既可以分拆为甲类区域又可以分拆为乙类区域。许多实际问题所涉及的闭区域都能满足这样的条件。其实，格林公式对更一般的闭区域也能成立，我们把这更一般的结果陈述为定理的形式。

**定理** 1（格林公式） 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条分段连续可微曲线围成的闭区域。如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $\Omega$ 上连续可微，那么就有

$$\oint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里的 $\partial\Omega$ 是 $\Omega$ 的边界，它的定向按照以下法则确定：沿 $\partial\Omega$ 的正方向前进时，区域 $\Omega$ 在 $\partial\Omega$ 的左侧。

我们介绍这定理证明的基本思想，但不打算深入探讨证明的细节。首先注意到：$\mathbb{R}^2$ 中由有限条折线围成的闭区域既可以分拆为甲类区域又可以分拆为乙类区域。因而，对于由有限条折线围成的闭区域，格林公式应该成立。其次，设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由有限条分段连续可微曲线围成的闭区域，$P$ 和 $Q$ 是在 $\Omega$ 上连续可微的函数。——按照约定，这意味着 $P$ 和 $Q$ 在包含了闭区域 $\Omega$ 的某

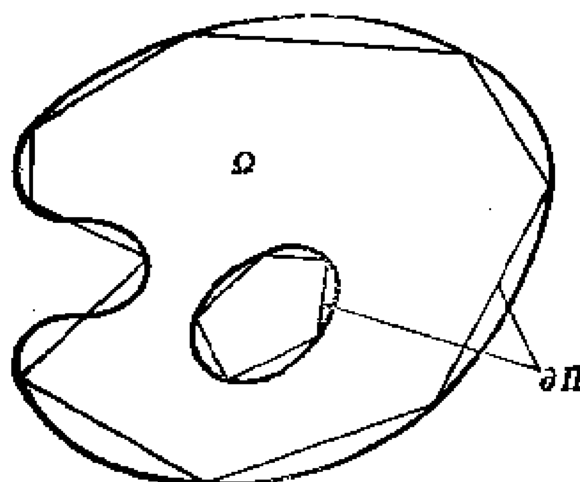



图 16-10

一个开集$W$上连续可微。我们可以作一个由有限条折线围成的闭区域$\Pi\subset W$，使得$\partial\Pi$与$\partial\Omega$充分接近，$\Pi$与$\Omega$相差无几(请参看图16-10)，从而使得

$$\left|\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_{\partial\Pi}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\iint_{\Pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

前面说过，对于由有限条折线围成的闭区域，格林公式成立：

$$\oint_{\partial\Pi}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\Pi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们得到

$$\left|\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

因为$\varepsilon>0$可以取得任意小，所以

$$\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，对于相当一般的情形，我们证明了格林公式。

**注记** 采用意义容易理解的符号表示，我们可以把格林公式写成：

$$\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

格林公式的这种整齐对称的写法，更便于记忆。

**例1** 设$\Omega$是$\mathbb{R}^2$中由一条或几条分段连续可微曲线围成的闭区域。试说明$\Omega$的面积$\sigma(\Omega)$可按以下各式计算：

$$\sigma(\Omega)=\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

**解** 根据格林公式，我们有

$$\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma(\Omega),$$

$$-\oint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}x=\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma(\Omega),$$

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sigma(\Omega).$$

**例2** 我们继续例1中的讨论。设 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 表示为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

——这里 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是分段连续可微的函数。则有

$$\sigma(\Omega)=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\pm\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx')\mathrm{d}t$$

$$=\pm\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\mathrm{d}t.$$

实际计算时不必顾虑符号的选择——只要对最后计算的结果取绝对值就可以了。

**例 3** 试用例 1 中的公式计算椭圆面积。

**解** 椭圆的参数方程为

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

利用这参数表示计算第二型曲线积分得

$$\sigma(\Omega)=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi ab.$$

**例 4** 星形线的参数方程为

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

试求由星形线所围成的平面图形 $\Omega$ 的面积（参看图 16-11）。

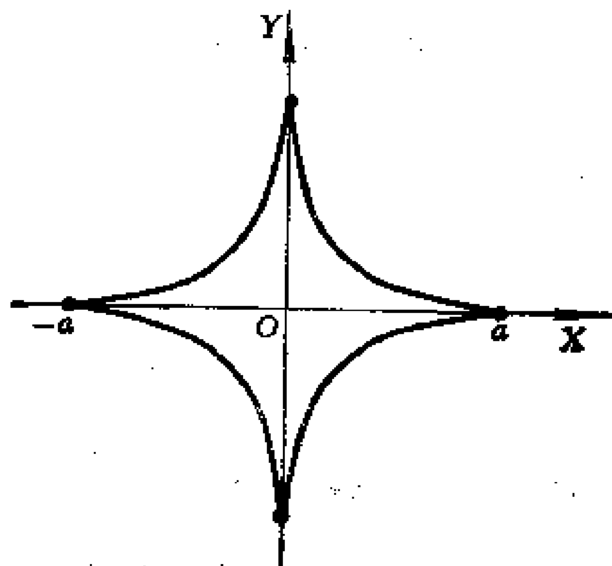



图 16-11

**解** 我们有

$$\sigma(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)$$

$$- a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2 .$$

**例5** 试计算

$$W_C = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

$$W_E = \oint_E \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

$$W_\Gamma = \oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

这里$C$是圆周$x^2+y^2=r^2$，$E$是椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\Gamma$是环绕原点的任意连续可微的简单闭曲线——这些曲线都根据它们所围的有界区域来诱导定向。

**解** 利用圆的参数方程进行计算，很容易求得

$$W_C = \int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\mathrm{d}t = 2\pi.$$

第二个积分的直接计算比较麻烦，我们将采用间接方法计算。选取半径充分小的圆周$C$，使得这圆周完全包含在$E$的内部。把$C$与$E$之间的闭环状区域记为$\Omega$。在这环状区域中，函数

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad 和 \quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

都是连续可微的，并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

因而

$$\int_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=0.$$

由此得到

$$W_E=W_C=2\pi.$$

用同样的办法可以求得

$$W_\Gamma=2\pi.$$

这结果似乎有些使人感到惊奇。其实，我们可以把被积表达式写成

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{y}{x}=\mathrm{d}\theta,$$

这里$\theta$是点$(x,y)$的幅角。不管沿怎样的连续可微简单闭曲线$\Gamma$绕原点一周，积分$W_\Gamma$的值都应等于幅角的增量$2\pi$。

**例6** 试计算积分

$$W_\Gamma=\oint_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

这里$\Gamma$是不围绕原点的连续可微简单闭曲线，并且依据它所围的

有界区域诱导定向。

**解** 把 $\Gamma$ 所围绕的有界闭区域记为 $\Omega$。因为 $\Omega$ 不含原点，所以函数

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

都在 $\Omega$ 连续可微，并且有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

因而

$$W_\Gamma=\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

### 3.b 高斯公式

高斯公式把沿三维区域边界的第二型曲面积分转换为展布在这区域上的三重积分。与上一段中的讨论类似，我们通过对几种较简单情形的分析，证明一般的结论。

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域

$$H=\{x_0(y,z)\leqslant x\leqslant x_1(y,z),\quad (y,z)\in D\},$$
$$K=\{y_0(z,x)\leqslant y\leqslant y_1(z,x),\quad (z,x)\in E\}$$

和

$$M=\{z_0(x,y)\leqslant z\leqslant z_1(x,y),\quad (x,y)\in F\},$$

这里的 $D$, $E$ 和 $F$ 分别是 $YZ$ 平面, $ZX$ 平面和 $XY$ 平面上由连续并且分段连续可微的曲线围成的闭区域，$x_0,x_1,y_0,y_1$ 和 $z_0,z_1$ 分别是 $D$, $E$ 和 $F$ 上的连续可微函数。我们约定把象 $H$ 这样的区域叫做甲类区域，把象 $K$ 这样的区域叫做乙类区域，把象 $M$ 这样的区域叫做丙类区域。设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域。如果 $\Omega$ 可以表示成有限多个两两无公共内点的甲类（乙类、丙类）区域的并集，那么

我们就说$\Omega$可以分拆为甲类（乙类、丙类）区域。

**定理2**（高斯公式） 设$\Omega$是$\mathbb{R}^3$中的闭区域，它既可以分拆为甲类区域，又可以分拆为乙类区域，也可以分拆为丙类区域。如果函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$都在$\Omega$上连续可微，那么就有

$$\iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里$\partial\Omega$是$\Omega$的边界，它以向外的法线方向为正方向。

**证明** 设$H$是一个甲类区域。我们来计算积分

$$\iint_{\partial H} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

甲类区域$H$的边界$\partial H$由左、右两块曲面$S_0$，$S_1$和柱形侧面$S$组成，这里

$$S_0:\ x = x_0(y,z),\ (y,z)\in D,$$
$$S_1:\ x = x_1(y,z),\ (y,z)\in D,$$

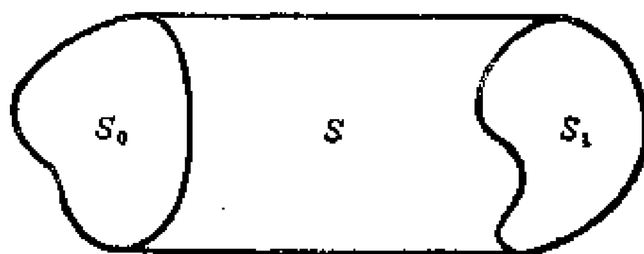



图 16-12

柱形侧面$S$垂直于$YZ$平面（图16-12）。根据第二型曲面积分的定义，应该有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0.$$

沿 $S_0$ 和 $S_1$ 的积分也容易计算：

$$\iint_{S_0} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\iint_D P(x_0(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{S_1} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint_D P(x_1(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这样，我们得到

$$\begin{aligned}&\oiint_{\partial H} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&=\iint_D\left(\int_{x_0(y,z)}^{x_1(y,z)}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_H\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

因为 Ω可以表示成有限多个两两无公共内点的甲类区域的并集，所以也应有

$$\oiint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iiint_\Omega\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

类似地可以证明

$$\oiint_{\partial\Omega} Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iiint_\Omega\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oiint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

以上三式相加就得到高斯公式的一般形式。 □

引入记号

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}P + \boldsymbol{j}Q + \boldsymbol{k}R,$$

可以把高斯公式改写成这样的形式

$$\oiint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法线单位向量。

**例 7** 设 $\Omega$ 满足定理 2 中的条件，试说明 $\Omega$ 的体积可按以下任一式计算：

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \oiint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \oiint_{\partial\Omega} y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \\ &= \oiint_{\partial\Omega} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

**解** 利用高斯公式就得到

$$\oiint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = V(\Omega).$$

其余几式可以类似地证明。

**例 8** 我们继续上例中的讨论。设 $\Omega$ 的边界具有正则参数表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), \quad (u,v)\in D,$$

这里

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

利用这一参数表示来计算表示体积的曲面积分，就得到

$$V(\Omega)=\pm\frac{1}{3}\iint_D(xA+yB+zC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\pm\frac{1}{3}\iint_D\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

在具体计算时，不必费心考虑怎样的符号选择对应于外法线向量。因为体积总是正的，所以只要对计算的结果取绝对值就可以了。

### 3.c 斯托克斯公式

斯托克斯公式把沿一块曲面边界的第二型曲线积分与展布在这块曲面上的第二型曲面积分联系起来。在某种意义上，斯托克斯公式可以看作格林公式的推广。我们也将利用格林公式来证明斯托克斯公式。

设$D$是一块二阶连续可微的正则简单参数曲面：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in\Delta,$$

这里$\Delta$是$\mathbb{R}^2$上由分段正则曲线围成的闭区域，而

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

是二阶连续可微的单一的映射，满足条件

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0,\quad \forall (u,v)\in\Delta.$$

在曲面块$D$上选择好一个定向，这定向也就在$D$的边界$\partial D$上诱导了一个定向（诱导法则：在$D$的正侧沿$\partial D$的正方向前进时，$D$应该在$\partial D$的左方）。又设函数$P(x,y,z)$在$D$上连续可微（这就是说$P$在包含$D$的一个开集上是连续可微的）。我们来考察第

二型曲线积分

$$\oint_{\partial D} P(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

在所给的条件下，应该有

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x = \oint_{\partial \Delta} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right). \tag{3.1}$$

事实上，以边界曲线的参数表示代入计算，上式左右两端的结果是一样的。

在（3.1）式中，我们已将空间的第二型曲线积分转换为参数平面上的第二型曲线积分。于是，可以对后者运用格林公式：

$$\oint_{\partial \Delta} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) = \iint_{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3.2}$$

计算得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\\
&\quad - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\\
&= \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.
\end{aligned}$$

于是得到

$$\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.3}$$

$$=\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D}\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

综合 (3.1),(3.2) 和 (3.3)，我们得到

$$\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x=\iint_{D}\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

设 $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 也都在 $D$ 上连续可微，用类似的办法可以证明：

$$\oint_{\partial D}Q\mathrm{d}y=\iint_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{3.5}$$

$$\oint_{\partial D}R\mathrm{d}z=\iint_{D}\frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

将 (3.4) 式，(3.5) 式和 (3.6) 式相加，就得到

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}&P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.7}$$

这就是对正则简单曲面情形的斯托克斯公式。据此可以得到更一般情形的斯托克斯公式。

**定理3**（斯托克斯公式） 设 $S$ 是由有限块二阶连续可微的正则简单曲面拼接而成的可定向曲面，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 是在 $S$ 上连续可微的函数，则有以下等式成立：

$$\oint_{\partial S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

**注记** 我们提醒读者注意：在斯托克斯公式中，边界曲线 $\partial S$ 的定向应该是按照诱导法则决定的定向，否则在公式的右端就需要添上一个负号。

为了帮助读者记忆斯托克斯公式，我们指出以下几点：

(1) 斯托克斯公式右端被积表达式的第一项与格林公式的情形类似，第二和第三项可以通过字母轮换而得到；

(2) 斯托克斯公式的右端可以写成

$$\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

(3) 如果借助于第一型曲面积分来表示第二型曲面积分，那么 (2) 中的积分又可写成

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

## §4 微 分 形 式

微分形式（又称外微分形式）是一种很有用的数学工具．采用微分形式记号，能够统一地表达上节中的几个重要公式．这种表达形式还能作很一般的推广——对进一步的数学研究有重要意义的推广．虽然我们这里还不能对有关问题作全面深入的探讨，但初步结识微分形式也仍然是很有益处的．

在学习第二型曲线积分和第二型曲面积分的时候，我们涉及到这样一些被积表达式：

(4.1) $$Pdx + Qdy + Rdz,$$

(4.2) $$Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy.$$

象（4.1）和（4.2）这样的式子，分别被称为（$R^3$ 中的）1次微分形式和2次微分形式。我们还把如下形状的表示式

(4.3) $$g(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$$

叫做（$R^3$ 中的） 3次微分形式．

在讨论曲线积分的时候，我们把（4.1）中的 $dx$, $dy$ 和 $dz$ 看作有向长度（有向曲线上一段微小的长度在三个坐标轴上的投影）．在讨论曲面积分的时候，我们把（4.2）中的 $dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$ 和 $dx\wedge dy$ 看作有向面积（有向曲面上一块微小面积在三个坐标面上的投影）。至于（4.3）中的 $dx\wedge dy\wedge dz$，我们也把它看作 $R^3$ 中的有向体积元．为了体现有向性，我们约定：

$$dy\wedge dx = -dx\wedge dy,$$

$$dz\wedge dy = -dy\wedge dz,$$

$$\begin{aligned}
dx\wedge dz &= -dz\wedge dx,\\
dy\wedge dx\wedge dz &= -dx\wedge dy\wedge dz,\\
dx\wedge dz\wedge dy &= -dx\wedge dy\wedge dz,\\
dz\wedge dy\wedge dx &= -dx\wedge dy\wedge dz,\\
dx\wedge dy\wedge dz &= dy\wedge dz\wedge dx\\
&= dz\wedge dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

通常以$dx\wedge dy\wedge dz$表示正的体积元。于是

$$\iiint_V g(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$$

$$=\iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint_V g(x,y,z)\,dy\wedge dx\wedge dz$$

$$=-\iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz.$$

——这里的

$$\iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

表示通常的三重积分。

除了上面所说的1次，2次和3次微分形式而外，我们还把数值函数$f(x,y,z)$叫做($\mathbb{R}^3$中的)0次微分形式。

在$\mathbb{R}^n$空间中，我们把如下形状的表示式叫做$p$次微分形式：

$$(4.4)\qquad \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},$$

这里对每一个标号$i_1,\cdots,i_p$都从1到$n$求和。为了书写省事，常

常把(4.4)式简单地记为

$$(4.4)' \qquad \sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I,$$

——对于 $p$ 次形式而言 $I$ 是 $p$ 重指标

$$I=\{i_1,\cdots,i_p\},$$

它的每一个分量都在 1 到 $n$ 范围内变化。我们也把数值函数

$$g(x^1,\cdots,x^n)$$

叫做($\mathbb{R}^n$ 中的) 0 次形式。

对于 $p$ 次微分形式，按以下两式定义了加法和乘以数值函数的运算：

$$\sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I+\sum_I b_I(x)\mathrm{d}x^I$$

$$=\sum_I(a_I(x)+b_I(x))\mathrm{d}x^I,$$

$$f(x)\cdot\sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I=\sum_I(f(x)a_I(x))\mathrm{d}x^I.$$

关于符号“∧”，我们约定

$$(4.5) \qquad \mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i=-\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,$$

$$(4.6) \qquad \mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^i=0.$$

鉴于这些关系，表示式(4.4)中某些项是 0，另外还有一些项可以合并。于是，(4.4)式可以写成这样的形式：

$$(4.7) \qquad \sum_{(i_1,\cdots,i_p)} c_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p},$$

这里求和号下的圆括号表示对满足以下条件的 $i_1,\cdots,i_p$ 求和：

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n.$$

为了书写省事，也常常把(4.7)式简记为

$$\sum_{(I)} c_I(x)\mathrm{d}x^I. \tag{4.7$'$}$$

下面，我们扩充符号“$\wedge$”的用法，在微分形式之间定义一种外乘运算：

(1) 对于0次形式(即数值函数) $f$ 与 $p$ 次形式 $\omega$，规定

$$f\wedge\omega=\omega\wedge f=f\omega;$$

(2) 对于 $p$ 次形式

$$\omega=\sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I$$

与 $q$ 次形式

$$\theta=\sum_J b_J(x)\mathrm{d}x^J,$$

规定

$$\begin{aligned}\omega\wedge\theta&=\Big(\sum_I a_I(x)\mathrm{d}x^I\Big)\wedge\Big(\sum_J b_J(x)\mathrm{d}x^J\Big)\\&=\sum_{I,J}a_I(x)b_J(x)\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J,\end{aligned}$$

——所得的结果还应利用关系式(4.5)和(4.6)进行化简。

这样定义的外乘法适合下面所述的运算律：

设 $f_1,f_2,g_1,g_2$ 是数值函数，$\omega_1,\omega_2,\omega$ 是 $p$ 次形式，$\theta,\theta_1,\theta_2$ 是 $q$ 次形式，$\eta$ 是 $r$ 次形式，则有

$(\Lambda_1)$ $$(f_1\omega_1+f_2\omega_2)\wedge\theta=f_1\omega_1\wedge\theta+f_2\omega_2\wedge\theta,$$ $$\omega\wedge(g_1\theta_1+g_2\theta_2)=g_1\omega\wedge\theta_1+g_2\omega\wedge\theta_2;$$

$(\Lambda_2)$ $$\omega\wedge\theta=(-1)^{pq}\theta\wedge\omega;$$

$(\Lambda_3)$ $$(\omega\wedge\theta)\wedge\eta=\omega\wedge(\theta\wedge\eta).$$

**例 1** 设有微分形式

$$\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z,$$

$$\theta = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

试计算 $\omega \wedge \theta$。

**解** 我们有

$$\begin{aligned}\omega \wedge \theta &= fP\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + gQ\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &\quad + hR\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (fP + gQ + hR)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

**例 2** 设有微分形式

$$\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z,$$

$$\theta = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z,$$

试计算 $\omega \wedge \theta$。

**解** 我们有

$$\begin{aligned}\omega \wedge \theta &= (aB - bA)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + (bC - cB)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &\quad + (cA - aC)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + \begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &\quad + \begin{vmatrix} c & a \\ C & A \end{vmatrix} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

**例 3** 考察 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n$ 个 1 次形式

$$\omega^j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j(x)\mathrm{d}x^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

试证明

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n=\det(a_i^j(x))dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

**证明** 根据定义应有

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$$

$$=\left(\sum_{i_1}a_{i_1}^1(x)dx^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_n}a_{i_n}^n(x)dx^{i_n}\right)$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n}a_{i_1}^1(x)\cdots a_{i_n}^n(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n}.$$

为了整理上面的表示式，我们引入记号

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}0, & \text{如果 } i_1,\cdots,i_n \text{ 当中有相同的数字;}\\ -1, & \text{如果 } i_1,\cdots,i_n \text{ 是数字 } 1,\cdots,n \text{ 的奇排列;}\\ 1, & \text{如果 } i_1,\cdots,i_n \text{ 是数字 } 1,\cdots,n \text{ 的偶排列.}\end{cases}$$

利用这记号，可以把 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n}$ 表示为

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

这样，我们得到

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$$

$$=\left(\sum_{i_1,\cdots,i_n}\varepsilon^{i_1\cdots i_n}a_{i_1}^1(x)\cdots a_{i_n}^n(x)\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

也就是

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n=\det(a_i^j(x))dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

**例 4** 设 $f^j(x^1,\cdots,x^n)$，$j=1,2,\cdots,n$，是数值函数，则有

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^n=\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

**证明** 我们有

$$df^j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

利用例 3，就得到所求的结果。

前面已经谈到，任何 $p$ 次微分形式都可以写成

$$\omega=\sum_{(I)}a_I(x)\mathrm{d}x^I, \tag{4.8}$$

其中$\sum$号下的圆括弧，表示对满足以下条件的重指标 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$求和：

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n.$$

在这样的标准表示下，如果各系数 $a_I(x)$都在某区域上 $r$ 阶连续可微，那么我们就说这形式 $\omega$ 在该区域上是 $r$ 阶连续可微的，简称是 $C^r$ 的。对于 $r\geqslant1$ 的情形，我们可以定义一种运算 d，这运算作用于一个 $p$ 次 $C^r$ 微分形式，产生一个 $p+1$ 次 $C^{r-1}$ 微分形式。运算 d 由以下条件唯一确定：

$(\mathrm{d}_1)$ $$\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1+\mathrm{d}\omega_2;$$

$(\mathrm{d}_2)$ $$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta$$

（这里设 $\omega$ 是 $p$ 次形式）；

$(\mathrm{d}_3)$ $$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0;$$

$(\mathrm{d}_4)$ 如果 $f$ 是 0 次$C^r$形式（即 $r$ 阶连续可微函数），那么 $\mathrm{d}f$ 就是函数 $f$ 的微分。

我们来说明这样的运算 d 是完全确定的。由于条件$(\mathrm{d}_1)$，我们可以只考察 d 对"单项形式"的作用，不妨设 $\omega$ 具有这样的形状：

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p.$$

利用条件$(\mathrm{d}_2)$，我们得到

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p+f\wedge\mathrm{d}(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p).$$

利用条件$(\mathrm{d}_3)$（并利用$(\mathrm{d}_2)$），通过归纳法可以证明

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p)=0.$$

这样，我们得到

$$d\omega = df\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p.$$

根据($d_4$)，我们得知

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

于是

$$d\omega=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p$$

$$=\sum_{j=p+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p.$$

我们把由性质($d_1$)—($d_4$)所决定的运算 d 叫**做外导数或者外微分**。根据上面的讨论，对于

$$\omega=\sum_I a_I(x)dx^I,$$

应有

$$d\omega=\sum_I (da_I(x))\wedge dx^I.$$

下面，我们再来考察$R^2$和$R^3$中的微分形式，并给格林公式，高斯公式和斯托克斯公式以新的表述。

在格林公式中，曲线积分的被积表达式是$R^2$中的微分形式

$$\omega=P\,dx+Q\,dy.$$

计算这形式的外微分得

$$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

于是，格林公式可以写成

$$\oint_{\partial D} \omega = \iint_D \mathrm{d}\omega,$$

——这里的$D$是满足一定条件的平面区域，而$\partial D$是它的边界曲线。

在高斯公式中，曲面积分的被积表达式是2次微分形式

$$\omega = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

计算这形式的外微分得

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

于是，高斯公式可以写成

$$\oiint_{\partial D} \omega = \iiint_D \mathrm{d}\omega,$$

——这里的$D$是满足一定条件的空间区域，而$\partial D$是$D$的边界曲面。

在斯托克斯公式中，曲线积分的被积表达式是

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

计算这形式的外微分得

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

于是，斯托克斯公式可以写成

$$\oint_{\partial D}\omega=\iint_{D}\mathrm{d}\omega,$$

——这里的$D$是满足一定条件的可定向曲面块，而$\partial D$是$D$的边界曲线。

我们看到，采用微分形式记号，格林公式，高斯公式和斯托克斯公式可以统一地表示为(不论维数如何，都只写一重积分号)：

$$\int_{D}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega,$$

这里$D$是适当的区域或适当的曲面块，$\partial D$是$D$的边界。人们把这样的一些公式统称为"斯托克斯型公式"。所有这些公式，都把展布于一定几何形的积分，与沿这几何形的边界的积分联系起来。其实，可以归入这一类型公式的还有牛顿-莱布尼兹公式：

$$\int_{[a,b]}\mathrm{d}F(x)=F(b)-F(a).$$

——这公式的左端是沿闭区间$I=[a,b]$的积分，右端的表示式可以解释为沿$I$的边界$\partial I$的"积分"。

所有的斯托克斯型公式都可以看作牛顿-莱布尼兹公式的推广。事实上，这些公式证明中的关键步骤，都用到了牛顿-莱布尼兹公式。人们把牛顿-莱布尼兹公式叫做"微积分的基本定理"，这是很有道理的。

## §5 布劳沃尔不动点定理

空间$\mathbb{R}^n$中的点集

$$B^n(r)=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2\}$$

被称为$n$维闭球体。我们来考察从$B^n(r)$到$B^n(r)$的连续映射

$$f: B^n(r) \to B^n(r).$$

对于 $n=1$ 的情形，$B^1(r)$就是闭区间$[-r,r]$。根据一元连续函数的介值定理，容易得知，任何连续映射

$$f: [-r,r] \to [-r,r]$$

都一定有不动点。——这就是说，必定存在

$$\xi \in [-r,r],$$

使得

$$f(\xi) = \xi.$$

本世纪早期，布劳沃尔（Brouwer）发展拓扑学的方法，将上面所说的结果推广到很普遍的情形。他证明了：从 $n$ 维闭球体 $B^n(r)$ 到 $B^n(r)$ 的任何连续映射 $f$ 都一定有不动点，即必定存在$\xi \in B^n(r)$，使得 $f(\xi)=\xi$.——这就是著名的布劳沃尔不动点定理。在理论数学与应用数学中，这定理都起着很重要的作用。在本节中，我们将利用"斯托克斯型公式"这样的分析工具，作出布劳沃尔不动点定理的一种较简单的证明。为了便于理解，我们将首先对 $n=2$ 与 $n=3$ 的情形展开讨论；然后说明怎样将这证明推广到更一般的情形。我们将对闭单位球体

$$B^n = B^n(1)$$

陈述并证明定理。

以下判断符合我们的直观与经验：一个圆面，保持边界圆周上的每一点固定不动，如果不把这圆面撕破，那么就不能使整个圆面缩到边界圆周上去。如果以 $B^2=B^2(1)$ 表示闭单位圆面，以 $\partial B^2 = S^1$表示 $B^2$ 的边界——单位圆周，那么上述基本事实（附加一定的分析条件）可以陈述为这样一个定理：

**定理1** 不存在满足以下条件(1)和(2)的二阶连续可微映射 $g: B^2 \to \mathbb{R}^2$,

(1) $g(x)=x,\quad \forall x=(x_1,x_2)\in \partial B^2$,

(2) $g(B^2) \subset \partial B^2$.

**证明** 用反证法。假设存在满足条件(1)和(2)的二阶连续可微映射

$$g=(g_1,g_2):\ B^2\to\mathbb{R}^2.$$

——这里$g_1(x)=g_1(x_1,x_2)$和$g_2(x)=g_2(x_1,x_2)$表示$g(x)=g(x_1,x_2)$的分量。利用$g$，我们构造这样一个微分形式：

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2.$$

下面，将用两种不同的方法计算$\omega$沿着单位圆周$\partial B^2=S^1$的积分（约定$\partial B^2=S^1$以反时钟方向为正向）。

首先，根据格林公式，我们有

$$\int_{\partial B^2}\omega=\iint_{B^2}\mathrm{d}\omega.$$

这里须指出，为了应用格林公式于微分形式

$$P\mathrm{d}x_1+Q\mathrm{d}x_2,$$

至少要求$P$和$Q$是一阶连续可微的。因为$g=(g_1,g_2)$是二阶连续可微的，所以可以对微分形式

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2=g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

应用格林公式。利用上一节中所述的外微分运算的性质$(\mathrm{d}_1)$—$(\mathrm{d}_4)$计算$\mathrm{d}\omega$，我们得到

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}g_1\wedge\mathrm{d}g_2=\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2.$$

但因为

$$g(B^2)\subset\partial B^2=S^1,$$

所以对任何$x=(x_1,x_2)\in B^2$，都有

$$(g_1(x))^2+(g_2(x))^2=1.$$

微分这式子就得到

$$g_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}+g_2\frac{\partial g_2}{\partial x_1}=0,$$

$$g_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}+g_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}=0.$$

我们看到，以

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x)\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x)\end{bmatrix}$$

为系数方阵的齐次线性方程组有非零解

$$(g_1(x),g_2(x)).$$

因而这方阵的行列式应该等于 0：

$$\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}=0.$$

由此得到

$$\int_{\partial B^2}\omega=\iint_{B^2}\mathrm{d}\omega=\iint_{B^2}\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2=0.$$

另一方面，因为

$$g(x)=x,\qquad \forall x\in\partial B^2,$$

所以有

$$(5.1)\qquad \int_{\partial B^2} g_1 dg_2 = \int_{\partial B^2} x_1 dx_2 \text{①}.$$

由此得到

$$\int_{\partial B^2} \omega = \int_{\partial B^2} g_1 dg_2 = \int_{\partial B^2} x_1 dx_2$$

$$= \iint_{B^2} d(x_1 dx_2) = \iint_{B^2} dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \pi > 0.$$

以上我们用不同的办法计算积分

$$\int_{\partial B^2} \omega = \int_{\partial B^2} g_1 dg_2,$$

得到了互相矛盾的结果。这矛盾说明满足所述条件的二阶连续可微映射 $g=(g_1, g_2)$ 根本就不可能存在。 □

**定理2** 设 $f$：$B^2 \to \mathbb{R}^2$是二阶连续可微映射，满足条件

$$f(B^2) \subset B^2.$$

则必定存在 $\xi \in B^2$，使得

$$f(\xi) = \xi.$$

**证明** 用反证法。假设 $f$ 没有不动点。则可按以下办法构作一个映射 $g$：从点 $f(x)$ 出发经过点 $x$ 引射线与 $\partial B^2$ 交于一点 $y$（参看图16-13），我们定义

$$g(x) = y.$$

---

① 设 $x_1 = x_1(t)$，$x_2 = x_2(t)$ 是圆周 $\partial B^2$ 的参数表示，则有

$$g_2(x_1(t), x_2(t)) = x_2(t),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} dx_1(t) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} dx_2(t) = dx_2(t).$$

因此，利用参数表示计算（5.1）两边的积分所得结果应该相同。

下面来说明：对任意给定的$x\in B^2$，上述 $g(x)$ 是唯一确定的；并且$g$：$B^2\to\mathbb{R}^2$是二阶连续可微映射。事实上，$g(x)$应满足条件

$$g(x)=f(x)+t(x-f(x)),\quad t\geqslant 1,$$

$$\|g(x)\|^2=\|f(x)+t(x-f(x))\|^2=1.$$

因此，$t$ 应该满足二次方程

$$t^2\|x-f(x)\|^2+2tf(x)\cdot(x-f(x))+\|f(x)\|^2-1=0$$

（圆黑点"·"表示向量的内积）。

因为

$$\|x-f(x)\|^2>0,\qquad \|f(x)\|^2-1\leqslant 0,$$

所以，对于给定的 $x\in B^2$，关于 $t$ 的二次方程有两个实根，并且其中至多只有一个根是正的。考察方程左边的式子，我们看到：当 $t=1$ 的时候该式等于

$$\|x\|^2-1\leqslant 0;$$

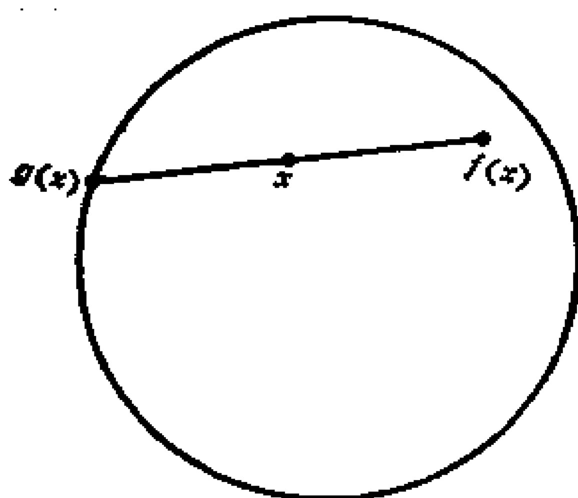



图 16-13

而当 $t$ 充分大的时候该式显然大于0。由此得知，对任意给定的 $x\in B^2$，关于 $t$ 的二次方程有唯一正根

$$t=t(x)\geqslant 1.$$

（这一事实从几何上看是很明显的：从点 $f(x)$出发经过点 $x$ 所引的射线与 $\partial B^2$ 恰有一个交点。）利用二次方程根的表示式容易看出：$t(x)$ 关于 $x$ 至少是二阶连续可微的。因而

$$g(x)=f(x)+t(x)(x-f(x))$$

也至少是二阶连续可微的。

按照 $g$的定义，显然有

(1) $g(x)=x$, $\forall x\in\partial B^2$,

(2) $g(B^2)\subset\partial B^2$.

但这与定理 1 矛盾。我们用反证法证明了定理2。 □

定理 2 是关于二阶连续可微映射的布劳沃尔不动点定理。为了证明关于连续映射的布劳沃尔定理，我们需要用到这样一个逼近定理：

**维尔斯特拉斯逼近定理** 设 $n$ 元函数 $q(x)$ 在闭球体 $B^n$ 上连续，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $n$ 元多项式 $p(x)$，使得

$$|p(x)-q(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in B^n.$$

我们将在第二十一章中证明这个关于 $n$ 元连续函数的维尔斯特拉斯逼近定理。这里先引用它来证明以下的布劳沃尔不动点定理。

**定理3** 设 $f$: $B^2\to\mathbb{R}^2$ 是连续映射，满足条件

$$f(B^2)\subset B^2,$$

则存在 $\xi\in B^2$，使得

$$f(\xi)=\xi.$$

**证明** 用反证法。假设 $f$ 在 $B^2$ 上没有不动点，那么连续函数

$$\|f(x)-x\|$$

在有界闭集 $B^2$ 上一定取得正的最小值。我们可以取 $\varepsilon>0$，使得

$$3\varepsilon<\min_{x\in B^2}\|f(x)-x\|.$$

映射 $f=(f_1,f_2)$: $B^2\to\mathbb{R}^2$ 的两个分量

$$f_1:\ B^2\to\mathbb{R}^1 \quad 和 \quad f_2: B^2\to\mathbb{R}^1$$

都是连续函数。根据维尔斯特拉斯逼近定理，存在多项式 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$，使得

$$|p_1(x)-f_1(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad \forall x\in B^2,$$

$$|p_2(x)-f_2(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad \forall x\in B^2.$$

我们记

$$p=(p_1,p_2),$$

则有

$$\|p(x)-f(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in B^2.$$

虽然对于 $x\in B^2$，不一定有 $p(x)\in B^2$，但可断定

$$\|p(x)\|\leqslant\|f(x)\|+\|p(x)-f(x)\|<1+\varepsilon.$$

如果记

$$h(x)=\frac{1}{1+\varepsilon}p(x),$$

那么 $h$: $B^2\to\mathbb{R}^2$ 满足条件

$$h(B^2)\subset B^2.$$

对任意的 $x\in B^2$，我们有

$$\begin{aligned}
&\|h(x)-f(x)\|\\
&\quad=\left\|\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)-f(x)\right\|\\
&\quad=\frac{1}{1+\varepsilon}\|p(x)-f(x)-\varepsilon f(x)\|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\|p(x)-f(x)\|+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f(x)\|\\
&\quad\leqslant\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}<2\varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|x-h(x)\|\\
&\quad\geqslant\|x-f(x)\|-\|h(x)-f(x)\|\\
&\quad>3\varepsilon-2\varepsilon=\varepsilon>0.
\end{aligned}$$

但 $h$: $B^2\to\mathbb{R}^2$ 是二阶连续可微映射，满足条件

$$h(B^2)\subset B^2.$$

根据定理2，映射 $h$ 必定具有不动点。这就是说，必定存在$x\in B^2$，使得

$$\|x-h(x)\|=0.$$

我们得到了矛盾的结果，从而完成了反证法的证明。 □

对于 $n=3$ 的情形，可以仿照上面的讨论，用类似的办法证明布劳沃尔不动点定理。我们将简单地陈述主要的步骤。

**定理1′** 不存在满足以下条件(1)和(2)的二阶连续可微映射 $g$: $B^3\to\mathbb{R}^3$，

(1) $g(x)=x$, $\forall x\in\partial B^3$,

(2) $g(B^3)\subset\partial B^3$.

假设存在这样的映射 $g=(g_1,g_2,g_3)$，则可构作微分形式

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2\wedge\mathrm{d}g_3.$$

如同定理1证明中那样，我们可以用两种不同的办法计算积分

$$\iint_{\partial B^3}\omega,$$

从而导出矛盾。只不过代替定理1证明中所用到的格林公式，我们这里需要利用高斯公式。

定理1′是关键的一步。有了定理1′，利用与定理2几乎完全相同的证明方法，就可得到

**定理2′** 设 $f$: $B^3\to\mathbb{R}^3$ 是二阶连续可微映射，满足条件

$$f(B^3)\subset B^3,$$

则必定存在 $\xi\in B^3$，使得

$$f(\xi)=\xi.$$

然后，利用关于三元连续函数的维尔斯特拉斯逼近定理，几乎逐字逐句照搬定理3的证明，就能得到

**定理3′** 设 $f$: $B^3\to\mathbb{R}^3$ 是连续映射，满足条件

$$f(B^3) \subset B^3,$$

则必定存在 $\xi \in B^3$，使得

$$f(\xi) = \xi.$$

上面介绍了对 $n=2$ 情形与 $n=3$ 情形的布劳沃尔不动点定理的证明。这里叙述的证明方法，原则上也适用于更一般的情形。在对 $n=2$ 情形与 $n=3$ 情形的证明中，我们用到了格林公式与高斯公式。对于一般的 $n$，这种证明方法需要用到关于 $n$ 维球的斯托克斯型公式。在以后的关于微分流形的课程中，将要介绍很一般的斯托克斯型公式。有了那样的分析工具之后，仿照这里的做法，读者可以很轻松地完成对一般情形的布劳沃尔不动点定理的证明。

## §6 曲线积分与路径无关的条件

在怎样的条件下曲线积分与路径无关(只与起点和终点有关)？这样的问题对于理论研究和实际应用都有十分重要的意义。例如，在物理学中，功与路径无关意味着力场是有势场。这样的场值得特别关注。

### 6.a 平面单连通区域情形

设 $G$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $G$ 中连续可微。又设 $M_0$ 和 $M_1$ 是 $G$ 中任意给定的两点，联结 $G$ 中两点 $M_0$ 和 $M_1$ 的路径 $\gamma$ 当然不止一条。如果对于 $G$ 中从 $M_0$ 到 $M_1$ 的任意分段连续可微曲线 $\gamma$，积分

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{6.1}$$

都取同样的值，那么我们就说曲线积分 (6.1) 与路径无关。

曲线积分与路径无关的某些讨论，涉及到区域 $G$ 本身的性质.

**定义** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域。如果 $G$ 中任何简单闭曲线所围成的有界区域，总是整个包含在 $G$ 中，那么我们就说 $G$ 是单连通的（否则我们就说 $G$ 是多连通的）

用直观的语言来描述，平面上的单连通区域就是没有洞的区域。在图16-14中，画阴影的区域(a)，(b)，(c)，(d)都是单连通的，而(e)，(f)，(g)，(h)则是多连通的.

**定理1** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单连通区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $G$ 上连续可微，则以下各条件相互等价：

(1) 对于 $G$ 中任何分段连续可微的闭曲线 $C$ 都有

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0;$$

(2) 对于 $G$ 中从 $M_0$ 点到 $M_1$ 点的任意两条分段连续可微曲线 $\gamma$ 和 $\eta$ 都有

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\eta P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y;$$

(3) 存在函数 $U(x,y)$，这函数在 $G$ 上连续可微，并且使得

$$\mathrm{d}U(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

（这样的函数 $U$ 被称为微分式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 $G$ 中的一个原函数）；

(4) 在 $G$ 中有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

**证明** 我们按以下程序证明定理中所列出的各条件相互等价：

$$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1).$$

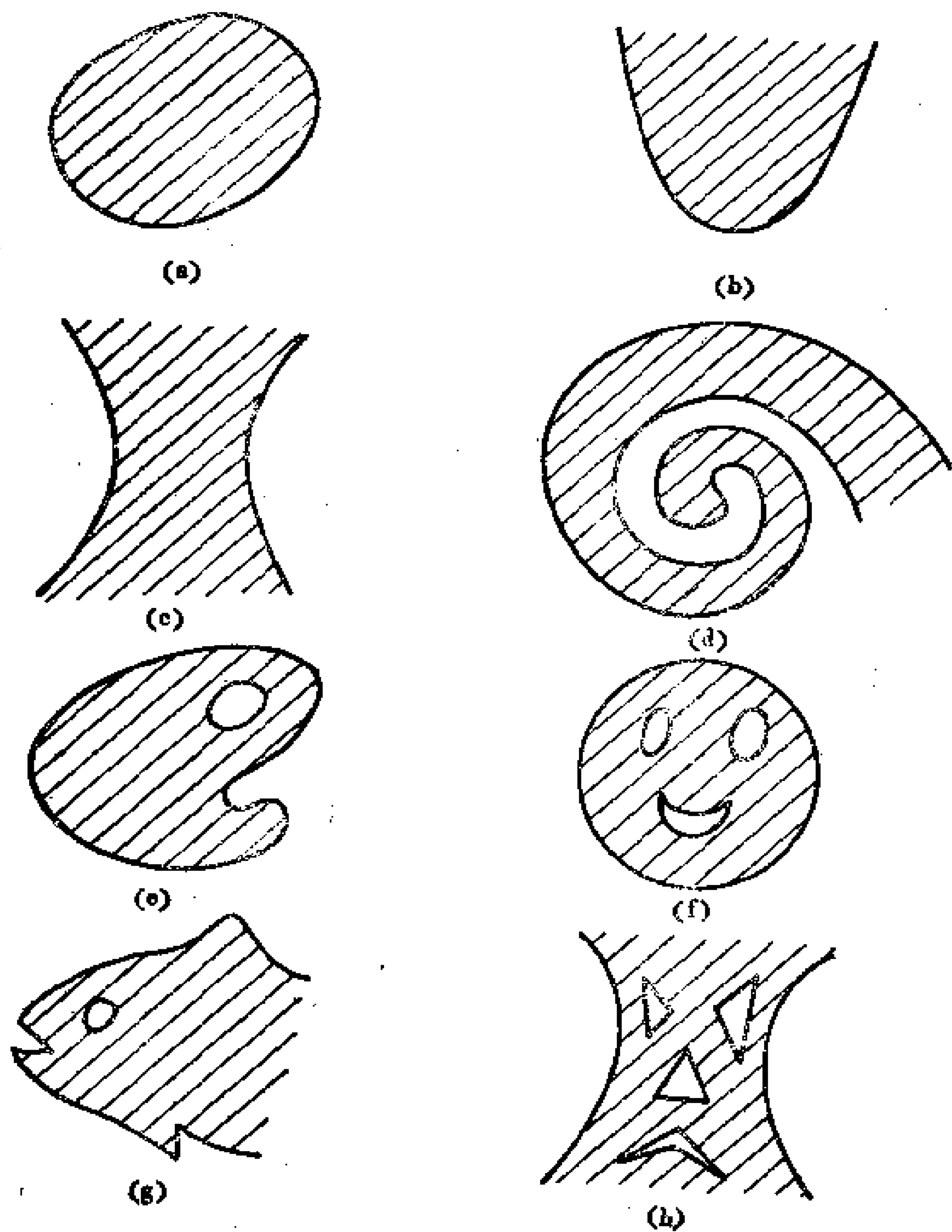



图 16-14

首先证明“(1)⇒(2)”．设 $M_0$ 和 $M_1$ 是 $G$ 中任意两点，$\gamma$ 和 $\eta$ 是 $G$ 中从 $M_0$ 到 $M_1$ 的任意两条分段连续可微的曲线．我们来考察这样的一条闭路径 $C$：先沿着 $\gamma$ 的正向从 $M_0$ 到 $M_1$，再沿着 $\eta$ 的负向从 $M_1$ 回到 $M_0$。根据条件(1)，对于闭路径 $C$ 应有

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

这就是

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_\eta P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

其次证明“(2)⇒(3)”．对于 $G$ 中从 $M_0$ 到 $M$ 的任意一条（分段连续可微的）路径 $\gamma$，曲线积分

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

都取同样的值．这样的积分只依赖于路径的起点 $M_0$ 和终点 $M$，而与中间的路径无关．我们可以把它记为

$$\int_{M_0}^{M} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

下面，我们固定 $M_0(x_0,y_0)$，而让 $M(x,y)$ 在 $G$ 中变动，这样定义了一个函数

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

将证明 $U(x,y)$ 就是微分式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数．为此，我们来考察 $U$ 在 $G$ 中任意一点 $M_1(x_1,y_1)$ 处的偏导数．因为

$$\frac{U(x_1+h,y_1) - U(x_1,y_1)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+h,y_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right.$$

$$\left.-\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{1}{h}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_1+h,y_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

只要 $h$ 充分小，从点 $M_1(x_1,y_1)$ 到点 $M(x_1+h,y_1)$ 的直线段就会含在区域 $G$ 之中，我们可以沿这直线段计算上面最后一个积分（参看图 16-15）。这样得到

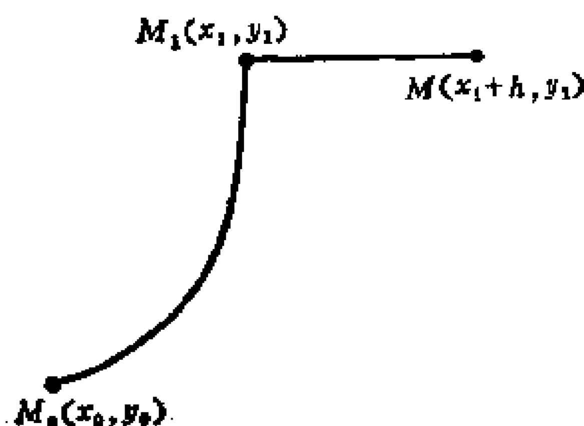



图 16-15

$$\frac{U(x_1+h,y_1)-U(x_1,y_1)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_1+h,y_1)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} P(x,y_1)\mathrm{d}x.$$

在上式中让 $h\to 0$ 取极限就得到

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_1,y_1)=P(x_1,y_1).$$

同样可得

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x_1,y_1)=\lim_{k\to 0}\frac{U(x_1,y_1+k)-U(x_1,y_1)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_{y_1}^{y_1+k} Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

$$=Q(x_1,y_1).$$

我们证明了 $U$ 在 $G$ 中有连续偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=P(x,y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=Q(x,y).$$

因而$U$是微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个原 函 数。顺 便 指出，微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的任何一个原函数都可以表示为

$$A+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

这里$A$是任意常数。

再来证明"(3) ⇒ (4)"。设$U(x,y)$是微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数，则有

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

因为$P$和$Q$都是连续可微的，所以$U$是二阶连续可微的，因而$U$的两个二阶混合偏导数相等：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

最后证明"(4) ⇒ (1)"。我们分几种情形讨论。

*情形* 1　设$C$是$G$中的一条分段连续可微的简单闭曲线。我们把由$C$所围成的闭区域记为$D$。则由格林公式可得

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

*情形* 2　设$C$是$G$中的一条只有有限个自交点的分段连续可微闭曲线，对这情形，可以把$C$分成有限个简单闭曲线

$$C_1,C_2,\cdots,C_m$$

(图 16-16 中画出了 $m=3$ 的情形)。

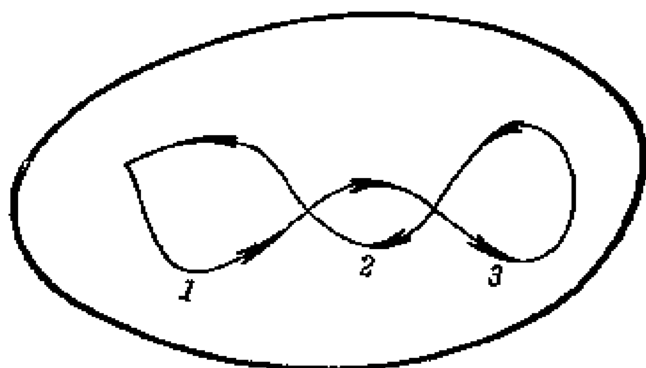



图 16-16

于是

$$\oint_C Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} Pdx + Qdy = 0.$$

*情形* 3　曲线$C$有无穷多个自交点。对这情形，我们可以用封闭折线 $\Lambda$ 去逼近曲线$C$，并可要求 $\Lambda$ 只有有穷多个自交点。于是

$$\oint_{\Lambda} Pdx + Qdy = 0.$$

取一序列这样的闭折线 $\Lambda_n$ 趋近于曲线$C$，通过极限过程就得到

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0. \qquad \square$$

于是，对于$G$是平面单连通区域的情形，如果需要判断积分

$$\int Pdx + Qdy$$

是否与路径无关，或者需要判断微分式

$$Pdx + Qdy$$

在$G$上是否恰好为某个函数的全微分（即是否所谓的"恰当形式"），那么最方便的办法就是去检验是否有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

### 6.b 平面多连通区域情形

对于平面多连通区域 $G$，上段定理 1 中的(1)，(2)和(3)这三项仍然互相等价，但第(4)项不与前三项等价。对这情形，(1)与(2)的等价性同样很容易证明（请参看定理 1 证明中"(1) $\Rightarrow$ (2)"那一部分）。我们把(2)与(3)的等价性陈述为以下的定理。

**定理 2** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $G$ 连续，则以下两陈述相互等价：

(a) 第二型曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

在 $G$ 中与路径无关；

(b) 微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 $G$ 中具有原函数 $U(x,y)$。

**证明** 在上面定理 1 的证明中，"(2) $\Rightarrow$ (3)"这一步推理并未用到区域的单连通性质。本定理的"(a) $\Rightarrow$ (b)"这一部分，实际上已在那里证明了。下面，我们来证明"(b) $\Rightarrow$ (a)"。

考察 $G$ 中从点 $M_0$ 到点 $M_1$ 的任意一条分段连续可微曲线：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta].$$

复合函数 $U(x(t),y(t))$ 也是分段连续可微的。在这函数连续可微处，我们有

$$\mathrm{d}U(x(t),y(t))=P(x(t),y(t))\mathrm{d}x(t)+Q(x(t),y(t))\mathrm{d}y(t).$$

于是

$$\int_{\gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}U(x(t),y(t))$$

$$=U(x(\beta),y(\beta))-U(x(\alpha),y(\alpha))$$
$$=U(M)-U(M_0).$$

这说明曲线积分$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$中与路径无关。 □

例1 区域$G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$不是单连通的。在这区域上，考察函数

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

虽然有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

仍与路径有关。——我们在§3例5中已经看到，沿绕原点的任何分段连续可微的简单闭曲线$\Gamma$，都有

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=2\pi.$$

### 6.c 原函数的计算

设$G$是$\mathbb{R}^2$中的一个区域，函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在$G$上连续。如果曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

在$G$中与路径无关，那么微分式

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

就是一个恰当形式，它的原函数可按下式计算

$$(6.2)\qquad U(x,y)=C+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

考察点 $M_0(x_0,y_0)$, $M'(x,y_0)$, $M''(x_0,y)$ 和 $M(x,y)$(参看图 16-17)。

如果区域 $G$ 包含了折线 $M_0M'M$，那么我们可以沿这折线计算积分(6.2)，这样得到

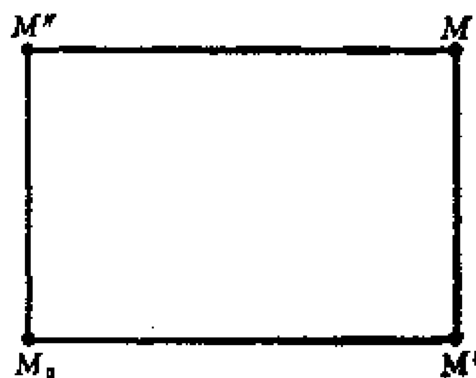



图 16-17

$$\begin{aligned}U(x,y)&=C+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=C+\int_{x_0}^{x}P(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta)\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

在上面最后的表示式中，所有的积分都已化成了寻常的定积分。

如果区域 $G$ 包含了折线 $M_0M''M$，那么我们可以按以下方式把(6.2)化为定积分计算：

$$\begin{aligned}U(x,y)&=C+\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{(x_0,y)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=C+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{x_0}^{x}P(\xi,y)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

### 6.d 涉及空间区域的讨论

在空间区域 $G$ 中讨论曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

与路径无关的条件，基本结论与平面区域的情形十分相似。但就

空间区域而言，单连通性的定义陈述起来稍费口舌。我们先从较一般的情形（不一定单连通的情形）开始讨论。

**定理 3** 设 $G$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $G$ 连续，则以下两陈述相互等价：

(a) 第二型曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

在 $G$ 中与路径无关；

(b) 微分式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 在 $G$ 中有原函数 $U(x,y,z)$，即

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}U.$$

定理 3 的证明与定理 2 的证明几乎完全一样，这里就不再重复了（请读者自己练习）。

**例 2** 在力学或电学中，常常需要考察与距离平方成反比的中心力场（例如万有引力场或电场）。这样的力场可以表示为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = -q\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

这里

$$r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设有单位质量的质点或单位电量的点电荷沿路径 $\Gamma$ 移动，则力场 $\boldsymbol{F}$ 对它所做的功可以表示为以下的第二型曲线积分

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -q\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r^3}.$$

因为微分式

$$-q\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r^3}$$

有原函数

$$U(x,y,z)=\frac{q}{r},$$

所以在这样的力场中，功与路径无关。

对于一类比较简单的区域——星形区域，曲线积分与路径无关的条件很容易讨论。下面，先介绍 $\mathbb{R}^3$ 中星形区域的定义。

**定义** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域。若存在 $D$ 中一点 $A$，使得对于任何 $M\in D$，直线段 $\overline{AM}$ 均完全包含在 $D$ 中，则称 $D$ 是关于 $A$ 点为星形的区域，简称**星形区域**。

**定理4** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的星形区域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $D$ 中连续可微，则以下三项陈述相互等价：

(1) 第二型曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

在 $D$ 中与路径无关；

(2) 微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在区域 $D$ 中有原函数 $U(x,y,z)$，即

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\mathrm{d}U;$$

(3) 在 $D$ 中有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

**证明** 定理3已经对更一般的情形肯定了(1)与(2)的等价性。这里只须对星形区域的情形证明(2)与(3)等价。推理"(2) $\Rightarrow$ (3)"也不用星形区域的条件，因而这部分结论对一般区域也能适用。

设函数 $U(x,y,z)$ 在 $D$ 中连续可微，并且使得

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\mathrm{d}U,$$

也就是

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

因为 $P,Q$ 和 $R$ 是连续可微的，所以 $U$ 是二阶连续可微的。因而有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}.$$

这就是

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

同样可证

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

下面证明“(3) $\Rightarrow$ (2)”。设 $D$ 是关于 $A$ 点为星形的区域。对于 $D$ 中的任意点 $M(x,y,z)$，我们定义

$$U(M)=\int_{\overline{AM}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

将证明 $U(x,y,z)=U(M)$ 是微分式

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

的一个原函数。为此，我们考察 $D$ 中的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $M(x_0+h,y_0,z_0)$。因为 $D$ 是区域，$M_0$ 的某个邻域包含在 $D$ 中，所以对充分小的 $h$，线段 $\overline{M_0M}$ 包含在 $D$ 中。又由于 $D$ 关于 $A$ 点的星形性质，三角形面 $\triangle AMM_0$ 应完全包含在 $D$ 中(图16-18)。利用斯托克斯公式计算沿 $\triangle AM_0M$ 周界的曲线积分得到

$$\int_{AMM_0A}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

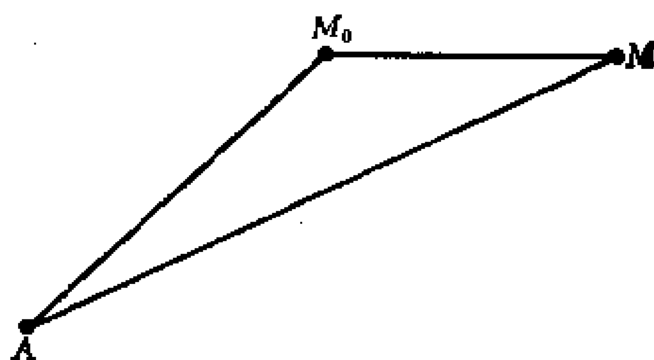



图 16-18

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{\triangle AMM_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\qquad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overline{AM}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\
&\qquad = \left(\int_{\overline{AM_0}} + \int_{\overline{M_0M}}\right) P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

也就是

$$
\begin{aligned}
&U(x_0 + h, y_0, z_0) \\
&\qquad = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} P(x, y_0, z_0)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由此容易得知

$$
\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0).
$$

因为$(x_0,y_0,z_0)$可以是$D$中任意一点，我们已经证明了

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z).$$

同样可证

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z),$$

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z).$$

这样，我们证明了，$U(x,y,z)$是微分式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$的一个原函数。 □

下面就空间区域情形介绍单连通的概念。为了叙述方便，我们尽可能将参数曲线的定义区间"标准化"，即尽可能将区域$G$中的参数曲线表示成这样的映射

$$\gamma:\ I\to G,$$

其中的$I=[0,1]$是标准区间。显然定义于任意区间$J$上的参数曲线都可以通过参数的适当线性变换化成上述形式。

**定义** 设$G$是$\mathbb{R}^3$中的一个区域。

(i) 如果$A$和$B$是$G$中的点，

$$\gamma:\ I\to G$$

是一个连续映射，满足条件

$$\gamma(0)=A,\quad \gamma(1)=B,$$

那么我们就说$\gamma$是$G$中联结$A$和$B$的一条（连续）曲线。对于$B=A$，也就是

$$\gamma(0)=\gamma(1)=A$$

的情形，我们说$\gamma$是一条闭曲线。

(ii) 若(i)中的映射$\gamma:\ I\to G$是连续可微的，则称$\gamma$为连续可微曲线。

(iii) 若(i)中的映射 $\gamma$: $I\to G$ 是分段连续可微的，则称 $\gamma$ 为分段连续可微曲线。

**注记** 所谓映射 $\gamma$: $I\to G$ “分段连续可微”是指：

(a) 映射 $\gamma$ 本身是连续的；

(b) 存在区间 $I=[0,1]$的一个分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1,$$

使得 $\gamma$ 在$(t_0,t_1)\cup(t_1,t_2)\cup\cdots\cup(t_{n-1},t_n)$是连续可微的，在 $t_0$ 右侧可微，在 $t_n$ 左侧可微，并且在 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ 各处既是左侧可微的又是右侧可微的。

我们还约定把分段连续可微曲线 $\gamma$ 上连续可微性质遭到破坏的点 $\gamma(t_1),\gamma(t_2),\cdots,\gamma(t_{n-1})$叫做这曲线的例外点。

**定义** 设$G$是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个区域，$\gamma$ 是$G$中一条连续可微的闭曲线，

$$\gamma(0)=\gamma(1)=A.$$

如果存在连续可微映射

$$H: I\times I\to G,$$

满足这样的条件

$$H(s,0)=H(s,1)=A,\quad \forall s\in I,$$

$$\left.\begin{array}{l}H(0,t)=\gamma(t)\\ H(1,t)=A\end{array}\right\},\quad \forall t\in I,$$

那么我们就说连续可微曲线 $\gamma$ 在区域$G$中是零伦的。

**注记** 我们可以把上面定义中的$H$看成是依赖于参数 $s\in I$ 的一族闭曲线

$$\gamma_s(t)=H(s,t).$$

当参数 $s$ 从 0 变到 1 时，闭曲线 $\gamma$ 就逐渐缩成点$A$。因此，“零伦”的几何直观意义就是：闭曲线 $\gamma$ 可以在$G$中缩成一个点（图16-19）。

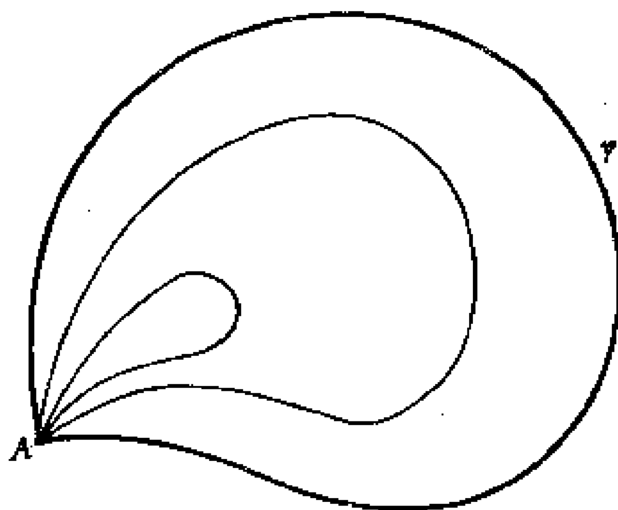



图 16-19

**定义** 设$G$是$\mathbf{R}^3$中的一个区域。如果$G$中任何一条连续可微的闭曲线在这区域中都是零伦的，那么我们就说$G$是单连通的。

**例3** (a) 开球体是单连通的。(b) 开球体内部抠了一个球形小空洞之后，剩下的部分仍然是单连通的。(c) 开球体上打了一个贯通的圆柱形孔洞之后，剩下的像一粒穿了孔的珠子那样的区域就不再是单连通的了。

下面的定理讨论空间单连通区域里第二型曲线积分与路径无关的条件。

**定理5** 设$G$是$\mathbb{R}^3$中的单连通区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$是在$G$中连续可微的函数，则以下四项陈述相互等价：

(1) 沿$G$中任何一条分段连续可微的闭曲线$\gamma$都有

$$\oint_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0;$$

(2) 沿$G$中任何两条有共同起点和共同终点的分段连续可微曲线$\eta$和$\zeta$有

$$\int_\eta P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\zeta P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

即曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

在$G$中与路径无关；

(3) 微分式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在$G$中有原函数，即存在定义于$G$上的连续可微函数 $U(x,y,z)$，使得

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}U;$$

(4) 在$G$中有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

我们将省略一些细节，概要地介绍这定理的证明。

**证明的梗概** 仿照前面的讨论，很容易证明“(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)”(这部分论证不用区域的单连通性质)。剩下来的较为困难的任务是对单连通区域的情形证明“(4)⇒(1)”。

首先指出，为了证明“(4)⇒(1)”，只须在条件(4)的前提下，证明对于$G$中任何一条连续可微的闭曲线$\gamma$都有

$$\oint_\gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

对此，我们作如下的论证：如果$G$中的闭曲线$\gamma_0$仅仅是分段连续可微的，$M$是$\gamma_0$上的一个例外点(即连续可微性质遭到破坏的点)，那么可以在$M$点两侧的曲线上分别选择对应于邻近参数值$t'$和$t$的点$M'$和$M''$，然后设法用一段连续可微曲线$\widetilde{M'M''}$代替$\gamma_0$的一段$M'MM''$，要求换上的一段在$M'$点和$M''$点处的衔接是连续可微的(具体做法在本段末的注记中予以说明)。用这样的办法依次消去所有的例外点之后，就得到一条连续可微的闭曲线$\gamma$。所作的修改可以很细小，使得修改后的一段$\widetilde{M'M''}$与原来的那一段$M'MM''$都在$M$点的一个包含于$G$内的$\varepsilon$球形邻域

之中。球形邻域当然是星形的，根据定理 4 就有

$$\int_{\underbrace{\quad}_{M'\ M''}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\underbrace{\qquad}_{M'\ M_1 M''}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

我们看到：分段连续可微的闭曲线 $\gamma_0$ 可以修改成一条连续可微的闭曲线 $\gamma$，使得

$$\oint_{\gamma_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

如果能证明上式右边的积分等于 0，左边的积分自然也就等于 0。

下面，我们就在条件(4)的前提下，证明沿 $G$ 中的任何连续可微的闭曲线 $\gamma$ 都有

$$\oint_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

设 $\gamma(0) = \gamma(1) = A$。因为区域 $G$ 是单连通的，所以存在连续可微映射

$$H:\ I \times I \to G,$$

使得

$$H(s,0) = H(s,1) = A, \quad \forall s \in I,$$

$$\left.\begin{array}{l} H(0,t) = \gamma(t) \\ H(1,t) = A \end{array}\right\}, \quad \forall t \in I.$$

将 $H$ 的像集记为

$$K = H(I \times I).$$

显然$K$是完全包含在$G$中的一个紧致集。于是，存在$\varepsilon>0$，使得到$K$的距离不超过$\varepsilon$的点全在$G$中，即

$$\{W\in\mathbb{R}^3 \mid d(W,K)\leqslant\varepsilon\}\subset G.$$

因为$H$在$I\times I$上是一致连续的，所以存在$\delta>0$，使得只要$(s,t),(s',t')\in I\times I$，

$$|s-s'|<\delta,\quad |t-t'|<\delta,$$

就有

$$d(H(s,t),H(s',t'))<\varepsilon.$$

我们取足够大的自然数$n$，使得

$$\frac{1}{n}<\delta.$$

用分界线

$$s=\frac{j}{n},\qquad t=\frac{k}{n},$$

$$j,k=1,2,\cdots,n-1,$$

将正方形$I\times I$剖分成$n\times n$个小方块

$$\Pi_{jk}=\left\{(s,t)\ \middle|\ \frac{j-1}{n}\leqslant s\leqslant\frac{j}{n},\ \frac{k-1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{k}{n}\right\},$$

$$j,k=1,2,\cdots,n.$$

我们还引入记号

$$M_{jk}=H\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right),$$

$$j,k=0,1,\cdots,n.$$

自然有

$$M_{j0}=M_{jn}=A,\qquad M_{nk}=A.$$

每个小方块$\Pi_{jk}$的像集$H(\Pi_{jk})$都包含在点$M_{jk}$的$\varepsilon$球形邻

域之中。这些 $\varepsilon$ 球形邻域都是包含在 $G$ 内的星形区域。根据定理4，在每一个这样的 $\varepsilon$ 球内部曲线积分

$$\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

与路径无关。我们可以逐次对路径 $\gamma$ 作细小的改变，使得每次变动均局限在一个 $\varepsilon$ 球之中以保证积分值不改变。最后将路径缩到 $A$ 点的 $\varepsilon$ 球形邻域之中，从而证明积分值等于0。具体做法略述如下：

第一步，将沿路径

$$\gamma = AM_{01}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A$$

的积分转换成沿路径

$$AM_{11}M_{01}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A$$

的积分，这里的 $AM_{11}M_{01}$ 是 $H(\mathrm{Bd}\Pi_{11})$ 的一部分(参看图16-20)。

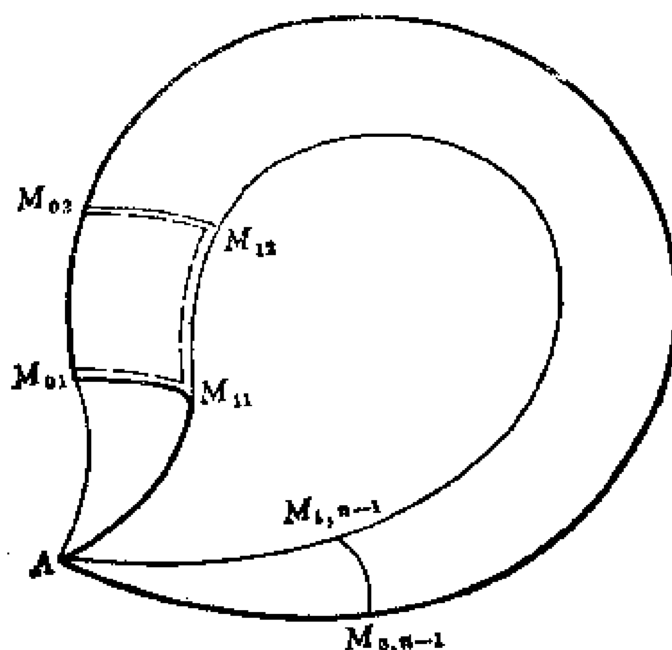



图 16-20

第二步，再将沿路径 $AM_{11}M_{01}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A$ 的积分转换成沿路径

$$AM_{11}M_{01}M_{11}M_{12}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A$$

的积分（$M_{01}M_{11}M_{12}M_{02}$这一段是 $H(\mathrm{Bd}\Pi_{12})$的一部分）。这后一积分沿曲线段 $M_{11}M_{01}$和$M_{01}M_{11}$ 的部分互相抵消，所以能转化成沿着路径

$$AM_{11}M_{12}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A$$

的积分。这样逐次做下去，可以将原来沿闭曲线 $\gamma$ 的积分化成沿闭曲线

$$\gamma_1 = AM_{11}M_{12}\cdots M_{1,n-1}A$$

的积分，然后再转化成沿闭曲线

$$\gamma_2 = AM_{21}M_{22}\cdots M_{2,n-1}A$$

的积分，……最后转化成沿闭曲线

$$\gamma_{n-1} = AM_{n-1,1}M_{n-1,2}\cdots M_{n-1,n-1}A$$

的积分。整个转化过程可以简略地写成如下的一组等式——所有积分的被积表示式都是

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

为书写简便起见而省略了。

$$\oint_{\gamma} = \oint_{AM_{01}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A}$$

$$= \oint_{AM_{11}M_{01}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A}$$

$$= \oint_{AM_{11}M_{12}M_{02}\cdots M_{0,n-1}A}$$

$$= \oint_{AM_{11}M_{12}\cdots M_{1,n-1}A}$$

$$= \oint_{AM_{21}M_{22}\cdots M_{2,n-1}A}$$

……………………………………

$$= \oint_{AM_{n-1,1}M_{n-1,2}\cdots M_{n-1,n-1}A}$$

因为闭曲线 $\gamma_{n-1} = AM_{n-1,1}M_{n-1,2}\cdots M_{n-1,n-1}A$ 上各点离 $A$ 点的距离都小于 $\varepsilon$，即 $\gamma_{n-1}$ 完全包含在 $A$ 点的 $\varepsilon$ 球形邻域之中，所以根据定理 4 应有

$$\oint_{\gamma_{n-1}} Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

这样，我们证明了

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

定理 5 的证明到此完成。 □

**注记** 上面证明开始时所述的局部修改，可以通过多项式插值的办法作出。设待修改的分段连续曲线是

$$\gamma_0(t) = (\varphi_0(t), \psi_0(t), \omega_0(t)).$$

为叙述省事起见，不妨设曲线 $\gamma_0$ 只有一个例外点 $M$。在这例外点两侧邻近的曲线上各取一点 $M'$ 和 $M''$（分别对应于参数 $t'$ 和 $t''$）。我们作待定系数的三次多项式

$$\varphi(t) = \lambda + \mu t + \nu t^2 + \rho t^3,$$

要求它满足条件

$$\begin{cases} \varphi(t') = \varphi_0(t'), & \varphi'(t') = \varphi_0'(t'), \\ \varphi(t'') = \varphi_0(t''), & \varphi'(t'') = \varphi_0'(t''). \end{cases}$$

上面的条件可以看成关于未知数 $\lambda, \mu, \nu, \rho$ 的线性方程组，该方程组的系数行列式等于 $(t' - t'')^4 > 0$。解这方程组就可以定出 $\lambda$,

$\mu,\nu,\rho$，从而定出$\varphi(t)$来。用类似的办法可以相应地确定$\psi(t)$和$\omega(t)$。这样作出的修改曲线

$$\gamma(t)=(\psi(t),\varphi(t),\omega(t))$$

就能满足我们的要求。

### 6.e 用外微分术语陈述条件

设$\omega$是一个$p$次微分形式。如果

$$d\omega=0,$$

那么我们就说$\omega$是一个*闭形式*；如果存在一个$p-1$次微分形式$\theta$，使得

$$\omega=d\theta,$$

那么我们就说$\omega$是一个*恰当形式*。

因为$d(d\theta)=0$，所以任何一个恰当形式都是闭形式。

采用外微分的术语，曲线积分与路径无关的条件可陈述如下：

**定理** 设$G$是($R^2$或$R^3$)中的一个区域，$\omega$是在$G$上连续可微的一个1次微分形式，则以下两条件相互等价：

(a) 积分$\int\omega$在$G$中与路径无关；

(b) 在$G$中，$\omega$是恰当形式。

如果$G$是一个单连通区域，那么上面的条件(a)和(b)还与以下的条件(c)等价：

(c) 在$G$中，$\omega$是闭形式。

读者不难通过术语的相互翻译认出这定理只不过是前面几段所得结论的另一种陈述方式。

## §7 恰当微分方程与积分因子

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{7.1}$$

可以改写成

$$f(x,y)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0.$$

这种写法的更一般形式是

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{7.2}$$

将一阶微分方程写成这样的形式，对于探寻初等积分方法，有时比较方便。

### 7.a 恰当微分方程

首先考察这样的情形：方程(7.2)的左端是一个恰当的微分式。我们把这样的方程叫做恰当微分方程或者全微分方程。对这种情形，存在连续可微函数$U(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}U(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{7.3}$$

于是，方程(7.2)的任何一个解$y=y(x)$必定使得

$$\mathrm{d}[U(x,y(x))]=0,$$

因而满足

$$U(x,y(x))=C, \tag{7.4}$$

——这里$C$是常数。反过来，由于(7.3)式，任何满足(7.4)的连续可微函数$y(x)$也必定满足方程(7.2)。我们求得了用隐函数形式表示的方程(7.2)的一般解

$$U(x,y)=C, \tag{7.5}$$

这里$C$是一个任意常数。像这样的用隐函数形式表示的解，通常叫做“积分”。我们得到以下结论：

**定理1** 恰当微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的通积分为

$$U(x,y)=C,$$

这里$U(x,y)$是方程左端微分式的一个原函数，$C$是任意常数。

上节中的讨论，实际上已经解决了以下两个基本问题(特别是对单连通区域的情形)：

一、怎样判断像(7.2)那样的方程是否恰当微分方程？

二、如果(7.2)是一个恰当的微分方程，那么我们怎样具体求出方程左端微分式的原函数？

因此，恰当微分方程的求解问题，可以认为是已经解决了。

具体求解的时候，常常可以通过观察直接写出原函数来。要做到这一点，需要十分熟悉微分的运算法则，并善于将微分式分组。请看下面的例子。

**例1** 求解方程

$$e^{y}\mathrm{d}x+(xe^{y}+2y)\mathrm{d}y=0.$$

**解** 将方程左端的微分式分成两组：

$$(e^{y}\mathrm{d}x+xe^{y}\mathrm{d}y)+2y\mathrm{d}y=0.$$

很容易看出：第一组微分式的一个原函数是$xe^{y}$，第二组微分式的一个原函数是$y^2$。因而原方程左端微分式的一个原函数是

$$xe^{y}+y^{2}.$$

原方程的通解(通积分)为

$$xe^{y}+y^{2}=C.$$

**例2** 求解方程

$$(7x+3y)\mathrm{d}x+(3x-5y)\mathrm{d}y=0.$$

**解** 原方程左端可按以下办法分组

$$(7x\mathrm{d}x-5y\mathrm{d}y)+(3y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y).$$

容易求出上式的原函数

$$\frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 3xy.$$

原方程的通解为

$$\frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 3xy = C.$$

以下一些公式当然是需要熟记的：

$$\alpha du + \beta dv = d(\alpha u + \beta v)$$
$$(\alpha, \beta \in \mathbb{R});$$
$$u dv + v du = d(uv);$$
$$\frac{u dv - v du}{u^2} = d\left(\frac{v}{u}\right);$$
$$\frac{u dv - v du}{u^2 + v^2} = d\left(\operatorname{arctg} \frac{v}{u}\right);$$
$$\frac{du}{u} = d \ln|u| \quad (u \neq 0);$$
$$\varphi'(u) du = d\varphi(u).$$

应该指出，观察法求原函数虽然很省事，但这方法依赖于技巧和熟练，并不是每次都能成功的。另外，除了简单的情形而外，不容易一眼就看出方程是否恰当的。如果盲目去做，可能会误入歧途。因此，上节所介绍的恰当微分式的判别法和原函数的求法，是必须牢固掌握的。

## 7.b 积分因子

恰当微分方程要求左端的微分式凑巧是一个全微分。这种情形并不多见。对一般的方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{7.6}$$

我们可以用适当的非零因子 $\mu(x,y)$ 去乘等号两边，把它化成

(7.7) $$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0,$$

这里

$$P(x,y)=\mu(x,y)M(x,y),$$
$$Q(x,y)=\mu(x,y)N(x,y).$$

如果这样得到的方程（7.7）是一个恰当微分方程，那么我们就说 $\mu(x,y)$是方程（7.6）的一个积分因子。

我们指出一个重要的事实：任何形如（7.6）的方程，都必定具有积分因子。但这一事实的证明，涉及到一阶偏微分方程理论，我们这里不能讲述。而且理论上的证明，只是肯定了积分因子的存在性，并没有告诉具体求出这因子的办法，对实际解题未必有很多帮助。下面将要介绍的，是求积分因子的某些具体办法。对于一阶微分方程来说，积分因子法概括总结了主要的初等积分法，因而给我们提供了一个很好的复习机会。

例 3 可分离变元的一阶微分方程。

这种方程的一般形式为

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x+N_1(x)N_2(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

如果 $M_2(y)N_1(x)\neq 0$，那么这方程就有积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}.$$

用这因子乘方程两边就可将变元分离：

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=0.$$

上式左端是一个恰当形式，它的一个原函数为

$$U(x,y)=\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y.$$

因而原方程的通解为

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=C.$$

例 4　考察一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),$$

这方程具有积分因子

$$\mu=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

以这因子乘原方程，就把它化成了可积分的形式

$$\mathrm{d}(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\ y)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\ q(x)\mathrm{d}x.$$

一个函数 $M(x,y)$ 被称为 $k$ 次齐次函数，如果它满足这样的条件：

(7.8)　$$M(tx,ty)=t^kM(x,y),\quad \forall t>0.$$

连续可微的 $k$ 次齐次函数 $M(x,y)$ 满足以下的欧拉恒等式：

(7.9)　$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=kM.$$

事实上，只要将 (7.8) 的两边对 $t$ 求导，然后代进 $t=1$，就可得到 (7.9)。

在下面的例子中，我们考察系数为齐次函数的微分方程.

例 5　设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 都是 $k$ 次齐次函数，则微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

具有积分因子

$$\mu=\frac{1}{xM+yN},$$

这里设 $xM+yN\neq 0$。

证明　首先，引入记号

$$P = \frac{M}{xM + yN}, \qquad Q = \frac{N}{xM + yN}.$$

我们来证明

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

计算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x\left(M\dfrac{\partial N}{\partial x} - N\dfrac{\partial M}{\partial x}\right) - MN}{(xM + yN)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y\left(N\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\dfrac{\partial N}{\partial y}\right) - MN}{(xM + yN)^2}.$$

所得两式相减，并利用恒等式（7.9），就得到

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

因而，在任何单连通区域上，$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 都是恰当微分形式。

**例 6** 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

**解** 上面的方程可以改写为

$$2xy\mathrm{d}x - (x^2 + y^2)\mathrm{d}y = 0.$$

由例 5 可知，这方程有积分因子

$$\mu = \frac{1}{2x^2y - y(x^2 + y^2)} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}.$$

下面，我们来求解恰当方程

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{y(x^2-y^2)}\mathrm{d}y=0.$$

这方程又可写成

$$\frac{2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{y(x^2-y^2)}\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\frac{2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y}{x^2-y^2}-\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

积分这方程就得到

$$\ln|x^2-y^2|-\ln|y|=\ln|C|,$$

$$\frac{x^2-y^2}{y}=C,$$

也就是

$$x^2-y^2=Cy.$$

实际解题时，常常用到分组求积分因子法。下面，我们就来说明这种方法。

设 $\mu(x,y)$ 是微分式

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y \tag{7.10}$$

的一个积分因子，并设

$$\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U.$$

如果 $\varphi$ 是一个一元连续函数，它能够与函数 $U$ 复合，那么

$$\varphi(U)\mu$$

也是微分式（7.10）的一个积分因子。事实上，我们有

$$(\varphi(U)\mu)(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$$
$$=\varphi(U)\mathrm{d}U=\mathrm{d}\Phi(U),$$

这里 $\Phi$ 是 $\varphi$ 的原函数。

我们来考察方程

$$(M_1\mathrm{d}x+N_1\mathrm{d}y)+(M_2\mathrm{d}x+N_2\mathrm{d}y)=0.$$

设这里的两组微分式分别具有积分 因 子 $\mu_1$ 和 $\mu_2$，并设

$$\mu_1(M_1\mathrm{d}x+N_1\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U_1,$$

$$\mu_2(M_2\mathrm{d}x+N_2\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U_2.$$

如果我们能选取连续函 数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$，使得

$$\varphi_1(U_1)\mu_1=\varphi_2(U_2)\mu_2,$$

那么

$$\mu=\varphi_1(U_1)\mu_1=\varphi_2(U_2)\mu_2$$

就是两组微分式共同的积分因子，因而是

$$(M_1\mathrm{d}x+N_1\mathrm{d}y)+(M_2\mathrm{d}x+N_2\mathrm{d}y)$$

的积分因子。

实际解题时，采取灵活变通的做法，往往能更快地凑出积分因子来。

**例 7** 求解方程

$$(x^2+y^2-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0.$$

**解** 将这方程改写为

$$(x^2+y^2)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

很容易看出一个积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

用这因子乘方程两边，就得到

$$\mathrm{d}x+\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0.$$

我们求得原方程的通解

$$x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C.$$

例 8　求解方程

$$y\mathrm{d}x + x(1 + x^2y^2)\mathrm{d}y = 0.$$

解　这方程可改写为

$$(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + x^3y^2\mathrm{d}y = 0.$$

形状如 $\varphi(xy)$ 的函数都是前一组的积分因子．我们选择 $\varphi$ 以使 $\varphi(xy)$ 也是后一组的积分因子．容易看出，只要取

$$\varphi(u) = u^{-3}$$

就能达到目的．以因子

$$\mu = \varphi(xy) = \frac{1}{x^3y^3}$$

乘方程两边就得到

$$\frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^3y^3} + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0.$$

积分得

$$-\frac{1}{2x^2y^2} + \ln|y| = C.$$

另外，因为我们乘了因子 $\frac{1}{x^3y^3}$，可能会失掉 $x = 0$ 或 $y = 0$ 这样的解．经检验，$x = 0$ 和 $y = 0$ 都是原方程的解①．

例 9　求以 $OX$ 轴为旋转轴的旋转面，使得这样的镜面把放在原点的光源发出的光反射成平行于 $OX$ 轴的光束．

---

① 对于写成

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

的微分方程，我们不但寻求形状如 $y = y(x)$ 的解，而且也寻求形状如 $x = x(y)$ 的解．

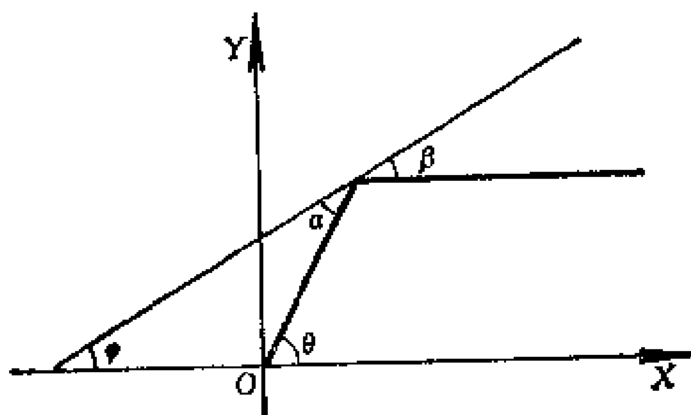



图 16-21

**解** 参看 图 16-21。根据条件应有

$$\alpha=\beta=\varphi.$$

于是

$$\theta=\alpha+\varphi=2\beta,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}.$$

但

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

所以有

$$\frac{y}{x}=\frac{2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

解这个关于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的二次方程，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

由此得到

$$xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

容易看出这方程的一个积分因子

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

以这因子乘之，就得到

$$\frac{xdx + ydy}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

积分得

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

由此得到

$$y^2 = 2Cx + C^2,$$

即

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

这是以原点为焦点的抛物线族．在学习一元函数微分学时，我们已经知道抛物线具有这种光学性质。现在，我们又证明了逆命题：具有这种光学性质的曲线只能是以上抛物线族中的一条抛物线。

# 第十七章 场论介绍

场是最重要的物理概念之一。数学中的场论，对各种各样的物理场作抽象概括，进行定性与定量的研究。

如果空间某区域 $\Omega$ 的每一点都对应着一个确定的数量（向量），那么我们就说在这区域定义了一个数量场(向量场)。容易看出，所谓数量场与向量场，不过是数量值函数与向量值函数的另一种说法而已。在本章中，我们假定所讨论的场连续可微足够多次。

热学中的温度场 $T(x,y,z)$，连续体力学中的密度场 $\rho(x,y,z)$ 等是数量场的例子。引力场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 和电场 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ 等是向量场的例子。

## §1 数量场的方向导数与梯度

设在空间某区域 $\Omega$ 中定义了一个数量场 $f(M)=f(x,y,z)$。设 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是 $\Omega$ 中的一个点，$\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是任意一个方向。我们知道，$f$ 在点 $M_0$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{1.1}$$

在许多实际问题中，需要了解：在给定点 $M_0$，沿怎样一个方向，

数量场 $f$ 的增长最快？或者说，沿怎样一个方向，$f$ 的方向导数最大？为了回答这个问题，我们把(1.1) 右端的表示式写成两个向量的内积

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \nabla f(M_0) \cdot \boldsymbol{e}, \tag{1.2}$$

这里

$$\nabla f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\boldsymbol{k}.$$

如果把向量 $\nabla f(M_0)$ 与向量 $\boldsymbol{e}$ 的夹角记为 $\theta$，那么又可把(1.2)式写成

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \|\nabla f(M_0)\| \cos\theta. \tag{1.3}$$

从这式可以看出，当 $\theta = 0$ 的时候，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0)$ 达到最大值，这最大值为：

$$\|\nabla f(M_0)\|.$$

**定义** 我们把 $\nabla f(M_0)$ 叫做数量场 $f$ 在点 $M_0$ 的梯度，记为

$$\mathrm{grad}\, f(M_0) = \nabla f(M_0).$$

从上面的讨论可知：梯度的方向就是使得方向导数取得最大值的方向；梯度的模就是方向导数的最大值。采用梯度的记号，可以把方向导数表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(M_0) = \mathrm{grad}\, f(M_0) \cdot \boldsymbol{e}.$$

我们看到，由一个数量场 $f$ 产生了一个向量场——梯度向量场 $\mathrm{grad}\, f$。

设 $C$ 是一个任意给定的常数。我们把满足条件

(1.4) $$f(x,y,z)=C$$

的点$(x,y,z)$的集合，叫做数量场$f$的一个等值面。如果$M_0$是等值面(1.4)上的一个点，并设在这点

$$\nabla f(M_0)\neq 0,$$

那么向量$\operatorname{grad} f(M_0)=\nabla f(M_0)$正好沿着曲面(1.4)在这点的法线方向，我们得到重要的结论：在等值面上任意一点，梯度向量与等值面垂直。

对于定义于平面区域上的数量场$f(x,y)$，也可以考察它的梯度

$$\operatorname{grad} f=\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y},$$

并且也可以考察这数量场的等值线

$$f(x,y)=C.$$

同样可以看出：在等值线上任意一点，梯度向量与等值线垂直。

等值面与等值线的概念，在实际问题中有很多应用。地形图上的等高线，气象图上的等温线、等气压线和等雨量线等，都是等值线的例子。

## §2 向量场的通量与散度

在上一章中，我们曾讨论过这样的问题：设在空间某区域$\Omega$中有不可压缩的流体稳定地流动，$S$是$\Omega$中的一块有向曲面，求单位时间内通过曲面块$S$的流体的体积（即流量）。我们把流量表示为第二型曲面积分

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma,$$

这里$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z)$是流体的速度，而$\boldsymbol{n}$是曲面$S$的正法线单位向

量.

下面考察更一般的情形. 设 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$是定义于区域 $\Omega$ 的一个向量场, $S$ 是 $\Omega$ 中的一块有向曲面, $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 $S$ 的正法线单位向量. 我们把第二型曲面积分

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面块 $S$ 的通量.

设 $M_0\in\Omega$.在 $\Omega$中,取以 $M_0$ 为中心,$\varepsilon$ 为半径的小球 $V=V_\varepsilon$. 把这小球的表面记为 $S$(约定 $S$ 以向外的法线方向为正方向). 考察向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过 $S$ 的通量与 $V$ 的体积的比值

$$\frac{1}{|V|}\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

我们来证明: 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 上述比值有确定的极限. 事实上,设

$$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}.$$

根据高斯公式, 我们有

$$\frac{1}{|V|}\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{|V|}\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

这里

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

利用积分的中值公式又可得到

$$\frac{1}{|V|}\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{|V|}\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_*}=(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{M_*},$$

这里的 $M_*$ 是 $V$ 中的一点．当 $\varepsilon\to0$ 时，应有 $M_*\to M_0$。因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|V|}\oiint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_{M_0}.$$

我们来解释这极限的物理意义。如果 $\boldsymbol{F}$ 是流体的速度场，那么

$$\frac{1}{|V|}\oiint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

是单位时间内从 $V$ 中流出的流体的量与 $V$ 的体积之比。这比值应看作 $V$ 中的平均泉源密度（“漏洞”也被当作泉源，但其泉源密度是负数）。当 $\varepsilon\to0$ 时，上述比值的极限就是流体在 $M_0$ 点的泉源密度。

**定义** 设向量场

$$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$$

在区域 $\Omega$ 中有定义，$M$ 是 $\Omega$ 中的一点。
我们把数量

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_M=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $M$ 点的*散度*，记为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F}(M)&=(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_M\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M.\end{aligned}$$

散度是由向量场诱导出的一个数量场。它表示向量场在各点的“泉源密度”。

**注记** 取环绕 $M_0$ 点的任意一小块立体 $V$，要求它的表面 $S$

是分块正则的曲面，作比值

$$\frac{1}{|V|}\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

仿照上面的讨论，同样可以证明，当$V$的直径趋于0时，这比值仍趋于$\boldsymbol{F}$在$M_0$点的散度：

$$\lim\frac{1}{|V|}\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(M_0).$$

## §3 方向旋量与旋度

设在空间某区域$\Omega$中定义了一个向量场

$$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}.$$

设$M_0$是$\Omega$中的一个点，$\boldsymbol{n}$是任意一个单位向量。我们以$M_0$为中心，$\varepsilon$为半径，作一个垂直于向量$\boldsymbol{n}$的小圆面$D=D_\varepsilon$；然后沿这圆面的边界$\partial D$作如下的积分：

$$\oint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda,$$

这里$\boldsymbol{\tau}$是$\partial D$的单位切向量，$\mathrm{d}\lambda$表示弧长微元。下面，我们来考察这积分与$D$的面积$|D|$的比值

$$\frac{1}{|D|}\oint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda.$$

这比值是反映向量场$\boldsymbol{F}$沿着$\partial D$的旋转状况的一个量。当$\varepsilon\to0$时，这比值的极限，反映了向量场$\boldsymbol{F}$在点$M_0$绕方向$\boldsymbol{n}$的旋转状况。为了求出这一极限，我们利用斯托克斯公式：

$$\oint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda=\iint_D(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

再利用积分的中值公式，就得到

$$\frac{1}{|D|}\oint_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{|D|}\iint_{D}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

$$=[(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}]_{M_*},$$

这里$M_*$是$D$中的一点。当$\varepsilon\to 0$时，$M_*$趋于$M_0$。因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|D_\varepsilon|}\oint_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda=[(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}]_{M_0}.$$

**定义** 我们把这极限值

$$[(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}]_{M_0}$$

叫做向量场$\boldsymbol{F}$在点$M_0$绕方向$\boldsymbol{n}$的方向旋量。

我们曾考察数量场的方向导数取最大值的方向，从而导出梯度的概念。对于方向旋量，可以提出类似的问题：绕怎样一个方向$\boldsymbol{n}$，方向旋量达到最大值？为了回答这个问题，我们把方向旋量的表示式写成

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}=\|\nabla\times\boldsymbol{F}\|\cos\theta,$$

这里$\theta$是向量$\nabla\times\boldsymbol{F}$与向量$\boldsymbol{n}$的夹角。从这表示式可以看出，当$\theta=0$时，也就是当$\boldsymbol{n}$沿着$\nabla\times\boldsymbol{F}$的方向时，方向旋量达到最大值，这最大值是

$$\|\nabla\times\boldsymbol{F}\|.$$

**定义** 我们把

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})(M_0)$$

叫做向量场$\boldsymbol{F}$在点$M_0$的旋度，并把它记为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(M_0).$$

从上面的讨论可知：旋度的方向是使得方向旋量取最大值的方向；旋度的模等于方向旋量的最大值。

## § 4　场论公式举例

从数量函数或向量值函数的微分运算公式，可以导出场论中的一些有用的公式。例如

(1) $\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$,

$\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{G})=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{G}$,

$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{F}+\beta\boldsymbol{G})=\alpha\nabla\times\boldsymbol{F}+\beta\nabla\times\boldsymbol{G}$;

(2) $\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$,

$\nabla\cdot(f\boldsymbol{G})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{G}+f\nabla\cdot\boldsymbol{G}$,

这里 $\alpha$ 和 $\beta$ 是常数，$f$ 和 $g$ 是数量场，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 是向量场，$\nabla$是奈布拉算符。

通过直接计算，还可以证明

(3) $\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad}=0$,

(4) $\mathrm{div}\circ\mathrm{rot}=0$.

例如，公式（3）可以这样验证：我们记

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}f=\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z},$$

则有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}&\dfrac{\partial f}{\partial y}&\dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\cdots$$

$$=0.$$

公式（3）和（4）可以统一地概括为关于外微分的公式

$$d \circ d = 0。$$

为了说明这一事实，我们指出：

（a）设 $f$ 是一个数量场，则 $df$ 的系数即 grad 的分量；

（b）设 $F=(P,Q,R)$ 是一个向量场，记 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，则 $d\omega$ 的系数即 rot $F$ 的分量；

（c）设 $F=(P,Q,R)$ 是一个向量场，记

$$\theta = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

则 $d\theta$ 的系数即 div$F$。

于是，从

$$d \circ df = 0$$

就得到

$$\text{rot} \circ \text{grad}\, f = 0;$$

从

$$d \circ d\omega = 0$$

就得到

$$\text{div} \circ \text{rot}\, F = 0。$$

场论中众多的公式不可能在这里一一列举。需要用到更多的公式时可以去查手册，或者自己推演（虽然纷繁的演算需要细心与耐性，但大部分场论公式的推证的确只用到最基本的数学知识）。

## §5　保守场与势函数

我们已经讨论过曲线积分与路径无关的条件。所得的结论可以用场论的术语陈述如下：

设向量场 $F$ 在区域 $\Omega$ 中有定义，则以下各条件相互等价

（1）沿 $\Omega$ 中任何闭路径 $C$ 都有

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda = 0;$$

(2) 对于 $\Omega$ 中从点 $M_0$ 到点 $M_1$ 的任意两条路径 $\gamma$ 和 $\eta$ 都有

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda = \int_\eta \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}\lambda;$$

(3) 存在连续可微的数值函数 $U$，使得

$$F = \mathrm{grad}\, U.$$

定义 如果向量场 $\boldsymbol{F}$ 满足上面所列的条件，那么我们就说 $\boldsymbol{F}$ 是一个保守场，并把条件（3）中的函数 $U$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的势函数。

如果向量场 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，那么它必定是无旋场（即旋度为0的场）。这是因为

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} = \mathrm{rot}\circ\mathrm{grad}\ U = 0.$$

如果 $\Omega$ 是单连通区域，那么我们可以进一步断定：向量场 $\boldsymbol{F}$ 为保守场的充分必要条件是它为无旋场，即

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = 0.$$

**例** 在本例中采用这样的记号：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

如果向量场 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = f(r)\boldsymbol{r},$$

那么我们就说 $\boldsymbol{F}$ 是一个中心场。每一个中心场都一定是保守场。事实上，

$$U(r) = \int_1^r \rho f(\rho)\mathrm{d}\rho$$

就是 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数。——这可验证如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}U &= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\ &= rf(r)\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)\\ &= f(r)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

# 附录　正交曲线坐标系中的场论计算

在通常的直角坐标系中，我们定义了奈布拉算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

借助于这算符，可以很方便地表示场论中的一些重要的量。例如

$$\operatorname{grad} f = \nabla f,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}.$$

实际上，符号$\nabla$表示了三种不同类型的运算：(i) 作用于数量值函数的运算$\nabla$，运算所得的结果是向量；(ii) 作用于向量值函数的“点乘”运算$\nabla\cdot$，运算所得的结果是数量；(iii) 作用于向量值函数的“叉乘”运算$\nabla\times$，运算所得的结果是向量。

对于某些实际问题，利用曲线坐标进行计算更适宜。正交曲线坐标是最常被采用的一种。在这附录中，我们推导正交曲线坐标下奈布拉算子$\nabla$的表示。有了这些表示，就可以很方便地计算场论中许多重要的量。在以下的讨论中，假设所涉及的各数量值函数或向量值函数都在某区域内连续可微足够多次。

对我们这里的讨论来说，下面的定理起着最基本的作用。

**关于算子$\nabla$的基本定理**　具有以下一些性质的算子$\nabla$存在并且唯一：

（Ⅰ）$\nabla$作用于数量值函数产生一个向量值函数，并且满足关系

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v,$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u,$$

$$\nabla u \cdot d\boldsymbol{r} = du;$$

（Ⅱ）$\nabla\times$作用于向量值函数产生一个向量值函数，并且满

足关系

$$\nabla\times(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})=\nabla\times\boldsymbol{U}+\nabla\times\boldsymbol{V},$$
$$\nabla\times(u\boldsymbol{V})=\nabla u\times\boldsymbol{V}+u\nabla\times\boldsymbol{V},$$
$$\nabla\times(\nabla u)=0;$$

（Ⅲ）$\nabla\cdot$ 作用于向量值函数产生一个数量值函数，并且满足关系

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V})=\nabla\cdot\boldsymbol{U}+\nabla\cdot\boldsymbol{V},$$
$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{V})=(\nabla u)\cdot\boldsymbol{V}+u\nabla\cdot\boldsymbol{V},$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})=(\nabla\times\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}),$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0.$$

**证明** *存在性* 选取直角坐标系，并定义

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

容易验证这样定义的$\nabla$具有定理中所列举的各性质。

*唯一性* 对于选定的直角坐标系，我们指出：具有上列性质（Ⅰ），（Ⅱ）和（Ⅲ）的算子$\nabla$只能是

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

为此，须对以下三种情形作验证：(1) $\nabla$作用于数量值函数的情形；(2) $\nabla\cdot$作用于向量值函数的情形；(3) $\nabla\times$作用于向量值函数的情形。

(1) 设 $u$ 是数量值函数，并设

$$\nabla u=\lambda_1\boldsymbol{i}+\lambda_2\boldsymbol{j}+\lambda_3\boldsymbol{k},$$

则有

$$\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\lambda_1\mathrm{d}x+\lambda_2\mathrm{d}y+\lambda_3\mathrm{d}z.$$

但我们知道

$$\nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

并且 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 是任意的，所以有

$$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

这证明了

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u.$$

(2) 分别取 $u$ 等于坐标函数 $x, y$ 和 $z$，利用 (1) 中推导的计算 $\nabla u$ 的公式，我们得到

$$\boldsymbol{i} = \nabla x, \quad \boldsymbol{j} = \nabla y, \quad \boldsymbol{k} = \nabla z.$$

于是有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{i} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) = \nabla \cdot (\nabla y \times \nabla z) \\ &= (\nabla \times (\nabla y)) \cdot \nabla z - (\nabla y) \cdot (\nabla \times (\nabla z)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

类似地有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

对于

$$\boldsymbol{U} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k},$$

利用 $\nabla \cdot$ 的性质可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = (\nabla u_1) \cdot \boldsymbol{i} + (\nabla u_2) \cdot \boldsymbol{j} + (\nabla u_3) \cdot \boldsymbol{k}.$$

再利用 (1) 中推导的计算 $\nabla u$ 的公式，就得到

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{U} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{U}.\end{aligned}$$

(3) 容易看出：

$$\nabla\times\boldsymbol{i}=\nabla\times(\nabla x)=0,$$
$$\nabla\times\boldsymbol{j}=\nabla\times(\nabla y)=0,$$
$$\nabla\times\boldsymbol{k}=\nabla\times(\nabla z)=0.$$

对于

$$\boldsymbol{U}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k},$$

我们有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{U}&=\nabla u_1\times\boldsymbol{i}+\nabla u_2\times\boldsymbol{j}+\nabla u_3\times\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\\&\quad+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{U}.\end{aligned}$$ □

上面定理中的性质（Ⅰ）—（Ⅲ）与坐标系的选取无关。因此，我们可以利用这些性质来确定算子$\nabla$在正交曲线坐标系中的表示。推导的办法与上面定理中唯一性部分的证明十分类似。

设在空间某区域中选定了曲线坐标

$$(q_1,q_2,q_3),$$

则这区域中点的位置可通过坐标参数来表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3).$$

计算 $\boldsymbol{r}$ 的微分得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3.$$

如果各坐标线的切向量

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1},\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2},\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}$$

互相正交，那么我们就说$(q_1,q_2,q_3)$是正交曲线坐标，并把

$$h_\alpha = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right\|, \qquad \alpha = 1,2,3,$$

叫做这坐标系统的拉梅(Lamé)系数。

柱坐标与球坐标是最常用的正交曲线坐标。

对于正交曲线坐标系，向量组

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,3,$$

在各点构成规范正交基底：

$$(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3.$$

——这里的 $\delta_{\alpha\beta}$ 是克朗内克(Kronecker)符号

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{如果 } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

采用正交曲线坐标$(q_1, q_2, q_3)$计算场论各量时，我们假定所给的各向量都按规范正交基底$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$展开，并要求计算所得的各向量也按这基底展开。

**梯度的计算** 显然有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3$$

$$= h_1 \mathrm{d}q_1 \boldsymbol{e}_1 + h_2 \mathrm{d}q_2 \boldsymbol{e}_2 + h_3 \mathrm{d}q_3 \boldsymbol{e}_3.$$

如果

$$\nabla u = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3,$$

那么

$$\nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \lambda_1 h_1 \mathrm{d}q_1 + \lambda_2 h_2 \mathrm{d}q_2 + \lambda_3 h_3 \mathrm{d}q_3.$$

但已经知道

$$\nabla u \cdot d\boldsymbol{r} = du = \frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial u}{\partial q_3} dq_3,$$

并且 $dq_1$,$dq_2$ 和 $dq_3$ 是任意的. 所以有

$$\lambda_1 h_1 = \frac{\partial u}{\partial q_1}, \qquad \lambda_2 h_2 = \frac{\partial u}{\partial q_2}, \qquad \lambda_3 h_3 = \frac{\partial u}{\partial q_3}.$$

我们求得

$$\nabla u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_3.$$

**散度的计算**　利用刚才求得的公式计算坐标函数 $q_\alpha$ 的梯度. 我们得到

$$\nabla q_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3.$$

于是有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) &= \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2} \times \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\right) = \nabla \cdot (\nabla q_2 \times \nabla q_3) \\ &= (\nabla \times (\nabla q_2)) \cdot \nabla q_3 - \nabla q_2 \cdot (\nabla \times (\nabla q_3)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

类似地有

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\right) = 0, \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\right) = 0.$$

对于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= u_1 \boldsymbol{e}_1 + u_2 \boldsymbol{e}_2 + u_3 \boldsymbol{e}_3 \\ &= u_1 h_2 h_3 \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) + u_2 h_3 h_1 \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\right) \end{aligned}$$

$$+u_3h_1h_2\left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\right)$$

应有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\nabla(u_1h_2h_3)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2h_3}\right)+\nabla(u_2h_3h_1)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3h_1}\right)$$

$$+\nabla(u_3h_1h_2)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1h_2}\right).$$

将这式展开并化简，我们得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(u_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(u_2h_3h_1)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}(u_3h_1h_2)\right].$$

**旋度的计算** 因为

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{h_\alpha}\right)=\nabla\times(\nabla q_\alpha)=0,\qquad \alpha=1,2,3,$$

所以对于

$$\boldsymbol{U}=\sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha h_\alpha\left(\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{h_\alpha}\right),$$

应有

$$\nabla\times\boldsymbol{U}=\sum_{\alpha=1}^{3}\nabla(u_\alpha h_\alpha)\times\left(\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{h_\alpha}\right).$$

将这式展开并化简，我们得到

$$\nabla\times\boldsymbol{U}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1u_1 & h_2u_2 & h_3u_3\end{vmatrix}.$$

**拉普拉斯算子 $\Delta$** 作用于数量值函数 $u$ 的算子

$$\Delta u=\nabla\cdot(\nabla u)$$

被称为拉普拉斯(Laplace)算子。这算子在数学的理论与应用研究中都起着极其重要的作用。在 $\mathbb{R}^3$ 的标准直角坐标系中，拉普拉斯算子 $\Delta$ 表示为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在前面的讨论中，我们已经得到了奈布拉算子$\nabla$ 在正交曲线坐标系中的表示。据此，很容易写出拉普拉斯算子

$$\Delta u=\nabla\cdot(\nabla u)$$

在正交曲线坐标系中的相应表示：

$$\Delta u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\right).$$

**例 1** 试写出 $\nabla$与 $\Delta$ 的柱坐标表示。

**解** 我们知道，联系直角坐标$(x,y,z)$与柱坐标$(r,\theta,z)$的变换公式是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$$

计算柱坐标的拉梅系数得：

$$h_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$h_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=r,$$

$$h_3=1.$$

对于数量值函数 $u=u(r,\theta,z)$与向量值函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}=&u_1(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_r+u_2(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_\theta\\&+u_3(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

我们有

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta}+\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{U}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_1 & ru_2 & u_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

**例 2** 试写出拉普拉斯算子 $\Delta$ 在平面极坐标中的表示。

**解** 我们可以利用上例中的计算公式。对于函数$u=u(r,\theta)$，应有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

因而

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

# 第 六 篇

## 级数与含参变元的积分

自然界中，量的函数关系是多种多样的．为了便于研究，人们常用一定的式子表示函数关系．能用“初等”式子表示的函数(即所谓初等函数)只是多种多样的函数关系中较少的一部分．为了表示更复杂的函数，就需要发展更多的表示函数的工具．本篇将要介绍的函数项级数和含参变元的积分，就是这样的工具．

在研究函数项级数之前，我们先要对数项级数作一些考察．

# 第十八章　数项级数

数项级数的理论，实际上只是数列极限理论的另一种表现形式．这种表示形式有其特别方便之处，因而为人们所乐于采用．

## §1　概　　说

设 $a_n\in\mathbb{R}$，$n=1,2,\cdots$．我们约定把记号(暂时只是一个形式的记号)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1.1}$$

叫做以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为项的级数．在不致于混淆的情形，我们也用更简单的符号 $\sum a_n$ 表示级数(1.1)．

利用级数(1.1)的各项，可以作一串有限和：

$$\begin{aligned}&S_1=a_1,\\&S_2=a_1+a_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

我们把 $S_n$ 叫做级数(1.1)的第 $n$ 个部分和．如果由部分和组成的序列 $\{S_n\}$ 收敛，那么我们就说级数(1.1)收敛．如果部分和序列 $\{S_n\}$ 发散，那么我们就说级数(1.1)发散．对于部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛于有穷极限或者发散于定号无穷的情形，如果

$$\lim S_n=S,\qquad S\in\overline{\mathbb{R}},$$

那么我们就说级数(1.1)的和为$S$，并约定记

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S.$$

上面，我们通过部分和序列定义级数的敛散性与级数的和。反过来，涉及序列极限的任何问题，也都可以化成级数的相应问题来讨论。具体说来就是：序列$\{b_n\}$的收敛性等价于级数

$$b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n)$$

的收敛性；并且

$$\lim b_n = b$$

等价于

$$b_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n) = b.$$

从级数和的定义立即可得以下结果。

**定理1** 设$c \in \mathbb{R}$，$\sum a_n = a$，$\sum b_n = b(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$，则有

(1) 如果$c = 0$，那么显然

$$\sum (ca_n) = 0;$$

如果$c \neq 0$，那么

$$\sum (ca_n) = ca,$$

即

$$\sum (ca_n) = c\sum a_n;$$

(2) 如果$a$与$b$不是异号无穷大，那么

$$\sum (a_n + b_n) = a + b,$$

即

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

下面的定理指出级数$\sum a_n$收敛的一个必要条件。

**定理2** 如果级数$\sum a_n$收敛，那么

$$\lim a_n = 0.$$

**证明** 用$S_n$表示级数$\sum a_n$的第$n$个部分和，则有

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

因为

$$\lim S_n = S \in \mathbb{R},$$

所以

$$\begin{aligned}\lim a_n &= \lim(S_n - S_{n-1}) \\ &= S - S \\ &= 0. \qquad \square\end{aligned}$$

**例1** 设$r>0$。试考察等比级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$$

的敛散性。

**解** 如果$r<1$，那么这级数收敛：

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1-r^N}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

如果$r\geqslant 1$，那么

$$\sum_{n=1}^{N} r^{n-1} \geqslant N,$$

因而等比级数发散，其和为$+\infty$。

**例2** 试考察级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

**解** 计算这级数的第$N$个部分和$S_N$可得

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

由此看出级数是收敛的，并得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

## §2 正项级数

如果级数$\sum a_n$的各项都是非负实数，那么我们就说这级数是正项级数。

设$\sum a_n$是正项级数，即

$$a_k \geqslant 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

则有

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1},$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

我们看到，正项级数的部分和序列是单调上升的。反过来，如果一个级数的部分和序列是单调上升的，那么这级数也就一定是正项级数。因此，正项级数的理论是单调数列极限理论的另一种陈述方式。

### 2.a 正项级数的收敛原理

我们回忆单调数列的收敛原理：单调上升数列收敛的充分必要条件是这数列有上界。用级数的语言翻译这一论断，就得到：

**正项级数的收敛原理** 正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和序列有上界。

**例 1　考察级数**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

的敛散性。

解　因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{N}\leqslant 2,\qquad \forall N\in\mathbf{N},$$

所以级数$\sum\frac{1}{n^2}$收敛。

例 2　考察级数$\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$是否收敛。

解　因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant N\frac{1}{\sqrt{N}}=\sqrt{N},\qquad \forall N\in\mathbf{N},$$

所以级数$\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$发散。

### 2.b　比较判别法

为了考察一个正项级数是否收敛，常用另一个已知是收敛的或已知是发散的正项级数来与它作比较。

**定理1**（比较判别法）　设$\sum a_n$和$\sum b_n$是正项级数，则

（1）如果级数$\sum b_n$收敛，并且存在$c\geqslant 0$和$n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$a_n\leqslant cb_n,\qquad \forall n\geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$也收敛；

(2) 如果级数$\sum b_n$发散，并且存在$c>0$和$n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$a_n \geqslant c b_n, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$也发散。

**证明** (1) 我们有

$$\sum_1^N a_n = \sum_1^{n_0-1} a_n + \sum_{n_0}^N a_n \leqslant \sum_1^{n_0-1} a_n + c\sum_{n_0}^N b_n$$

$$\leqslant \sum_1^{n_0-1} a_n + c\sum_1^N b_n.$$

因为$\left\{\sum_1^N b_n\right\}$有上界，所以$\left\{\sum_1^N a_n\right\}$也有上界。

(2) 我们有

$$b_n \leqslant \frac{1}{c} a_n, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

如果级数$\sum a_n$收敛，那么根据(1)中的论断，级数$\sum b_n$也应收敛。但这与所设条件矛盾。因此$\sum a_n$是发散级数。 □

**例3** 设$x\in(0,\pi)$，试考察级数

$$\sum \sin\frac{x}{n^2}$$

是否收敛。

**解** 我们有

$$\sin\frac{x}{n^2} \leqslant \frac{x}{n^2}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

因为级数$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，所以级数

$$\sum \sin\frac{x}{n^2}$$

也收敛。

**例 4** 判别以下级数是否收敛：

$$\sum \frac{1}{\sqrt{4n-3}}.$$

**解** 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

因为级数$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$发散，所以级数

$$\sum \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$$

也发散。

以下极限形式的比较判别法，在实际应用中显得更为便利。

**定理2** 设$\sum a_n$和$\sum b_n$是正项级数，并设以下极限存在：

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \gamma \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty),$$

则有：

(1) 如果级数$\sum b_n$收敛，$\gamma < +\infty$，那么级数$\sum a_n$也收敛；

(2) 如果级数$\sum b_n$发散，$\gamma > 0$，那么级数$\sum a_n$也发散。

**证明** (1) 对于取定的$\varepsilon > 0$（例如$\varepsilon = 1$），存在$n_0 \in \mathbf{N}$，使得只要$n \geqslant n_0$，就有

$$\frac{a_n}{b_n} < \gamma + \varepsilon,$$

也就是

$$a_n < (\gamma + \varepsilon) b_n, \qquad \forall n \geqslant n_0;$$

(2) 对于取定的 $\varepsilon \in (0, \gamma)\left(例如\ \varepsilon = \frac{\gamma}{2}\right)$，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$，使得只要 $n \geqslant n_0$，就有

$$\frac{a_n}{b_n} > \gamma - \varepsilon,$$

也就是

$$a_n > (\gamma - \varepsilon) b_n, \qquad \forall n \geqslant n_0. \qquad \square$$

**例 5** 设 $x \in (0, \pi)$。试判别以下级数是否收敛：

(a) $\sum\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)$,

(b) $\sum 2^n \sin\frac{x}{3^n}$.

**解** (a) 我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2}.$$

因为级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数

$$\sum\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)$$

也收敛。

(b) 我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n \sin\frac{x}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = x.$$

因为级数$\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，所以级数

$$\sum 2^n \sin \frac{x}{3^n}$$

也收敛。

**例 6** 用定义验证，很容易看出：级数

$$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum(\ln(n+1)-\ln n)$$

是发散的。事实上，我们有

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to+\infty}\ln(N+1)=+\infty.$$

用级数$\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$与级数$\sum\frac{1}{n}$作比较，我们断定后一级数是发散的：

$$\lim\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1>0.$$

再以级数$\sum\frac{1}{n}$与级数$\sum\sin\frac{1}{n}$作比较，我们又断定级数$\sum\sin\frac{1}{n}$是发散的：

$$\lim\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0.$$

我们知道，正项的等比级数$\sum r^n$当$r<1$时是收敛的，当$r\geqslant$

1时是发散的。在定理1中把比较的标准取成等比级数$\sum r^n$，就得到以下的柯西根式判别法。

**柯西根式判别法**（普通形式） 设$\sum a_n$是正项级数。

(1) 如果存在$r<1$和$N\in\mathbb{N}$，使得

$$\sqrt[n]{a_n}<r,\quad \forall n\geqslant N,$$

那么级数$\sum a_n$收敛；

(2) 如果对无穷多个$n$有

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** (1) 在所给的条件下有

$$a_n\leqslant r^n,\quad \forall n\geqslant N.$$

(2) 由所给的条件可知$\{a_n\}$不能趋于0。 □

以下极限形式的判别法用起来更为便利：

**柯西根式判别法**（极限形式） 设$\sum a_n$是正项级数，并设存在极限

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=q.$$

则有

(1) 如果$q<1$，那么级数$\sum a_n$收敛；

(2) 如果$q>1$，那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** (1) 对于取定的$\varepsilon\in(0,1-q)\left(例如\ \varepsilon=\dfrac{1-q}{2}\right)$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1,\quad \forall n\geqslant N.$$

(2) 对于取定的$\varepsilon\in(0,q-1)$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得

$$\sqrt[n]{a_n}>q-\varepsilon>1,\quad \forall n\geqslant N.\qquad □$$

**注记** 对于$q=1$的情形，上面的判别法未作任何一般性的

判定。请看下面的例子：

例 7　对于级数

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ 和 } \sum \frac{1}{n}$$

都有 $q=1$：

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

但前一级数收敛，后一级数发散。

从比较判别法，还可以导出一种很有用的积分判别法（也是柯西首先研究的）。下面就来介绍这种判别法。

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调下降并且非负。为了考察级数

$$\sum_{1}^{+\infty} f(n) \tag{2.1}$$

是否收敛，我们将这级数与广义积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

作比较。在以下的讨论中，记

$$F(x)=\int_1^x f(x)\mathrm{d}x.$$

显然有

$$F(n+1)-F(n)=\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

我们指出：级数

$$\sum_{1}^{+\infty}(F(n+1)-F(n)) \tag{2.3}$$

与广义积分（2.2）同为收敛或同为发散。事实上，如果广义积

分(2.2) 收敛，那么

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{1}^{N}(F(n+1)-F(n))$$

$$=\lim_{N\to+\infty}F(N+1)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{1}^{N+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面，对任何 $H>0$，设 $N=[H]$（$H$的整数部分），则有

$$\int_{1}^{H}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{1}^{N+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{1}^{N}(F(n+1)-F(n)).$$

由此可以看出：如果级数（2.3）收敛，那么广义积分（2.2）也收敛。

在作了以上准备之后，我们来证明：

**柯西积分判别法** 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$单调下降并且非负，则级数

$$\sum_{1}^{+\infty}f(n) \tag{2.1}$$

与广义积分

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

同为收敛或者同为发散。

**证明** （1）如果广义积分（2.2)收敛，那么级数

$$\sum_{2}^{+\infty}(F(n)-F(n-1))$$

也收敛。因为

$$f(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x=F(n)-F(n-1),$$

$$n=2,3,\cdots,$$

所以级数(2.1)也收敛。

(2) 如果广义积分(2.2)发散，那么级数

$$\sum_{1}^{+\infty}(F(n+1)-F(n))$$

发散。因为

$$f(n)\geqslant\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=F(n+1)-F(n),$$

所以级数 (2.1) 也发散。 □

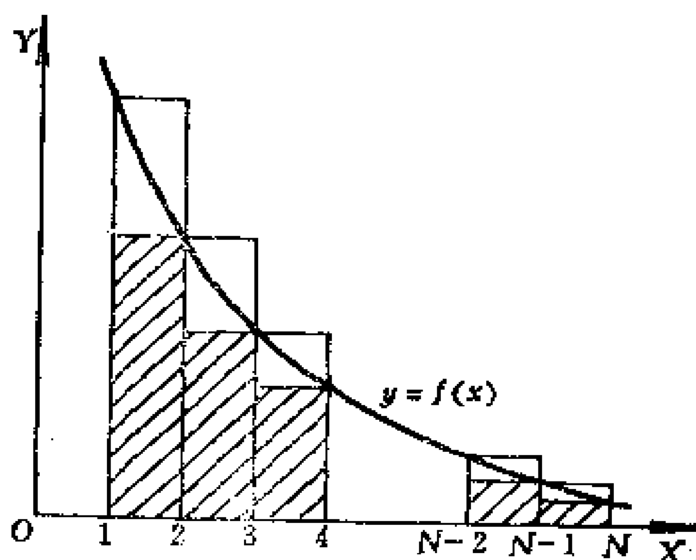



图 18-1

借助于面积大小的比较，可以作出柯西积分判别法的一个明

晰的几何解释。在图 13-1 中，画阴影的那些矩形条的面积之和等于

$$\sum_{n=2}^{N} f(n),$$

较大的那些矩形条的面积之和等于

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

将上述两个和数所表示的面积与积分

$$\int_1^N f(x)\mathrm{d}x$$

所表示的面积作比较，我们得到

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

由此得知：级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

与积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

有相同的敛散性质。

利用柯西积分判别法，很容易判断以下这些级数是否收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$,

(2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$,

(3) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n(\ln \ln n)^p}$, $\cdots$.

具体讨论如下：

(1) 与积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 比较，我们断定：当$p>1$时，级数 $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

收敛；而当$p\leqslant 1$时，级数 $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散。

(2) 与积分$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}$比较，我们断定：当 $p>1$ 时，级

数

$$\sum_2^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

收敛；而当$p\leqslant 1$时，这级数发散。

(3) 与积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x(\ln \ln x)^p}$$

比较，我们断定：当$p>1$时，级数

$$\sum_3^{+\infty} \frac{1}{n \ln n(\ln \ln n)^p}$$

收敛；而当$p\leqslant 1$时，这级数发散。

采用大O记号，还可以陈述以下很方便的判别法则：如果正项级数

$$\sum_1^{+\infty} a_n$$

满足条件

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad p>1,$$

或者

$$a_n = O\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right), \quad p>1,$$

或者

$$a_n = O\left(\frac{1}{n \ln n(\ln \ln n)^p}\right), \quad p>1,$$

那么这级数收敛。

**2.c 比值判别法**

如果级数$\sum a_n$满足条件：

$$a_n>0, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

那么我们就说$\sum a_n$是严格正项级数。对于严格正项级数，有以下的比值比较法则：

**定理3** 设$\sum a_n$和$\sum b_n$都是严格正项级数。

(1) 如果级数$\sum b_n$收敛，并且存在$n_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$也收敛；

(2) 如果级数$\sum b_n$发散，并且存在$n_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$也发散。

证明 (1) 对于 $n>n_0$，我们有

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}},$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

将以上各式相乘，就得到

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n_0}},$$

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n, \quad \forall n > n_0.$$

于是，根据比较判别法则就可以断定级数$\sum a_n$收敛。

(2) 与 (1) 中的讨论类似（只是不等号反转方向），我们得到

$$a_n \geqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

于是，根据比较判别法则，可以断定级数$\sum a_n$发散。 □

用等比级数$\sum r^n$作为比值比较的尺度，我们得出以下的达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法。

**达朗贝尔判别法**（普通形式） 设$\sum a_n$是严格正项级数。

(1) 如果存在$r<1$和$n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r, \quad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$收敛；

（2）如果存在$n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1,\quad \forall n\geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

这判别法的极限形式更便于应用。

**达朗贝尔判别法（极限形式）** 设$\sum a_n$是严格正项级数，并设存在极限

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则有：

（1）如果$q<1$，那么级数$\sum a_n$收敛；

（2）如果$q>1$，那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** （1）对于取定的$\varepsilon\in(0,1-q)\left(例如\ \varepsilon=\frac{1-q}{2}\right)$，存在$n_0\in\mathbf{N}$，使得只要$n\geqslant n_0$，就有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon<1.$$

（2）对于取定的$\varepsilon\in(0,q-1)$，存在$n_0\in\mathbf{N}$，使得只要$n\geqslant n_0$，就有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>q-\varepsilon>1.\qquad\square$$

**注记** 对于$q=1$的情形，上面的判别法没有作任何一般性的结论。例如，级数

$$\sum\frac{1}{n^2}\ 和\ \sum\frac{1}{n}$$

都使得

$$\lim \frac{1}{(n+1)^2} \Big/ \frac{1}{n^2} = 1,$$

$$\lim \frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n} = 1,$$

但前一级数收敛，后一级数发散。

对于达朗贝尔判别法失效的情形（即 $q=1$ 的情形），需要寻找更精细的判别法。为此，我们需要更精细的尺度（作为比值比较的标准）。以下这些级数就可以用来作为更精细的尺度：

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad \sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p},$$

$$\sum_{3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}, \quad \cdots.$$

但如果用定理 3 原来的形式推导以下的一些判别法，在最后的表述中就会出现一些讨厌的负号。为了使所得的法则用起来更方便，我们先把定理 3 改写为以下等价的形式

**定理3′** 设 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都是严格正项级数。

(1) 如果级数 $\sum b_n$ 收敛，并且存在 $n_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{b_n}{b_{n+1}}, \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数 $\sum a_n$ 也收敛；

(2) 如果级数 $\sum b_n$ 发散，并且存在 $n_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n+1}}, \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

那么级数 $\sum a_n$ 也发散。

取 $\sum \frac{1}{n^p}$ 作为比值比较的尺度，我们得到以下的拉阿贝

(Raabe) 判别法。

**拉阿贝判别法（普通形式）** 设$\sum a_n$是严格正项级数。

(1) 如果存在 $q>1$ 和 $n_0\in\mathbb{N}$，使得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant q,\quad \forall n\geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$收敛；

(2) 如果存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,\quad \forall n\geqslant n_0,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** (1) 所给的条件等价于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{q}{n},\qquad \forall n\geqslant n_0.$$

选取实数 $p$，满足

$$1<p<q,$$

则级数

$$\sum\frac{1}{n^p}$$

收敛。以下记

$$b_n=\frac{1}{n^p}.$$

对于充分大的 $n$，我们有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

$$=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$<1+\frac{q}{n}\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

因而级数 $\sum a_n$ 也收敛。

(2) 所给的条件等价于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}},\qquad \forall n\geqslant n_0.$$

因为级数 $\sum\frac{1}{n}$发散，所以级数 $\sum a_n$ 也发散。 □

在实际解题时，更常用到这判别法的极限形式。

**拉阿贝判别法**（极限形式） 设 $\sum a_n$是严格正项级数，并设以下极限存在：

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q.$$

(1) 如果 $q>1$，那么级数 $\sum a_n$ 收敛；

(2) 如果 $q<1$，那么级数 $\sum a_n$发散。

**注记** 对于 $q=1$的情形，上面的判别法未作任何一般性的结论。对这临界情形，需要更精细的判别尺度，例如以

$$\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}\quad(p\neq 1)\tag{2.4}$$

作为比值比较的标准。

下面将要介绍的高斯（Gauss）判别法，概括了达朗贝尔判别法和拉阿贝判别法，而且达到了（2.4）那样的判别精度，因而可以作为本段的小结。

**高斯判别法** 设 $\sum a_n$是严格正项级数，并设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\nu}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

则关于级数$\sum a_n$的敛散性，有以下结果：

(1) 如果$\lambda>1$，那么级数$\sum a_n$收敛；如果$\lambda<1$，那么级数$\sum a_n$发散；

(2) 如果$\lambda=1,\mu>1$，那么级数$\sum a_n$收敛；如果$\lambda=1,\mu<1$，那么级数$\sum a_n$发散；

(3) 如果$\lambda=\mu=1,\nu>1$，那么级数$\sum a_n$收敛；如果$\lambda=\mu=1$，$\nu<1$，那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** (1) 可以归结为达朗贝尔判别法。(2) 可以归结为拉阿贝判别法。为了证明 (3)，我们以级数

$$\sum b_n=\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

作为比值比较的尺度。计算得

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}}&=\frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p}\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^p\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^p\\&=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^p\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}$$

如果$\lambda=\mu=1$，$\nu>1$，那么可以选取实数$p$，使得

$$1<p<\nu。$$

这时级数

$$\sum b_n=\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

收敛，并且对充分大的 $n$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\frac{b_n}{b_{n+1}},$$

因而级数 $\sum a_n$ 也收敛。

如果 $\lambda=\mu=1$，$\nu<1$，那么可以选取实数 $p$，使得

$$\nu<p<1。$$

这时级数

$$\sum b_n=\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$$

发散，并且对充分大的 $n$ 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n+1}},$$

因而级数 $\sum a_n$ 也发散。 □

请注意，对于 $\lambda=\mu=\nu=1$ 的情形，高斯判别法未作任何一般性的结论。

**推论** 设 $\sum a_n$ 是严格正项级数，并设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

则有

(1) 如果 $\lambda>1$，那么级数 $\sum a_n$ 收敛；如果 $\lambda<1$，那么级数 $\sum a_n$ 发散；

(2) 如果 $\lambda=1$，$\mu>1$，那么级数 $\sum a_n$ 收敛；如果 $\lambda=1$，

$\mu \leqslant 1$，那么级数 $\sum a_n$ 发散。

**证明** 这归结为上面判别法中 $\nu = 0$ 的情形。 □

**注记** 这推论也叫做高斯判别法。

**例8** 高斯超几何级数定义为

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdot\cdots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdot\cdots\cdot(\gamma+n-1)}x^n.$$

设 $\alpha,\beta,\gamma,x>0$，试考察这级数的敛散情况。

**解** 我们有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\frac{1}{x}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}\frac{1}{x}.$$

因为

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{-1}=1-\frac{\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

根据高斯判别法可以断定：

如果 $x<1$，或者 $x=1$，$\gamma>\alpha+\beta$，那么这级数收敛；

如果 $x>1$，或者 $x=1$，$\gamma\leqslant\alpha+\beta$，那么这级数发散。

## §3 上、下极限的应用

本节介绍上、下极限的概念，并应用上、下极限于正项级数敛散性的判别。

### 3.a 上、下极限

对于任意实数序列$\{x_n\}$，我们构造两个单调数列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$如下：

$$y_n = \inf_{k \geq n} x_k, \qquad z_n = \sup_{k \geq n} x_k,$$
$$n = 1, 2, \cdots.$$

显然$\{y_n\}$是单调上升数列，$\{z_n\}$是单调下降数列，并且

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

如果数列$\{x_n\}$有界：

$$m \leqslant x_n \leqslant M, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

那么自然有

$$m \leqslant y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \leqslant M, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

如果数列$\{x_n\}$无下界，那么

$$y_n = \inf_{k \geq n} x_k = -\infty, \qquad \forall n \in \mathbf{N};$$

如果数列$\{x_n\}$无上界，那么

$$z_n = \sup_{k \geq n} x_k = +\infty, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

为了使我们的讨论适用于一切可能的情形，应该把$\{y_n\}$和$\{z_n\}$看作是$\overline{\mathbf{R}}$中的数列。$\overline{\mathbf{R}}$中的任何单调序列总有极限。因而存在

$$\lim y_n = \eta \tag{3.1}$$

和

$$\lim z_n = \zeta. \tag{3.2}$$

**定义** 我们把(3.1)叫做数列$\{x_n\}$的下极限，把(3.2)叫做数

列$\{x_n\}$的上极限，并分别把它们记为

$$\underline{\lim}\ x_n \text{ 和 } \overline{\lim}\ x_n.$$

于是

$$\underline{\lim}\ x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \sup_n \inf_{k\geqslant n} x_k,$$

$$\overline{\lim}\ x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \inf_n \sup_{k\geqslant n} x_k.$$

上、下极限对任何实数序列都存在。像$\overline{\lim}$和$\underline{\lim}$这样的记号，使用时不必费心考虑存在性问题，因而为人们所乐于采用。

**定理1** $\eta=\underline{\lim}\ x_n$是实数序列$\{x_n\}$的最小极限点；$\zeta=\overline{\lim}\ x_n$是实数序列$\{x_n\}$的最大极限点。

**证明** 我们记

$$y_k=\inf_{n\geqslant k} x_n,\qquad z_k=\sup_{n\geqslant k} x_n,$$

$$k=1,2,\cdots.$$

如果$\xi\in\overline{\mathbf{R}}$是$\{x_n\}$的任意一个极限点，那么按照定义存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}=\xi.$$

因为

$$y_k\leqslant x_{n_k}\leqslant z_k,\qquad \forall k\in\mathbf{N},$$

所以

$$\lim_{k\to+\infty} y_k\leqslant \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}\leqslant \lim_{k\to+\infty} z_k.$$

这就是

$$\underline{\lim}\ x_n\leqslant\xi\leqslant\overline{\lim}\ x_n.$$

我们证明了：数列$\{x_n\}$的任何极限点$\xi$都介于$\eta=\underline{\lim}\ x_n$与$\zeta=\overline{\lim}\ x_n$之间。

尚须指出：$\eta=\underline{\lim}\ x_n$和$\zeta=\overline{\lim}\ x_n$都是数列$\{x_n\}$的极限点。

如果数列$\{x_n\}$下方无界，那么当然存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = -\infty = \eta.$$

再来考察数列$\{x_n\}$有下界的情形。我们将按照以下方式选取$m_k$和$n_k$，$k=1,2,\cdots$。首先，记$n_0=0$。假设$n_{k-1}$已经确定，则可选取$m_k\in\mathbf{N}$，满足条件$m_k>n_{k-1}$(例如可取$m_k=n_{k-1}+1$)；又可选取$n_k\in\mathbf{N}$，$n_k\geqslant m_k$，使得

$$(*)\qquad y_{m_k}\leqslant x_{n_k}\leqslant y_{m_k}+\frac{1}{k}$$

(根据下确界的定义，这样的$n_k$必定存在)。用这样的方式，我们选取了$\{y_m\}$的子序列$\{y_{m_k}\}$和$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$。在$(*)$式中让$k\to+\infty$取极限，就得到

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_{m_k} = \eta.$$

用类似的方式可以证明：$\zeta$也是数列$\{x_n\}$的一个极限点。□

**定理2** 设$\{x_n\}$是实数序列，则以下三条陈述互相等价：

(1) $\varliminf x_n = \varlimsup x_n = \xi$；

(2) $\lim x_n = \xi$；

(3) $\{x_n\}$只有唯一极限点$\xi$。

证明 “(2)⇒(3)”和“(3)⇒(1)”都是显然的。我们来证明“(1)⇒(2)”。同前面一样，记

$$y_n = \inf_{k\geqslant n}\{x_k\},\qquad z_n = \sup_{k\geqslant n}\{x_k\}.$$

显然有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

因为

$$\lim y_n = \lim z_n = \xi,$$

所以

$$\lim x_n = \xi. \qquad \square$$

**定理3** 设$\{x_n\}$是实数序列。

(1) 如果$\underline{\lim}\ x_n > \lambda$，那么

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p)(x_n > \lambda).$$

(2) 如果$\underline{\lim}\ x_n < \rho$，那么

$$(\forall q \in \mathbb{N})(\exists n_q \geq q)(x_{n_q} < \rho).$$

**证明** (1)

$$\begin{aligned} & \sup_p \inf_{n \geq p} x_n > \lambda \\ \Rightarrow & (\exists p \in \mathbb{N})(\inf_{n \geq p} x_n > \lambda) \\ \Rightarrow & (\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p)(x_n > \lambda). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \sup_q \inf_{n \geq q} x_n < \rho \\ \Rightarrow & (\forall q \in \mathbb{N})(\inf_{n \geq q} x_n < \rho) \\ \Rightarrow & (\forall q \in \mathbb{N})(\exists n_q \geq q)(x_{n_q} < \rho). \qquad \square \end{aligned}$$

**定理4** 设$\{x_n\}$是实数序列。

(1) 如果$\overline{\lim}\ x_n < \rho$，那么

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \geq p)(x_n < \rho).$$

(2) 如果$\overline{\lim}\ x_n > \lambda$，那么

$$(\forall q \in \mathbb{N})(\exists n_q \geq q)(x_{n_q} > \lambda).$$

**证明** 请读者仿照定理3的证明写出。 $\square$

**定理5** 设$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是实数序列。在以下各项中，只要任何一个不等号或者等号两边的式子都有意义(不出现$(+\infty)+(-\infty)$，$0\cdot(+\infty)$之类的情形)，那个不等式或者等式就成立。

(1) $$\underline{\lim}\ u_n + \underline{\lim}\ v_n \leq \underline{\lim}(u_n + v_n)$$

$$\leqslant\begin{cases}\varliminf u_n+\varlimsup v_n\\ \varlimsup u_n+\varliminf v_n\end{cases}$$

$$\leqslant\varlimsup(u_n+v_n)$$

$$\leqslant\varlimsup u_n+\varlimsup v_n;$$

(2) 如果 $\lim u_n=u$，那么

$$\varliminf(u_n+v_n)=u+\varliminf v_n,$$

$$\varlimsup(u_n+v_n)=u+\varlimsup v_n;$$

(3) 如果 $u_n\geqslant 0$，$v_n\geqslant 0$，$\forall n\in\mathbb{N}$，那么

$$\varliminf u_n\cdot\varliminf v_n\leqslant\varliminf(u_n\cdot v_n)$$

$$\leqslant\begin{cases}\varliminf u_n\cdot\varlimsup v_n\\ \varlimsup u_n\cdot\varliminf v_n\end{cases}$$

$$\leqslant\varlimsup(u_n\cdot v_n)$$

$$\leqslant\varlimsup u_n\cdot\varlimsup v_n;$$

(4) 如果 $\lim u_n=u>0$，$v_n\geqslant 0(\forall n\in\mathbb{N})$，那么

$$\varliminf(u_n\cdot v_n)=u\cdot\varliminf v_n,$$

$$\varlimsup(u_n\cdot v_n)=u\cdot\varlimsup v_n;$$

(5)

$$\varliminf(-u_n)=-\varlimsup u_n,$$

$$\varlimsup(-u_n)=-\varliminf u_n;$$

(6) 如果 $\varliminf u_n>0$，那么

$$\varlimsup\frac{1}{u_n}=\frac{1}{\varliminf u_n},$$

$$\varliminf\frac{1}{u_n}=\frac{1}{\varlimsup u_n};$$

(7) 如果 $u_n\leqslant v_n$，那么

$$\underline{\lim}\ u_n \leqslant \underline{\lim}\ v_n,$$

$$\overline{\lim}\ u_n \leqslant \overline{\lim}\ v_n.$$

**证明** 所有这些关系都可利用上、下确界的相应关系来证明。例如，为了证明(1)，我们可以利用不等式

$$\inf_{k\geqslant n} u_k + \inf_{k\geqslant n} v_k \leqslant \inf_{k\geqslant n}(u_k + v_k)$$

$$\leqslant \begin{cases} \inf\limits_{k\geqslant n} u_k + \sup\limits_{k\geqslant n} v_k \\ \sup\limits_{k\geqslant n} u_k + \inf\limits_{k\geqslant n} v_k \end{cases}$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant n}(u_k + v_k)$$

$$\leqslant \sup_{k\geqslant n} u_k + \sup_{k\geqslant n} v_k.$$

而(2)是(1)的直接推论，——因为对这情形我们有

$$\underline{\lim}\ u_n = \overline{\lim}\ u_n = u.$$

其他各项也很容易证明. □

### 3.b 应用上、下极限于正项级数敛散性的判别

§2 中所述的好几种判别法，都有所谓的"极限形式"．一般说来，"极限形式"比原来的形式用起来更方便，但可应用的范围较窄，——因为先要假定一定的极限存在．利用上、下极限的概念，可以改进各种"极限形式"判别法的陈述，拓广其应用范围．我们把有关的结论陈述为以下几个命题．

命题1(达朗贝尔判别法——上、下极限形式)

设$\sum a_n$是严格正项级数。

(1) 如果

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1,$$

那么级数$\sum a_n$收敛；

(2) 如果

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** 对(1)中的情形，可选取$\rho$，使得

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho<1.$$

根据定理4，存在$n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$(\forall n\geqslant n_0)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho<1\right).$$

对(2)中的情形，可选取$\lambda$，使得

$$1<\lambda<\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

根据定理3，存在$n_1\in\mathbf{N}$，使得

$$(\forall n\geqslant n_1)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}>\lambda>1\right).\qquad\square$$

与命题1类似，可以证明

**命题2**（拉阿贝判别法——上、下极限形式）
设$\sum a_n$是严格正项级数。

(1) 如果

$$\underline{\lim}\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1,$$

那么级数$\sum a_n$收敛；

（2）如果

$$\overline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

柯西根式判别法有一种只涉及上极限的很方便的形式：

**命题3** 设$\sum a_n$是正项级数，并设

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则有

（1）如果$q<1$，那么级数$\sum a_n$收敛；

（2）如果$q>1$，那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** 对于(1)中的情形，我们可以选取$\rho$，使得

$$q<\rho<1.$$

于是，根据定理4，存在$l\in\mathbf{N}$，使得

$$(\forall n\geqslant l)(\sqrt[n]{a_n}<\rho<1).$$

如果是(2)中的情形，那么对任何$k\in\mathbf{N}$都存在$n_k\geqslant k$，使得

$$(a_{n_k})^{1/n_k}>1.$$

这时当然有

$$a_{n_k}>1.$$

因为序列$\{a_n\}$不趋于0，所以级数$\sum a_n$发散。 □

下面的命题说明：凡是用达朗贝尔判别法能判定的情形，用柯西根式判别法也一定能够判定。

**命题4** 设$\sum a_n$是严格正项级数，则有

$$\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf \sqrt[n]{a_n}$$

$$\leqslant \varlimsup \sqrt[n]{a_n}$$

$$\leqslant \varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

因而

(1) $\varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \varlimsup \sqrt[n]{a_n} < 1$;

(2) $\varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \varlimsup \sqrt[n]{a_n} > 1$.

证明 我们记

$$\eta = \varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

对任意 $\lambda < \eta$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$(\forall n \geqslant N)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda\right).$$

于是，对于 $n > N$，就有

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N}$$

$$> \lambda^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{a_N}.$$

于是

$$\varliminf \sqrt[n]{a_n} \geqslant \lim_{n \to +\infty} \lambda^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{a_N} = \lambda.$$

因为可以取 $\lambda < \eta$，$\lambda \to \eta$，所以又可得到

$$\varliminf \sqrt[n]{a_n} \geqslant \eta = \varliminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

同样可以证明

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\qquad\square$$

**注记** 虽然从理论上看来柯西根式判别法比达朗贝尔判别法更有效，但前者涉及开方运算，后者只涉及除法运算，所以在实际运用时，用后者更方便省事。

## §4 任意项级数

本节考察任意项级数，也就是各项可以是正数、负数或者零的级数。

### 4.a 柯西收敛原理

我们知道，级数$\sum a_n$的收敛性，相当于它的部分和序列$\{S_n\}$的收敛性，这里

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad n=1,2,\cdots.$$

注意到

$$S_{n+p}-S_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k,$$

我们可以把关于序列的柯西收敛原理用级数的语言翻译如下：

**级数的柯西收敛原理** 级数$\sum a_n$收敛的充分必要条件是：对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要$n$，$p\in\mathbf{N}$，$n>N$，就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

**定理1** 如果级数$\sum|a_n|$收敛，那么级数$\sum a_n$也收敛。

**证明** 我们有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|. \qquad \square$$

**注记** 定理 1 的逆命题不成立。请看下面的反例。

**例 1** 考察这样一个级数：

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}. \tag{4.1}$$

试说明

(1) 由 (4.1) 各项的绝对值做成的级数是发散级数；

(2) 级数 (4.1) 是收敛的。

**解** 由 (4.1) 各项的绝对值做成的级数是调和级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}.$$

我们知道这级数是发散的。

为了说明级数(4.1) 的收敛性，我们需要用到以下的不等式

$$0<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n+1}, \qquad \forall n,p\in \mathbf{N}. \tag{4.2}$$

事实上，如果 $p$ 是偶数，那么

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)>0;$$

如果 $p$ 是奇数，那么

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\frac{1}{n+p}>0.$$

我们已经证明了 (4.2) 中的第一个不等式。对于 $p=1$ 的情形，

(4.2) 中的第二个不等式显然成立．下面考察 $p\geqslant 2$ 的情形．对这情形，当然也有

$$\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+(-1)^{p-2}\frac{1}{n+p}>0.$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\\&\quad=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+(-1)^{p-2}\frac{1}{n+p}\right)\\&\quad<\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

至此，我们完成了不等式 (4.2) 的证明．

利用不等式 (4.2)，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right|\\&\quad=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\\&\quad\leqslant\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

根据柯西收敛原理就可断定

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

是收敛级数．

定义　设 $\sum a_n$ 是任意项级数．

(1) 如果 $\sum|a_n|$ 收敛，那么 $\sum a_n$ 也收敛．对这种情形，我们说：级数 $\sum a_n$ 绝对收敛．

（2）如果$\sum|a_n|$发散，但$\sum a_n$收敛，那么我们就说级数$\sum a_n$条件收敛。

为了判别绝对收敛性，可以利用正项级数收敛性的判别法，请看下面的例子。

**例 2** 设$\sum a_n$是任意项级数，并设

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=q,$$

则有：

（1）如果$q<1$，那么级数$\sum a_n$绝对收敛；

（2）如果$q>1$，那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** 论断（1）是显然的。为了证明论断(2)，只须指出：在所给的条件下，序列$\{a_n\}$不能趋于0。 □

**例 3** 设级数$\sum a_n$的各项都不等于0（可以放宽到：至多有限项为0），则有：

（1）如果

$$\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,$$

那么级数$\sum a_n$绝对收敛；

（2）如果

$$\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1,$$

那么级数$\sum a_n$发散。

**证明** 论断（1）是显然的。对于（2）中的情形，存在$n_0\in\mathrm{N}$，使得只要$n\geqslant n_0$，就有

$$|a_{n_0}|<\cdots<|a_n|<|a_{n+1}|<\cdots.$$

由此得知：$\{a_n\}$不能趋于0。 □

为了考察条件收敛性，我们需要另外一些判别法。

### 4.5 分部求和公式与条件收敛性的判别

为了后面引用方便，我们把涉及分部求和公式的一些结果陈述为以下引理

**引理**（分部求和公式——阿贝尔引理）

设 $\alpha_i$ 和$\beta_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 是实数，则有：

(1) $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p$，这里

$$B_k=\sum_{i=1}^{k}\beta_i,\quad k=1,2,\cdots,p;$$

(2) 如果 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_p$（或者$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_p$），并且

$$|B_k|\leqslant L,\quad k=1,2,\cdots,p,$$

那么

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L(|\alpha_1|+2|\alpha_p|).$$

**证明** 为方便起见，我们记 $B_0=0$。于是有：

(1) $$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(B_i-B_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=2}^{p}\alpha_iB_{i-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{i+1}B_i$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p.$$

(2) 在所给的条件下，

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_pB_p\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}||B_i|+|\alpha_p||B_p|$$

$$\leqslant L\left(\sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|+|\alpha_p|\right)$$

$$=L(|\alpha_1-\alpha_p|+|\alpha_p|)$$

$$\leqslant L(|\alpha_1|+2|\alpha_p|)。\qquad\square$$

**注记** 人们把（1）中的公式叫做分部求和公式。它可以写成与分部积分公式很相似的形式：

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\Delta B_i=\alpha_jB_j\Big|_{j=0}^{p}-\sum_{i=0}^{p-1}B_i\Delta\alpha_i,$$

这里

$$B_0=0,\qquad B_k=\sum_{i=1}^{k}\beta_i,$$

$$\Delta B_k=B_k-B_{k-1}=\beta_k,$$

$$k=1,2,\cdots,p;$$

$$\Delta\alpha_0=\alpha_1,\quad \Delta\alpha_i=\alpha_{i+1}-\alpha_i,$$

$$i=1,2,\cdots,p-1.$$

**定理2**（狄里克莱判别法） 我们来考察级数$\sum a_nb_n$。如果

（1）序列$\{a_n\}$单调趋于0，

（2）序列$\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k\right\}$有界，

那么级数$\sum a_nb_n$收敛。

证明 我们来估计

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right|.$$

为此，记

$$\alpha_i = a_{n+i},\quad \beta_i = b_{n+i},\quad i=1,2,\cdots,p;$$

$$B_q = \sum_{i=1}^{q} \beta_i = \sum_{k=n+1}^{n+q} b_k,\quad q=1,2,\cdots,p.$$

由于条件(2)，可设

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant L,\quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

于是有

$$|B_q| = \left|\sum_{k=1}^{n+q} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant 2L,$$

$$q=1,2,\cdots,p.$$

利用阿贝尔引理估计

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i,$$

我们得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2L(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|).$$

因为序列$\{a_n\}$趋于0，所以对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要

$$n,p\in\mathbf{N},\quad n>N,$$

就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon.$$

这证明了级数$\sum a_k b_k$收敛。 □

**定理3**（阿贝尔判别法） 我们来考察级数$\sum a_n b_n$。如果

（1）序列$\{a_n\}$单调并且有界，

（2）级数$\sum b_n$收敛，

那么级数$\sum a_n b_n$也收敛。

**证明** 由于有条件(1)，可设

$$\lim a_n = a, \quad a \in \mathbf{R}.$$

因为序列$\{a_n - a\}$单调收敛于0，而序列$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$有界，根据定理2可以断定以下的级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)b_n.$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ab_n$$

显然也收敛。因为

$$a_n b_n = (a_n - a)b_n + ab_n,$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$

所以级数$\sum a_n b_n$收敛。 □

**注记** 也可以利用阿贝尔引理，通过直接估计证明定理3（请读者自己做练习）。

**例4**（关于交错级数的莱布尼兹判别法）

设序列$\{a_n\}$单调下降趋于0，则以下级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n.$$

**证明** 我们记

$$b_k = (-1)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots,$$

则显然有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

根据狄里克莱判别法就可以断定级数

$$\sum a_n b_n = \sum (-1)^{n-1} a_n$$

收敛。 □

**例 5** 级数 $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。

**例 6** 设级数 $\sum b_n$ 收敛，$\alpha \geqslant 0$。求证：

(1) 级数 $\sum \frac{b_n}{n^\alpha}$ 收敛；

(2) 级数 $\sum \frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} b_n$ 收敛。

**证明** 利用阿贝尔判别法就可证明(1)。为了证明(2)，我们指出

$$\frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} b_n = b_n - \frac{b_n}{n^\alpha + 1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

根据阿贝尔判别法很容易断定级数

$$\sum \frac{b_n}{n^\alpha + 1}$$

收敛。因而级数

$$\sum \frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1} b_n$$

也收敛。

**例 7** 我们来考察有限和

$$C_n(x)=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx,$$

$$S_n(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx.$$

利用三角学公式

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x,$$

容易得到：

$$C_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

对于 $x\neq 2m\pi$，我们有

$$|C_n(x)|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

$$|S_n(x)|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

设$\{a_n\}$是单调趋于 0 的序列。根据狄里克莱判别法可以断定以下两级数收敛：

$$\sum a_n \cos nx, \quad \sum a_n \sin nx,$$

这里 $x \neq 2m\pi$。

**例 8** 设 $\sum b_k$ 是收敛级数，求证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}kb_k = 0.$$

**证明** 我们记

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad B = \lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k.$$

对有限和

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k$$

应用分部求和公式得

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = -\sum_{k=1}^{n-1} B_k + nB_n.$$

于是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_n = B_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} B_k.$$

因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} B_k = \lim_{n\to+\infty} B_n = B,$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_n = 0. \qquad \square$$

## §5 绝对收敛级数与条件收敛级数的性质

收敛级数可以看成是有限和的推广。但无限和包含有极限过程，并不是有限和的所有性质都为无限和所保持。大体说来，绝对收敛的级数保持了有限和的较多的性质；条件收敛的级数则在某些方面与有限和差异很大。

### 5.a 收敛级数的可结合性

下面的定理说明：收敛的级数，不论是绝对收敛的或者是条件收敛的，都具有可结合性。

**定理1** 设有收敛的级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots. \tag{5.1}$$

如果把这级数的若干相继的项归并成一项，这样做成一个级数

$$\begin{aligned}&(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})\\&+\cdots+(a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_{k+1}})+\cdots,\end{aligned} \tag{5.2}$$

那么这级数仍收敛，并且与原级数有相等的和。

**证明** 设级数(5.1)的部分和序列为

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots, \tag{5.3}$$

则级数(5.2)的部分和序列恰好是(5.3)的一个子序列：

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots. \quad \square \tag{5.4}$$

**注记** 如果(5.1)是定号级数，那么定理1的逆命题成立。因为这时部分和序列(5.3)是单调序列。如果(5.3)的一个子序列(5.4)收敛，那么序列(5.3)也就收敛。但对于变号级数来说，定理1的逆命题并不成立。例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

当然是收敛的，但拆开括号所得的级数

$$1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

却是发散级数（因为$\{(-1)^{n-1}\}$不趋于0）。

### 5.b 绝对收敛级数具有可交换性

设$\sum a_n$是一个级数。我们改变$\{a_n\}$的次序把这序列重排为$\{a'_n\}$，然后考察重排后的级数

$$\sum a'_n.$$

请注意，所谓序列$\{a_n\}$的重排，是指把这序列中的所有各项无重复、无遗漏地排出来，——排列的顺序可以与原来的不同。用符号来表示就是

$$a'_n=a_{\varphi(n)},\quad n\in\mathbf{N},$$

这里$\varphi$是从$\mathbf{N}$到$\mathbf{N}$的单满映射（一一对应）。

**定理2** 设级数$\sum a_n$绝对收敛，则重排的级数$\sum a'_n$也绝对收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a'_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

**证明** 先设$\sum a_n$是正项收敛级数。这时显然有

$$\sum_{n=1}^{N}a'_n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

由此可知：$\sum a'_n$也是正项收敛级数，并且有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a'_n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}a_n. \tag{5.5}$$

因为$\sum a_n$也可以看成由$\sum a'_n$重排而成的级数，根据同样的理由应该有

$$(5.6)\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'.$$

由(5.5)和(5.6)就得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

再来考察更一般的情形：设$\sum a_n$是绝对收敛的任意项级数。对这情形，我们记

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

显然有

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant q_n \leqslant |a_n|,$$

$$|a_n| = p_n + q_n, \quad a_n = p_n - q_n,$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

与收敛级数$\sum |a_n|$作比较，我们看出：正项级数$\sum p_n$与$\sum q_n$都是收敛级数。因而重排后的级数$\sum p_n'$与$\sum q_n'$也都收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n.$$

由此得知，级数$\sum |a_n'| = \sum (p_n' + q_n')$也收敛，即$\sum a_n'$绝对收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n' - q_n')$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n' - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n'$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n - q_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \qquad \square$$

## 5.c 条件收敛级数的重排

下面的黎曼定理（定理 3 与定理 4）说明：与绝对收敛级数截然不同，条件收敛级数根本不具有可交换性。

**定理3** 设$\sum a_n$是条件收敛级数，则对任意给定的一个$\xi \in \mathbb{R}$，都必定存在级数$\sum a_n$的一个重排级数$\sum a_n'$，使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \xi.$$

**证明** 同前面一样，我们记

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

显然$\sum p_n$和$\sum q_n$都是正项级数，并且有

$$\lim p_n = \lim \frac{|a_n| + a_n}{2} = 0,$$

$$\lim q_n = \lim \frac{|a_n| - a_n}{2} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

再来考察序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

我们以 $P_n$ 表示其中的第 $n$ 个非负项，以 $Q_n$ 表 示 其中的第 $n$ 个负项的绝对值。请注意，$\{P_n\}$是序列$\{p_n\}$删 去 了 一些等于 0 的项之后剩下的子序列；$\{Q_n\}$是序列$\{q_n\}$删 去 了 一切等于 0 的项之后剩下的子序列。因此

$$\lim P_n = \lim Q_n = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n = +\infty.$$

我们依次考察$P_1, P_2, \cdots$中的各项。设$P_{m_1}$是其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \xi.$$

再依次考察 $Q_1, Q_2, \cdots$ 中的各项。设 $Q_{n_1}$ 是 其 中第一个满足以下条件的项：

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{n_1} < \xi.$$

再依次考察 $P_{m_1+1}, P_{m_1+2}, \cdots$中的各项。设 $P_{m_2}$ 是 其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{n_1}$$
$$+ P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \xi.$$

照这样做下去，我们得到$\sum a_n$的一个重排级数$\sum a'_n$ 如下：

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{n_1}$$
$$+ P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_1 - \cdots - Q_{n_2}$$
$$+ P_{m_2+1} + \cdots.$$

如果分别以 $R_k$ 与$L_k$表示级数$\sum a'_n$ 的末项 为 $P_{m_k}$的部分和与末

项为 $Q_{n_k}$ 的部分和，那么显然有

$$|R_k - \xi| \leqslant P_{m_k}, \quad k = 2, 3, \cdots,$$

和

$$|L_k - \xi| \leqslant Q_{n_k}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因为

$$\lim_{k \to +\infty} P_{m_k} = \lim_{k \to +\infty} Q_{n_k} = 0,$$

所以

$$\lim R_k = \lim L_k = \xi.$$

因为级数 $\sum a_n'$ 的任意一个部分和 $S_n'$ 必定介于某一对 $L_k$ 与 $R_k$ 之间，所以也应有

$$\lim S_n' = \xi.$$

这就是

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = \xi. \qquad \square$$

**定理4** 设 $\sum a_n$ 是条件收敛级数，则存在 $\sum a_n$ 的重排级数 $\sum a_n'$，使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = +\infty (\text{或者} -\infty).$$

**证明** 首先，任意选取一个严格单调上升并趋于 $+\infty$ 的实数序列 $\{\xi_k\}$（例如可以选取 $\xi_k = k, k = 1, 2, \cdots$）。其次，仍沿用定理3中的记号，约定以 $P_k$ 表示序列 $\{a_n\}$ 中的第 $k$ 个非负项，以 $Q_k$ 表示序列 $\{a_n\}$ 中的第 $k$ 个负项。然后，依次考察 $P_1, P_2, \cdots$ 中的各项，设 $P_{m_1}$ 是其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \xi_1.$$

再依次考察 $Q_1, Q_2, \cdots$ 中的各项，设 $Q_{n_1}$ 是其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{n_1}<\xi_1.$$

再依次考察$P_{m_1+1},P_{m_1+2},\cdots$中的各项，设$P_{m_2}$是其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{n_1}$$
$$+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2}>\xi_2.$$

再依次考察$Q_{n_1+1},Q_{n_1+2},\cdots$中的各项，设$Q_{n_2}$是其中第一个满足以下条件的项：

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{n_1}$$
$$+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2}-Q_{n_1+1}-\cdots-Q_{n_2}<\xi_2.$$

照这样做下去，我们得到$\sum a_n$的一个重排级数$\sum a_n'$。这重排级数满足条件

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n' = +\infty. \qquad \square$$

### 5.d 级数的乘法

两个有限和

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{N} b_n$$

的乘积是一切可能的$a_ib_j$这样的项的和：

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right)=\sum_{i,j=1}^{N} a_ib_j.$$

对于两个无穷级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

我们也写出一切可能的$a_ib_j$（排列成无穷矩阵的形式）：

$$
\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_ib_1 & a_ib_2 & a_ib_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

这些 $a_ib_j$ 可以用很多种方式排成数列。例如可按“三角形方式”排列如下：

$$
\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

或者按“正方形方式”排列如下：

$$
\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

这两种方式分别给出数列

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_2, a_3b_1, \cdots$$

和

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3,$$
$$a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \cdots.$$

**定理5(柯西)** 如果级数$\sum a_n$和$\sum b_n$绝对收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B,$$

那么$a_ib_j(i, j=1,2,\cdots)$按任意方式排列成的级数都是绝对收敛的，并且其和等于

$$AB.$$

**证明** 设$a_{i_k}b_{j_k}(k=1,2,\cdots)$是$a_ib_j(i,j=1,2,\cdots)$的任意一种排列。如果把$i_1,\cdots,i_n$和$j_1,\cdots,j_n$中的最大者记为$N$，那么就有

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k}b_{j_k}| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{N} |b_j|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j|.$$

由此得知：级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i_k}b_{j_k}$$

绝对收敛。按正方形方式重新排列这级数，我们得到：

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{i_k}b_{j_k} = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j\right)$$
$$= AB. \quad \square$$

**例 1** 容易看出：级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都是绝对收敛的。将两级数

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!} \text{ 和 } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!}$$

相乘，并按三角形方式排列乘积各项的顺序，我们得到

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k y^{p-k}}{k!(p-k)!}\right)$$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^p}{p!}.$$

即

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^p}{p!}=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!}\right).$$

——这也就是熟知的指数函数的加法定理：

$$e^{x+y}=e^x\cdot e^y.$$

**例 2** 容易看出：级数

$$C(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

和

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都是绝对收敛的。利用级数的乘法可以证明以下关

系式：

$$C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y),$$

$$S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y).$$

——这也就是三角函数 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的加法定理。

关于级数乘法的一些更细致的结果，将在下面的附录中讨论。

## 附录　关于级数乘法的进一步讨论

考察级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$。按照三角形方式排列

$$a_i b_j,\quad i,j=1,2,\cdots,$$

得到这样一个级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1). \tag{5.7}$$

我们把级数(5.7)叫做级数 $\sum a_n$ 与级数 $\sum b_n$ 的柯西乘积。如果限于柯西乘积，那么关于级数相乘的条件可进一步放宽（见下面的定理 6 和定理 7）。

**引理**　对于级数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 的部分和

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$$

与这两级数的柯西乘积的部分和

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(a_1b_k+\cdots+a_kb_1), \tag{5.8}$$

有以下这些关系：

(1) $C_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1$；

(2) $C_n=A_1b_n+A_2b_{n-1}+\cdots+A_nb_1$；

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}C_n=A_1B_N+A_2B_{N-1}+\cdots+A_NB_1$.

**证明** 容易看出，$C_n$是以下三角形数表中所列各数之和：

$$\begin{array}{lllll} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & & & \\ a_nb_1 & & & & \end{array}$$

将这三角形数表中的数按横行（纵列）结合求和，就得到结论(1)（结论(2)）。

下面证明结论(3)。由结论（1）可得

$$\sum_{n=1}^{N} C_n = \sum_{n=1}^{N} (a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1)。$$

仿照关于结论（2）的讨论（以大写的"$B_j$"代替小写的"$b_j$"），又可得到

$$\sum_{n=1}^{N} C_n = \sum_{n=1}^{N} (a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1)$$

$$= A_1 B_N + A_2 B_{N-1} + \cdots + A_N B_1. \quad \square$$

**定理6**（麦尔滕斯（Mertens）） 设级数$\sum a_n$绝对收敛，级数$\sum b_n$收敛.我们记

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B,$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

则级数$\sum c_n$也收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB.$$

**证明** 沿用上面引理中的记号$A_n$，$B_n$和$C_n$，并记

$$\beta_n = B - B_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是有

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 \\ &= a_1 (B - \beta_n) + a_2 (B - \beta_{n-1}) \\ &\quad + \cdots + a_n (B - \beta_1) \\ &= A_n B - (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1) \\ &= A_n B - R_n. \end{aligned}$$

下面，我们来估计

$$R_n = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1.$$

因为序列$\{\beta_k\}$趋于0，可设

$$|\beta_k| \leqslant E, \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

并可取 $p$ 充分大，使得 $k > p$ 时有

$$|\beta_k| < \frac{\varepsilon}{2D},$$

这里

$$D > \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

又可取 $m$ 充分大，使得

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2E}.$$

于是，对于$n > N = m + p$，就有

$$\begin{aligned} |R_n| &\leqslant (|a_1| |\beta_n| + \cdots + |a_m| |\beta_{n-m+1}|) \\ &\quad + (|a_{m+1}| |\beta_{n-m}| + \cdots + |a_n| |\beta_1|) \\ &< D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2E} \cdot E = \varepsilon. \end{aligned}$$

我们证明了

$$\lim R_n = 0,$$

也就证明了

$$\lim C_n = \lim A_n B = AB. \qquad \square$$

**定理7**（阿贝尔） 考察收敛级数$\sum a_n$与$\sum b_n$。设

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B,$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

如果级数$\sum c_n$收敛，其和为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = C,$$

那么就一定有

$$C = AB.$$

**证明** 仍沿用前面引理中的记号。我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = \frac{A_1 B_N + \cdots + A_N B_1}{N}.$$

在第二章§2的例6和例11中，我们证明了：

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C_n = C,$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{A_1 B_N + \cdots + A_N B_1}{N} = AB.$$

由此得到

$$C = AB. \qquad \square$$

**注记** 定理5对两相乘级数$\sum a_n$和$\sum b_n$要求最强（两级数绝对收敛），但对乘积级数的限制最少（任意排列都行）。定理6减弱了对相乘级数的要求（其中一个可以是条件收敛的），但限

定乘积级数是按三角形方式排列的（即柯西乘积）。在定理7中，两相乘级数都可以是条件收敛的，但要求柯西乘积级数收敛，——因为条件减弱到这种程度，已不足以保证乘积级数的收敛性了。请看下面的例子.

**例3** 考察两收敛级数

$$a_n = \sum b_n = \sum (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

设这两级数的柯西乘积为

$$\sum c_n, \quad c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1.$$

我们有

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right| \\ &= \left|(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}. \end{aligned}$$

因为

$$kn + k \leqslant 2kn \leqslant k^2 + n^2,$$

$$k(n-k+1) \leqslant n^2,$$

所以

$$|c_n| \geqslant n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由此可知级数$\sum c_n$是发散的.

## §6 无穷乘积

本节对无穷乘积作一简略的介绍。

考察数列

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots.$$

我们作它的“部分乘积”序列：

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 p_2, \cdots$$
$$\cdots, P_n = p_1 p_2 \cdots p_n, \cdots.$$

如果部分乘积序列$\{P_n\}$收敛于一个非零的数$P$：

$$\lim P_n = P \neq 0,$$

那么我们就说无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$收敛，并记

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n = P;$$

否则我们就说无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$发散。

特别要提请读者注意，对于

$$\lim P_n = 0$$

的情形，我们约定说：无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$发散于0（而不说收敛于0）。采取这样的约定是为了能更好地把无穷乘积与无穷级数联系起来（这在下面就会逐渐看清楚）。

有时也把无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$简单地写为$\prod p_n$。如果无穷乘积$\prod p_n$有因子$p_m = 0$，那么这乘积必定发散于0。因此，在下面的

讨论中，我们总假定所有的因子$p_n \neq 0$。

**定理1** 如果无穷乘积$\prod p_n$收敛，那么

$$\lim p_n = 1.$$

——这是无穷乘积收敛的一个必要条件。

**证明**（沿用上面的记号）我们有

$$\lim p_n = \lim \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1. \qquad \square$$

人们常常把$\prod p_n$写成这样的形式：

$$\prod (1 + a_n),$$

其中$a_n = p_n - 1$。采用这样的写法，可以把定理1表述为：

**定理1′** 如果无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$$

收敛，那么

$$\lim a_n = 0.$$

无穷乘积$\prod p_n$收敛的必要条件是

$$\lim p_n = 1.$$

因此，存在$m \in \mathbf{N}$，使得$n > m$时，$p_n > 0$。乘积

$$\prod_{n=1} p_n$$

可以分成两部分

$$\left(\prod_{k=1}^{m} p_k\right) \cdot \left(\prod_{n=1}^{+\infty} p_{m+n}\right).$$

前一部分是普通的有限乘积。涉及无穷乘积收敛性的问题，只与后一部分有关。因此，在以下的讨论中，我们假定所有的$p_n$都是正的：

$$p_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

下面的定理把无穷乘积与无穷级数联系起来。

**定理2** 无穷乘积$\prod p_n = \prod (1 + a_n)$收敛的充分必要条件是：无穷级数

$$\sum \ln p_n = \sum \ln(1 + a_n)$$

收敛。

**证明** 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} \ln p_k = \ln \prod_{k=1}^{n} p_k,$$

$$\prod_{k=1}^{n} p_k = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln p_k}. \qquad \square$$

**注记** 无穷乘积$\prod p_n = \prod (1 + a_n)$发散于$0(+\infty)$的充分必要条件是：无穷级数

$$\sum \ln p_n = \sum \ln(1 + a_n)$$

发散于$-\infty(+\infty)$。

**定理3** 设$a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0$，则无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$$

收敛的充分必要条件是：无穷级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

收敛。

**证明** 对于无穷乘积$\prod (1 + a_n)$和无穷级数$\sum a_n$来说，收敛的必要条件都是

$$\lim a_n = 0.$$

在这条件下就有

$$\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1.$$

于是，正项级数$\sum a_n$与$\sum \ln(1+a_n)$ 有同样的敛散性，——而后者又与无穷乘积$\prod(1+a_n)$ 有同样的敛散性。 □

设$a_n>-1(\forall n\in\mathbf{N})$。如果无穷级数

$$\sum|\ln p_n|=\sum|\ln(1+a_n)|$$

收敛，那么我们就说无穷乘积

$$\prod p_n=\prod(1+a_n)$$

绝对收敛。

**定理 4** 设 $a_n>-1(\forall n\in\mathbf{N})$，则以下三条件互相等价：

(1) 无穷乘积$\prod(1+a_n)$绝对收敛；

(2) 无穷乘积$\prod(1+|a_n|)$收敛；

(3) 无穷级数$\sum a_n$ 绝对收敛。

**证明** (1)和(2)分别等价于

(1′) $\sum|\ln(1+a_n)|$收敛

和

(2′) $\sum\ln(1+|a_n|)$收敛。

我们注意到：(1),(2)和(3)的必要条件都是：

$$\lim a_n=0.$$

以下假定这条件成立。因为

$$\lim\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1,$$

$$\lim\frac{\ln(1+|a_n|)}{|a_n|}=1,$$

所以$\sum|\ln(1+a_n)|$ 和$\sum\ln(1+|a_n|)$都与 $\sum|a_n|$有同样的敛散性。这证明了定理。 □

下面给出无穷乘积的一些例子。

例1 $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

我们来考察它的部分乘积。因为

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{2\times4}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots$$

$$\times\frac{(n-2)\times n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)\times(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}\,(n\to+\infty),$$

所以

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例2 $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^{2^{n-1}})\quad(|x|<1)$.

我们来考察它的部分乘积。因为

$$P_n=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$$

$$=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\to\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}.$$

**例3** $\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}$ $(\varphi\neq 0)$，

因为

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\varphi}{2^k}=\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}}\to\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

所以

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

**例4** 在第九章§6中，我们曾证明瓦利斯公式：

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

瓦利斯公式当然可以看作无穷乘积。由这公式还可以导出

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}(2n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\frac{2}{\pi},$$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n+2)}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{4}.$$

# 第十九章　函数序列与函数级数

## §1　概　　说

本章考察各项都是 $x$ 的函数的序列

(1.1)　$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots,$$

同时也考察各项都是 $x$ 的函数的级数

(1.2)　$$\sum u_n(x).$$

使得函数序列(1.1)(或函数级数(1.2))收敛的 $x$ 的集合，被称为序列(1.1)(或级数(1.2))的收敛域。下面是关于收敛域的一些例子：

**例 1**　函数级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

的收敛域是$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$(可用达朗贝尔判别法确定)。

**例 2**　函数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{nx}$$

的收敛域是$(-\infty, 0)$(可用柯西根式判别法确定)。

**例 3**　函数序列

$$f_n(x)=x^n, \quad n=1,2,\cdots$$

的收敛域是$(-1,1]$。

**例 4**　函数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}$$

的收敛域是

$$\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>1\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

**例 5** 函数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n!)x^n$$

的收敛域是单点集$\{0\}$.

**例 6** 函数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{nx^2}$$

的收敛域是空集合.

设 $D\subset\mathbb{R}$. 如果函数序列$\{f_n(x)\}$的收敛域包含了$D$,那么对每一个$x\in D$都存在极限

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\in\mathbb{R}.$$

用这种方式可以定义一个函数

$$f:\ D\to\mathbb{R}.$$

我们把这种用逐点收敛的极限定义的函数$f$,叫做函数序列$\{f_n(x)\}$在集合$D$上的极限函数。

于是,产生了这样一类问题:如果函数序列$\{f_n(x)\}$的每一项都具有某种分析性质(例如连续性),那么极限函数$f(x)$是否也具有同样的性质?回答这一类问题是本章的主要任务。将在下一节中介绍的一致收敛性概念,对于极限函数性质的研究,起着非常重要的作用。这里,我们通过例子来说明:逐点收敛性不足以保证极限函数的连续性。

**例 7** 考察函数序列

$$f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\quad n=1,2,\cdots.$$

我们看到，虽然这序列的各项都是连续函数，极限函数 $f(x)=\lim f_n(x)$ 却具有间断点 $x=\pm1$（图 19-1）：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 如果|x|<1,\\ \frac{1}{2}, & 如果|x|=1,\\ 1, & 如果|x|>1.\end{cases}$$

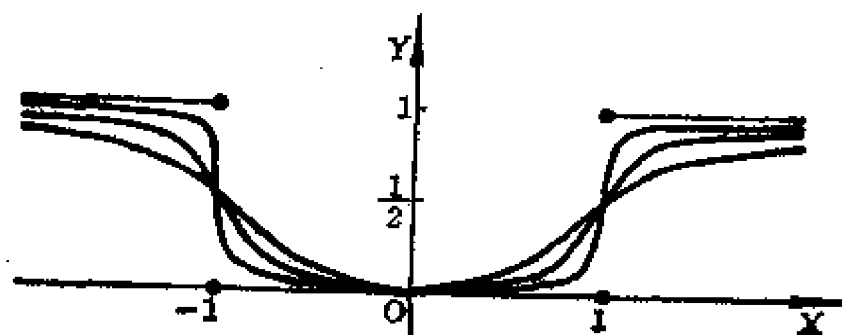



图 19-1

## §2 一致收敛性

所谓"函数序列$\{f_n(x)\}$在区间 $I$ 上（逐点）收敛于函数$f(x)$"，就是说：对于任意指定的 $x_0\in I$，数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$。用"$\varepsilon$-$N$"方式陈述，就是：对于任意的 $x_0\in I$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x_0,\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

请注意，这里的 $N=N(x_0,\varepsilon)$不仅与 $\varepsilon$ 有关，而且与 $x_0$ 有关。一般说来，在不同的点 $x_0\in I$，序列 $\{f_n(x_0)\}$ 的收敛速度是不一样的。

有的函数序列在各点的收敛速度相差很悬殊。请看下面的例子。

**例 1** 考察函数序列

$$f_n(x)=x^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

这函数序列在区间(0,1)上逐点收敛于函数

$$f(x)=0.$$

对于 $0<\varepsilon<1$，为了使

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必须而且只须

$$n>N(x,\varepsilon)=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$$

（这里的[ ]表示取整数部分）。

在不同的点 $x\in(0,1)$，序列$\{f_n(x)\}$的收敛速度很不一样。例如，为了使

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{10^{120}},$$

在$x_1=\dfrac{1}{10}$处，至少要

$$n>N_1=120;$$

在$x_3=\dfrac{1}{10^3}$处，须要

$$n>N_3=40;$$

而在 $x_{12}=\dfrac{1}{10^{12}}$处，则只要

$$n>N_{12}=10.$$

特别值得注意的是：对于给定的 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，不论 $n$ 怎样大，总存

在

$$x_0=(2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}\in(0,1),$$

使得

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=2\varepsilon>\varepsilon.$$

因此，不可能找到对所有的 $x\in(0,1)$ 都适用的统一的 $N=N(\varepsilon)$（参看图 19-2）。

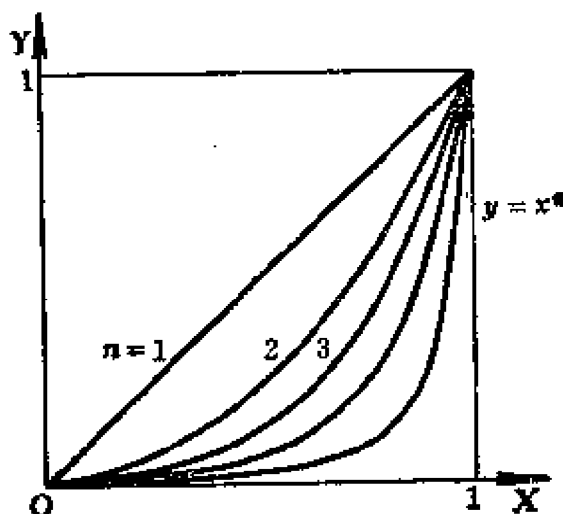



图 19-2

下面的例 2 所展示的，则是另一种重要的情形（参看图 19-3）。

**例 2** 考察函数序列

$$f_n(x)=\frac{1}{x+n},\quad n=1,2,\cdots.$$

这函数序列在区间$(0,1)$上逐点收敛于函数

$$f(x)=0.$$

虽然在各点的收敛速度仍有差别，但对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在对所有的 $x\in(0,1)$都能适用的

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

使得只要 $n > N$，就有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

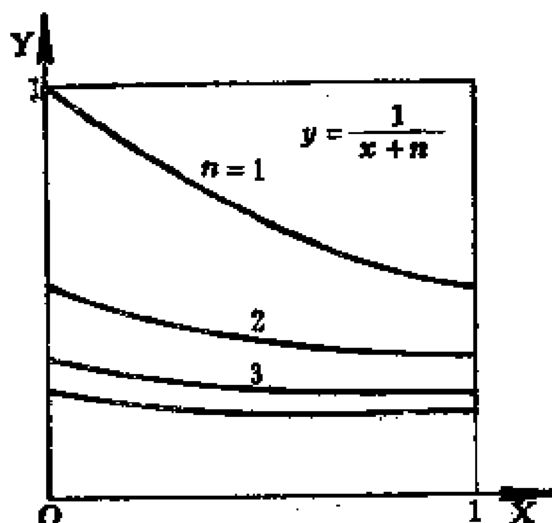



图 19-3

**定义 1** 设函数序列$\{f_n(x)\}$在集合$E$上逐点收敛于函数$f(x)$。如果对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$($N = N(\varepsilon)$ 不随 $x$ 而改变)，使得只要 $n > N$，就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

那么我们就说函数序列$\{f_n(x)\}$在集合 $E$ 上一致收敛于函数$f(x)$，并约定用以下记号来表示

$$f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x) \quad (n \to +\infty).$$

用几何式的语言，可以对定义 1 作这样的描述：所谓函数序列$\{f_n(x)\}$在集合 $E$ 上一致收敛于函数 $f(x)$，就是说，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$，使得只要 $n > N$，定义于$E$上的曲线

$y=f_n(x)$就都落入带状区域

$$\{(x,y)|x\in E, f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon\}$$

之中（参看图 19-4）。

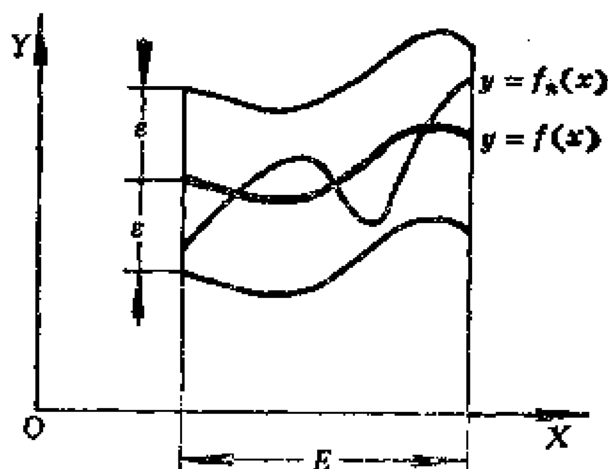



图 19-4

关于函数级数的一致收敛性，也可类似地陈述定义：

**定义1′** 设函数级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

在集合 $E$ 上逐点收敛于和函数 $S(x)$。如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$（$N(\varepsilon)$不随 $x$ 而改变），使得只要 $n>N$，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in E,$$

那么我们就说函数级数$\sum u_n(x)$在集合 $E$ 上一致收敛于和函数 $S(x)$。

**例 3** 在区间$[0,1]$上，考察函数级数

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

容易看出，极限函数为

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0,\quad x\in[0,1].$$

因为

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x}{1+n^2x^2}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2n},\quad \forall x\in[0,1],$$

所以函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$[0,1]$上一致收敛于极限函数0（参看图19-5）。

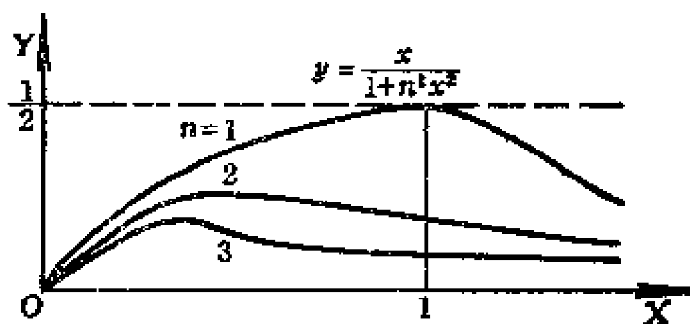



图 19-5

**例4** 在区间$[0,1]$上，考察函数序列

$$g_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

容易看出，极限函数为

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty} g_n(x)=0,\quad x\in[0,1].$$

但对于$\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，不论$n$怎样大，总存在

$$x_n = \frac{1}{n} \in [0,1],$$

使得

$$|g_n(x_n) - g(x_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon,$$

所以函数序列$\{g_n(x)\}$在$[0,1]$上不是一致收敛的（参看图19-6）。

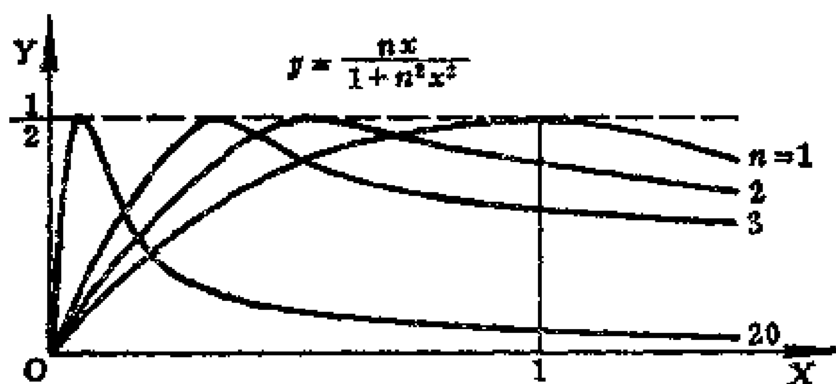



图 19-6

**定理 1** 设函数序列$\{f_n(x)\}$在集合$E$上逐点收敛于函数$f(x)$。我们记

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

则以下三项陈述互相等价：

(1) $\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$；

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$；

(3) 对任何序列$\{x_n\} \subset E$都有

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

**证明** 先证"(1)⇒(2)"。如果(1)成立，那么对任意$\varepsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，使得只要$n > N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x\in E.$$ 由此可知，

只要 $n>N$，就有

$$d(f_n,f)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

再来证明“(2)⇒(3)”：对任意的$\{x_n\}\subset E$，显然有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\leqslant d(f_n,f).$$

最后证明“(3)⇒(1)”(用反证法)。我们记 $n_0=0$。假定 (1) 不成立，则对某一 $\varepsilon>0$，存在 $n_k\in\mathbf{N}$，$n_k>n_{k-1}+1$ 和 $x_{n_k}\in E$ $(k=1,2,\cdots)$，使得

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon.$$

对于 $m\in\mathbf{N}\backslash\{n_k\}$，可以随意选取 $x_m\in E$ 与之对应。这样，我们得到一个序列

$$\{x_n\}\subset E,$$

它的子序列$\{x_{n_k}\}$使得

$$|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon.$$

这说明：如果(1)不成立，那么(3)也不能成立。我们用反证法证明了“(3)⇒(1)”. □

**注记** 陈述(2)常用于正面证明一致收敛性(如我们在例 2 和例 3 中所作)；而陈述(3)则常用于从反面指出某函数序列不一致收敛（请看下面的例 5 和例 6 ）。

**例 5** 考察函数序列

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad n=1,2,\cdots.$$

在区间(0,1)上，这函数序列逐点收敛于

$$f(x)=0.$$

但对于

$$x_n=\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

我们有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

因而这函数序列在区间(0,1)上不一致收敛。

**例6** 考察函数序列

$$f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},\qquad n=1,2,\cdots.$$

这函数序列在区间[0,1]上逐点收敛于函数

$$f(x)=0.$$

但我们有

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=2ne^{-1}\to+\infty.$$

因而这函数序列在区间[0,1]上不一致收敛。

利用下面的柯西原理，无须事先求出极限函数，就能判别一个函数序列是否一致收敛.

**定理2**（一致收敛的柯西原理） 设函数序列$\{f_n(x)\}$的各项在集合$E$上有定义。则这序列在$E$上一致收敛于某极限函数的充分必要条件是：对任何$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得只要$m,n>N$，就有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in E.$$

**证明** 先证必要性。设函数序列$\{f_n(x)\}$一致收敛于函数$f(x)$。则对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得$n>N$时，

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\forall x\in E.$$

于是，只要 $m,n>N$，就有

$$\begin{aligned}&|f_m(x)-f_n(x)|\\&\quad\leqslant|f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|\\&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad\forall x\in E.\end{aligned}$$

**再证充分性。** 对任意取定的 $x_0\in E$，数列 $\{f_n(x_0)\}$ 满足柯西条件，因而收敛于一个实数。我们记这实数为 $f(x_0)$。用这样的方式，定义了一个函数

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x),\quad x\in E.$$

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得只要 $n>N$，$p\in\mathbf{N}$，就有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in E.$$

在上面的不等式中让 $p\to+\infty$ 取极限，就得到

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,\quad\forall x\in E.$$

这证明了函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于函数 $f(x)$。 □

**例 7** 设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 上一致收敛，而函数 $\varphi(x)$ 在 $E$ 上有界。则函数序列 $\{\varphi(x)f_n(x)\}$ 也在 $E$ 上一致收敛。

事实上，设

$$|\varphi(x)|\leqslant M,\quad\forall x\in E,$$

则有

$$|\varphi(x)f_m(x)-\varphi(x)f_n(x)|\leqslant M|f_m(x)-f_n(x)|,\quad\forall x\in E.$$

**定理 2′**（一致收敛的柯西原理——级数形式）

设函数级数 $\sum u_n(x)$ 的每一项都在集合 $E$ 上有定义。则这级数在 $E$ 上一致收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得只要 $n>N$，$p\in\mathbf{N}$，就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon,\quad\forall x\in E.$$

**推论** 如果函数级数 $\sum|u_n(x)|$ 在集合 $E$ 上一致收敛，那么

函数级数$\sum u_n(x)$也在集合$E$上一致收敛。

下面介绍关于函数级数一致收敛性的一些常用的判别法。

**定理3**（维尔斯特拉斯判别法） 设函数级数$\sum u_n(x)$的各项在集合$E$上有定义。如果存在收敛的数项级数$\sum M_n$，使得

$$|u_n(x)| \leqslant M_n, \quad \forall x \in E,$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$

那么函数级数$\sum u_n(x)$在集合$E$上一致收敛。

**证明** 因为数项级数$\sum M_n$收敛，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得只要$n>N$，$p \in \mathbb{N}$，就有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

于是，只要$n>N$，$p \in \mathbb{N}$，就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

由柯西原理就可断定函数级数$\sum u_n(x)$在集合$E$上一致收敛。 □

**注记** 满足定理2中条件的数项级数$\sum M_n$被称为函数级数$\sum u_n(x)$的"优级数"。

**例8** 设数项级数$\sum a_n$绝对收敛。我们来考察两个函数级数

$$\sum a_n \cos nx \quad 和 \quad \sum a_n \sin nx.$$

因为

$$|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \sin nx| \leqslant |a_n|,$$

所以$\sum |a_n|$是两函数级数的优级数。根据维尔斯特拉斯判别法，我们断定：两函数级数（在任何集合$E \subset \mathbb{R}$上）都是一致收敛的。

维尔斯特拉斯判别法只适用于判别绝对一致收敛的函数级

数．关于条件收敛级数的一致收敛性，有以下的狄里克莱判别法与阿贝尔判别法．

**定理4（狄里克莱判别法）** 我们来考察这样的函数级数

$$\sum a_n(x)b_n(x), \quad x\in E.$$

如果

(1) 序列$\{a_n(x)\}$对每一取定的$x\in E$都是单调的，并且这函数序列在$E$上一致地趋于0；

(2) 函数级数$\sum b_n(x)$的部分和序列在$E$上一致有界：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|\leqslant L, \quad \forall n\in \mathbf{N}, x\in E,$$

那么级数$\sum a_n(x)b_n(x)$在$E$上一致收敛．

**证明** 我们用阿贝尔引理来估计

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|.$$

因为

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right|\leqslant 2L, \quad \forall x\in E,$$

所以

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|$$
$$\leqslant 2L(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+p}(x)|), \quad \forall x\in E.$$

又因为函数序列$\{a_n(x)\}$在$E$上一致地趋于0，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$|a_n(x)|<\frac{\varepsilon}{6L}, \forall x\in E.$$

于是，$n>N$时就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|<\varepsilon, \quad \forall p\in\mathbf{N},\ x\in E.$$

根据柯西原理，我们断定级数$\sum a_n(x)b_n(x)$在集合$E$上一致收敛。 □

**定理5**（阿贝尔判别法） 考察函数级数

$$\sum a_n(x)b_n(x).$$

如果

(1) 序列$\{a_n(x)\}$对每一取定的$x\in E$都是单调的，并且这函数序列在$E$上一致有界：

$$|a_n(x)|\leqslant M, \quad \forall n\in\mathbf{N},\ x\in E;$$

(2) 函数级数$\sum b_n(x)$在$E$上一致收敛，

那么函数级数$\sum a_n(x)b_n(x)$也在集合$E$上一致收敛。

**证明** 因为$\sum b_n(x)$在$E$上一致收敛，所以对任何$\varepsilon'>0$,存存$N\in\mathbf{N}$，使得只要

$$n>N,\ p\in\mathbf{N},$$

就有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right|<\varepsilon'.$$

利用阿贝尔引理估计$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| &\leqslant\varepsilon'(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+p}(x)|)\\ &\leqslant 3M\varepsilon', \quad \forall p\in\mathbf{N},\ x\in E.\end{aligned}$$

对于任何$\varepsilon>0$，我们当然可以选取$\varepsilon'>0$，使得

$$3M\varepsilon'<\varepsilon. \qquad \square$$

## §3 极限函数的分析性质

本节考察一致收敛函数序列的极限函数的分析性质。问题的实质是交换两个极限运算的次序。

**定理1**（极限函数的连续性） 如果函数序列$\{f_n(x)\}$的每一项都在区间$I$连续，并且这函数序列在区间$I$上一致收敛于$f(x)$，那么极限函数$f(x)$也在区间$I$连续。

**证明** 设$x_0$是$I$中任意一点，$x$是$I$中邻近$x_0$的一点。我们有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|$$
$$+|f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

因为函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛于$f(x)$，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall x\in I.$$

取定一个$n>N$，我们考察函数$f_n(x)$。因为这函数在区间$I$连续，所以存在$\delta>0$，使得只要

$$x\in I,\quad |x-x_0|<\delta,$$

就有

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，只要$x\in I$，$|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|$$
$$+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \qquad \square$$

关于函数级数也有相应的结果。

**定理1′** 如果函数级数$\sum u_n(x)$的每一项都在区间 $I$ 连续，并且这函数级数在区间 $I$ 上一致收敛于 $u(x)$，那么和函数 $u(x)$ 也在区间 $I$ 连续。

**定理2**（逐项积分定理） 如果函数序列$\{f_n(x)\}$的每一项都在闭区间$[a,b]$连续，并且这函数序列在闭区间$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，那么就有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 根据定理 1，函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，因而在这区间上可积分．我们来估计

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\mathrm{d}x\right|.$$

因为函数序列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in I.$$

于是，只要 $n>N$，就有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\varepsilon(b-a).$$

这证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

关于函数级数也有相应的逐项积分定理。

**定理2′** 如果函数级数$\sum u_n(x)$的每一项都在闭区间$[a,b]$连续，并且这函数级数在闭区间$[a,b]$上一致收敛于和函数$u(x)$，那么就有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx.$$

**定理3**（逐项微分定理） 如果函数序列$\{f_n(x)\}$满足条件：

(1) 每一项$f_n(x)$在$[a,b]$连续可微；

(2) 导函数序列$\{f_n'(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于$\varphi(x)$；

(3) $\{f_n(x)\}$至少在某一点$x_0\in[a,b]$收敛：

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

那么函数序列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于某个连续可微函数$f(x)$，并且

$$f'(x) = \varphi(x).$$

**证明** 根据条件(1)，我们有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(\xi)\,d\xi, \tag{3.1}$$

$$\forall x\in[a,b],\ n\in\mathbf{N}.$$

由此得到

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\sup_{\xi\in[a,b]}|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|,$$

$$\forall x\in[a,b],\ m,n\in\mathbf{N}.$$

根据定理的条件(2)和(3)，对任意的$\varepsilon>0$,存在$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得只要$m,n>N$，就有

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{\xi\in[a,b]}|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，只要$m,n>N$，就有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]。$$

根据柯西原理，我们断定：函数序列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$一致收敛于极限函数$f(x)$。

在（3.1）式中让$n\to+\infty$取极限，利用定理2，我们得到

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad \forall x\in[a,b]。$$

由这表示式可知：函数$f(x)$是连续可微的，并且

$$f'(x)=\varphi(x),\quad \forall x\in[a,b]。\quad \square$$

关于函数级数，也有相应的逐项微分定理。

**定理3′** 如果函数级数$\sum u_n(x)$满足条件：

（1）每一项$u_n(x)$在$[a,b]$连续可微；

（2）由各项的导函数组成的级数$\sum u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于和函数$\varphi(x)$；

（3）$\sum u_n(x)$至少在某一点$x_0\in[a,b]$收敛，

那么函数级数$\sum u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上一致收敛，其和函数$u(x)$在$[a,b]$连续可微，并且$u'(x)=\varphi(x)$，也就是

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)。$$

定理1可以推广为以下更一般的形式：

**定理4** 设$E\subset\mathbf{R}$，$x_0$是$E$的聚点，函数序列$\{f_n(x)\}$在集合$E$上一致收敛于$f(x)$，并且当$x\to x_0$时该序列各项收敛于极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\E}}f_n(x)=a_n\in\mathbf{R},\quad n=1,2,\cdots,$$

则存在有穷极限

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\in\mathbf{R},$$

并且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ E}} f(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

**证明** 先证明数列$\{a_n\}$收敛。由一致收敛的柯西原理可知，对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要$m,n>N$，就有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x\in E.$$

在上式中让$x\xrightarrow[E]{}x_0$就得到

$$|a_m-a_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

根据数列的柯西原理可以断定：存在有穷极限

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a\in\mathbf{R}.$$

为了证明$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ E}} f(x)=a$，我们作如下的估计

$$|f(x)-a|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-a|.$$

因为函数序列$\{f_n(x)\}$在$E$上一致收敛于$f(x)$，数列$\{a_n\}$收敛于$a$，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall x\in E,$$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取定一个$n>N$，我们来考察函数$f_n(x)$。因为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ E}} f_n(x)=a_n,$$

所以存在$\delta>0$，使得只要

$$x\in E,\quad 0<|x-x_0|<\delta,$$

就有

$$|f_n(x)-a_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，只要

$$x\in E,\ 0<|x-x_0|<\delta,$$

就有

$$\begin{aligned}&|f(x)-a|\\&\quad\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-a|\\&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

至此，我们完成了定理的证明。 □

对于级数，我们有以下的逐项取极限定理：

**定理4′** 设$E\subset\mathbb{R}$，$x_0$是$E$的聚点，函数级数$\sum u_n(x)$在集合$E$上一致收敛，并且当$x\to x_0$时该级数各项收敛于极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\E}}u_n(x)=a_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则级数$\sum a_n$收敛：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=a\in\mathbb{R},$$

并且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\E}}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=a.$$

以上这些定理所讨论的，实质上都是两个极限运算交换次序的问题。例如，定理1（以及定理4）的结论可以写成

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x),$$

定理2的结论可以写成

$$\int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x;$$

定理 3 的结论可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x)).$$

还须指出：这些定理给出的，只是所涉及的两极限能交换顺序的充分条件（不是充分必要条件）。

下面的狄尼（Dini）定理，是定理 1 的部分逆命题（附加了限制条件的逆命题）。

**定理5** 考察在闭区间$[a,b]$上逐点收敛的函数序列$\{f_n(x)\}$。如果

(1) 这序列的每一项$f_n(x)$在闭区间$[a,b]$连续；

(2) $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$, $\forall x\in[a,b]$, $n=1,2,\cdots$（或者$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$, $\forall x\in[a,b]$, $n=1,2,\cdots$）；

(3) 极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$在闭区间$[a,b]$连续，那么函数序列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。

**证明** 为了叙述方便，先作一些简化。我们记

$$\varphi_n(x)=f_n(x)-f(x),\quad n=1,2,\cdots$$

$$(\text{或者}\varphi_n(x)=f(x)-f_n(x),\quad n=1,2,\cdots).$$

显然函数序列$\{\varphi_n(x)\}$满足条件

(1′) 每一项$\varphi_n(x)$在闭区间$[a,b]$连续；

(2′) $\varphi_n(x)\geqslant\varphi_{n+1}(x)$, $\forall x\in[a,b]$, $n=1,2,\cdots$；

(3′) $\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上逐点收敛于0。

我们来证明：函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于 0。设$\varepsilon$是预先给定的任意正实数。对任意$x_0\in[a,b]$，存在$n_0=n(x_0)\in\mathbf{N}$，使得

$$0\leqslant\varphi_{n_0}(x_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于函数$\varphi_{n_0}(x)$在闭区间$[a,b]$连续，存在$x_0$的邻域$U(x_0)$，使得只要

$$x\in U(x_0)\cap[a,b],$$

就有

$$0\leqslant\varphi_{n_0}(x)<\varepsilon.$$

于是，对于$x\in U(x_0)\cap[a,b]$和$n>n_0$，就有

$$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n_0}(x)<\varepsilon.$$

对闭区间$[a,b]$的每一点$x_0$，都存在这样的$n(x_0)$和$U(x_0)$。所有这样的$U(x_0)$构成闭区间$[a,b]$的一个开覆盖，因而存在其中的有限个

$$U(x_1),\ U(x_2),\cdots,U(x_k),$$

它们仍能覆盖住闭区间$[a,b]$。我们记

$$N=\max\{n(x_1),n(x_2),\cdots,n(x_k)\}.$$

因为任意的$x\in[a,b]$必定属于某个$U(x_j)$，所以只要$n>N$ $(\geqslant n(x_j))$，就一定有

$$0\leqslant\varphi_n(x)<\varepsilon.$$

我们证明了函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于0，即函数序列$\{f_n(x)\}$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。 □

关于函数级数也有类似的狄尼定理：

**定理5′** 考察在闭区间$[a,b]$上逐点收敛的函数级数$\sum u_n(x)$。如果

(1) 这级数的每一项$u_n(x)$在闭区间$[a,b]$连续并且非负；

(2) 和函数$u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$在闭区间$[a,b]$连续，

那么函数级数$\sum u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上一致收敛于$u(x)$。

## §4 幂 级 数

本节考察如下形状的函数级数：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n. \tag{4.1}$$

这样的函数级数被称为幂级数。它可以看成多项式的推广——“无穷次的多项式”。如果$x_0=0$，那么幂级数(4.1) 成为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

对这一简单情形所作的讨论，可以平行地推广到任意$x_0\in\mathbb{R}$的情形。

### 4.a 收敛半径

由柯西与阿达玛 (Hadamard) 提出并证明的以下定理指出：幂级数(4.1) 的收敛域是以$x_0$为中点的一个区间(可以是开区间、闭区间或者半开半闭的区间，还可以是退化的区间——单点集$\{x_0\}$)。

**定理1** (柯西-阿达玛公式) 考察幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

如果记

$$\rho=\frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{4.2}$$

那么幂级数(4.1) 对于使得$|x-x_0|<\rho$的$x$绝对收敛，对于使得$|x-x_0|>\rho$的$x$发散。

**注记** 对(4.2)式的确切含义，可以更详细地说明如下，对于

$$\lambda=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|},$$

我们约定

$$\rho=\begin{cases}+\infty, & 如果\lambda=0,\\ \dfrac{1}{\lambda}, & 如果0<\lambda<+\infty,\\ 0, & 如果\lambda=+\infty.\end{cases}$$

**定理1的证明** 我们来考察

$$q=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}$$

$$=|x-x_0|\ \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

显然有

$$q\begin{cases}<1, & 如果|x-x_0|<\rho,\\ >1, & 如果|x-x_0|>\rho.\end{cases}$$

根据柯西根式判别法就可以断定：幂级数(4.1)对于使得$|x-x_0|<\rho$的$x$绝对收敛，对于使得$|x-x_0|>\rho$的$x$发散。 □

**定义** 我们把由(4.2)式所定义的广义实数$\rho$叫做幂级数(4.1)的收敛半径。

关于幂级数(4.1)在区间端点$x_0\pm\rho$处的敛散性，可以有各种不同的情形，不能一概而论。请看下面的一些例子。

**例1** 幂级数$\sum x^n$的收敛半径$\rho=1$。容易看出，在端点$x=\pm1$处，级数是发散的。因而这幂级数的收敛域是开区间$(-1,1)$。

**例2** 幂级数$\sum\frac{x^n}{n}$的收敛半径$\rho=1$。在端点$x=-1$处这级数是收敛的，但在端点$x=1$处这级数是发散的。因而这幂级数的收敛域是半开区间$[-1,1)$。

**例 3** 幂级数$\sum \frac{x^n}{n^2}$的收敛半径$\rho=1$。在端点$x=\pm 1$处级数是收敛的。因而这幂级数的收敛域是闭区间$[-1,1]$。

下面是定理 1 的一个推论：

**推论** 考察幂级数

$$\sum a_n(x-x_0)^n.$$

如果存在极限

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda,$$

那么幂级数(4.1)的收敛半径可按下式计算：

$$\rho=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

### 4.b 和函数的性质

为了讨论幂级数的和函数的性质，我们需要考察这级数的一致收敛性。虽然未必能断定幂级数在整个收敛域上一致收敛，但至少可以确认：它在收敛域具有所谓的“内闭一致收敛性”——也就是在包含于收敛域中的任何闭区间上具有一致收敛性。

为了记号简单，我们将对$x_0=0$的情形进行讨论。所得的结果当然可以平行推广于一般的情形。

**引理1** 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{4.3}$$

的收敛半径是$\rho$，而$[-r,r]$是包含于$(-\rho,\rho)$之中的任何闭区间

$$[-r,r]\subset(-\rho,\rho),$$

则幂级数(4.3) 在$[-r,r]$上一致收敛。因而这幂级数的 和 函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

在开区间$(-\rho,\rho)$内处处连续。

**证明** 在闭区间$[-r,r]$上，幂级数$\sum a_nx^n$以收敛级数$\sum|a_n|r^n$为它的优级数。根据维尔斯特拉斯判别法就可断定：幂级数$\sum a_nx^n$在闭区间$[-r,r]$上一致收敛。

对任意的$c\in(-\rho,\rho)$，我们可以选取$r$，$0<r<\rho$，使得

$$c\in(-r,r).$$

因为幂级数$\sum a_nx^n$在$[-r,r](\subset(-\rho,\rho))$一致收敛，所以和函数$f(x)=\sum a_nx^n$在 $c$ 点连续。 □

阿贝尔曾对幂级数作过比较系统的研究。他提出的第一定理断定：幂级数的收敛域是一个区间——这结果我们已经以柯西-阿达玛公式的形式介绍过了。下面是阿贝尔研究幂级数时提出的第二个定理：

**引理2** （阿贝尔第二定理） 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

的收敛半径是$\rho$，并且它在$x=\rho$处（或者在$x=-\rho$处）收敛，则这幂级数在闭区间$[0,\rho]$上（或者在闭区间$[-\rho,0]$上）一致收敛，因而和函数$f(x)=\sum a_nx^n$在$x=\rho$处左连续(或者，在$x=-\rho$处右连续)。

**证明** 把所给的幂级数写成以下形式

$$\sum a_nx^n=\sum a_n\rho^n\left(\frac{x}{\rho}\right)^n,$$

我们注意到：

(1) 对于$x\in[0,\rho]$，函数序列$\left\{\left(\frac{x}{\rho}\right)^n\right\}$单调下降并且一致有界

$$1\geqslant\frac{x}{\rho}\geqslant\left(\frac{x}{\rho}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{x}{\rho}\right)^n\geqslant\cdots;$$

(2) 级数$\sum a_n\rho^n$收敛(可以把这级数看成一致收敛的函数级数)。

根据阿贝尔判别法，可以断定级数

$$\sum a_nx^n=\sum a_n\rho^n\left(\frac{x}{\rho}\right)^n$$

在闭区间$[0,\rho]$一致收敛。据此又可断定：和函数$f(x)=\sum a_nx_n$在$x=\rho$处左连续。 □

综合引理1和引理2的结果，我们得到：

**定理2** 幂级数$\sum a_nx^n$的和函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

在其收敛域的每一点连续，并且在任何包含于收敛域之中的闭区间上可以逐项积分。

**证明** 综合引理1和引理2的结果，可以断定：幂级数$\sum a_nx^n$在任何包含于收敛域之中的闭区间上一致收敛。 □

**引理3** 由幂级数$\sum a_nx^n$逐项求导所得到的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$$

与原幂级数有同样的收敛半径。

**证明** 容易看出，幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n$$

有同样的收敛域。因而它们的收敛半径相同。我们用柯西-阿达玛公式来计算后一幂级数的收敛半径$\rho'$。因为

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\sqrt[n]{n|a_n|} &= \overline{\lim}(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|}) \\ &= \lim\sqrt[n]{n}\cdot\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|},\end{aligned}$$

所以

$$\rho' = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

——这里$\rho$是原幂级数的收敛半径。 □

**注记** 虽然幂级数$\sum a_n x^n$和$\sum na_n x^{n-1}$的收敛半径相同，但是它们的收敛域可以不一样。例如幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

的收敛域是$[-1,1)$。将这级数逐项求导就得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}.$$

而这后一级数的收敛域是$(-1,1)$。

**定理3** 在幂级数$\sum a_n x^n$的收敛域的内部，和函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

具有任意阶的导数，并且它的各阶导数可以通过级数逐项求导来计算。

**证明** 如果幂级数$\sum a_n x^n$的收敛半径是$\rho$，那么幂级数$\sum na_n x^{n-1}$的收敛半径也是$\rho$。对于任意的$c\in(-\rho,\rho)$，可以选

取 $r$，使得

$$0<r<\rho, \qquad c\in(-r,r).$$

因为级数$\sum a_n x^n$和$\sum n a_n x^{n-1}$在$[-r,r]$上一致收敛，所以和函数$f(x)=\sum a_n x^n$在$[-r,r]$连续可微，并且有

$$f'(c)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n c^{n-1}.$$

因为上式对任意 $c\in(-\rho,\rho)$ 成立，所以我们有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \forall x\in(-\rho,\rho).$$

关于一阶导数，我们已证明了定理的论断。在此基础上，利用数学归纳法，很容易证明关于任意阶导数的论断。 □

**例 4** 对显然的展式

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1),$$

逐项从 0 到 $x$ 积分就得到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (|x|<1).$$

**例 5** 对显然的展式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1),$$

逐项从 0 到 $x$ 积分就得到

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1).$$

**例 6** 对显然的展式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n} \quad (|x|<1),$$

逐项求导就得到

$$\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} \quad (|x|<1).$$

### 4.c 初等函数的幂级数展开

在第八章中，我们已经介绍了以下这些基本初等函数的泰勒-马克劳林级数展开式：

(1) $e^{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n!} \quad (x\in\mathbf{R}),$

(2) $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x\in\mathbf{R}),$

(3) $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x\in\mathbf{R}),$

(4) $\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1),$

(5) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} \quad (|x|<1),$

(6) $(1+x)^{a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}x^{n} \quad (|x|<1).$

这里还须作一些补充说明．首先，我们指出，(4)，(5)和(6)中的幂级数的收敛半径都等于 1．这是因为：对这三个级数都有

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1.$$

其次，我们来考察这三个幂级数在 $x=\pm1$ 处的敛散性。(4)中的级数在 $x=\pm1$ 处成为交错级数，由莱布尼兹判别法可知其收敛性。(5) 中的级数在 $x=+1$ 处是收敛的交错级数，在 $x=-1$ 处是发散的调和级数。(6)中的级数在 $x=\pm1$ 处的敛散状况比较复杂，我们先将结果列表陈述如下。细节的讨论放在本节后的附录之中。

二项式展式 $(1+x)^a=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}x^n$ 的收敛域

| 指　数 | 收敛域 |
| --- | --- |
| $a\leqslant-1$ | $(-1,1)$ |
| $-1<a<0$ | $(-1,1]$ |
| $a>0$ | $[-1,1]$ |

根据上面讨论的结果，利用阿贝尔第二定理，可以把展式(4)，(5)和(6)的适用范围拓广到整个收敛域上。这样，我们得到：

$$(\tilde{4})\quad \operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\qquad -1\leqslant x\leqslant1;$$

$$(\tilde{5})\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\qquad -1<x\leqslant1;$$

$$(\tilde{6})\quad (1+x)^a=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}x^n,$$

$$\begin{cases}-1<x<1, & \text{如果 } a\leqslant-1,\\ -1<x\leqslant1, & \text{如果 } -1<a<0,\\ -1\leqslant x\leqslant1, & \text{如果 } a>0.\end{cases}$$

## 附录 二项式级数在收敛区间端点的敛散状况

我们分几种情形考察二项式级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

在 $x=\pm 1$ 处的敛散状况。

情形1 $\alpha\leqslant -1$。这时

$$\left|\binom{\alpha}{n}(\pm 1)^n\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|$$

$$\geqslant\frac{1\times 2\times\cdots\times n}{n!}=1,$$

所以级数 $\sum\binom{\alpha}{n}x^n$ 在 $x=\pm 1$ 处发散。

情形2 $-1<\alpha<0$, $x=-1$。对这情形

$$\binom{\alpha}{n}(-1)^n=\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{|\alpha|}{n}\left(\frac{|\alpha|+1}{1}\right)\cdots\left(\frac{|\alpha|+n-1}{n-1}\right)\geqslant\frac{|\alpha|}{n},$$

因而级数 $\sum\binom{\alpha}{n}x^n$ 在 $x=-1$ 处发散。

情形3 $-1<\alpha<0$, $x=1$。对这情形，级数

$$\sum\binom{\alpha}{n}=\sum\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

的各项正负交错。因为

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|$$

$$\geqslant \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right| \cdot \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$$

$$= \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|,$$

并且

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \left|\left(1-\frac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)\right| \to 0$$

（容易看出这是一个发散于 0 的无穷乘积），所以，用莱布尼兹判别法就可以断定级数$\sum\binom{\alpha}{n}$收敛。

情形4　$\alpha>0$。这时

$$n\left(\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}-1\right) = n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)$$

$$= \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1+\alpha.$$

根据拉阿贝判别法就可以断定：级数

$$\sum\binom{\alpha}{n}(\pm 1)^n$$

绝对收敛。

## §5　用多项式逼近连续函数

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义。如果存在多项式序列 $\{p_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，那么我们就说函数

$f(x)$在这闭区间上可以用多项式一致逼近。

容易看出，函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可以用多项式序列一致逼近的充分必要条件是：对任意的$\varepsilon>0$，存在多项式$p(x)$，使得

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon, \qquad \forall x\in[a,b].$$

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可以展开为一致收敛的幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(x-x_0)^k,$$

那么这函数当然就可以用多项式一致逼近。但这只是多项式逼近的一种很特殊的情形。一个函数要能展成幂级数，它至少要能微分无穷多次，而且还要满足更强的条件。如果不限于幂级数展开，允许用更一般的多项式序列来逼近，那么就能得出很普遍的结论。维尔斯特拉斯最先证明了：在闭区间$[a,b]$连续的任何函数$f(x)$都能够用多项式一致逼近。这一逼近定理后来有了许多种很精采的证明方法。我们这里将要介绍的证明是勒贝格(Lebesgue)提出的。在本节后面的附录里和第二十一章中，还将介绍一些其他的证明方法。

在上一节里，我们介绍了二项式级数

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

下面设$\alpha>0$。对于$x\in[-1,1]$有

$$\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|\leqslant\left|\binom{\alpha}{n}\right|.$$

容易求得

$$\lim n\cdot\left(\frac{\left|\binom{a}{n}\right|}{\left|\binom{a}{n+1}\right|}-1\right)=\lim n\cdot\left(\frac{n+1}{n-a}-1\right)$$

$$=\lim\frac{n(1+a)}{n-a}=1+a>1.$$

根据拉阿贝判别法就可断定级数$\sum\left|\binom{a}{n}\right|$收敛。由此得知，对于$a>0$的情形，幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}x^n$$

在闭区间$[-1,1]$一致收敛于和函数

$$(1+x)^a.$$

由此得知，在闭区间$[0,2]$上，函数$\sqrt{x}$可以展开成一致收敛的幂级数：

$$\sqrt{x}=(1+(x-1))^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^n.$$

这样，我们证明了：

**引理1** 连续函数$\varphi(x)=\sqrt{x}$在闭区间$[0,1]$上可以用多项式一致逼近。

**注记** 在闭区间$[0,1]$上一致逼近连续函数$\varphi(x)=\sqrt{x}$的多项式序列也可按以下迭代程序作出：首先置$u_0(x)=0$，然后归纳定义

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\frac{1}{2}(x-u_n^2(x)).$$

容易验证

$$\sqrt{x}-u_{n+1}(x)=(\sqrt{x}-u_n(x))\left(1-\frac{\sqrt{x}+u_n(x)}{2}\right).$$

据此，用归纳法就可证明

$$0\leqslant\sqrt{x}-u_n(x)\leqslant\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n,$$

$$\forall x\in[0,1],\quad n\in\mathbf{N}.$$

又因为

$$1=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}\geqslant(n+1)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n\frac{\sqrt{x}}{2},$$

所以有

$$0\leqslant\sqrt{x}-u_n(x)\leqslant\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n\leqslant\frac{2}{n+1},$$

$$\forall x\in[0,1],\quad n\in\mathbf{N}.$$

这证明了函数序列$\{u_n(x)\}$在闭区间$[0,1]$上一致收敛于$\sqrt{x}$。另外，根据函数序列$\{u_n(x)\}$的构造方式，用归纳法可以证明，它的每一项$u_n(x)$都是多项式。

**引理2** 在任意闭区间$[-c,c]$上，连续函数$\psi(x)=|x|$可以用多项式一致逼近。

**证明** 设多项式序列$\{p_n(x)\}$在闭区间$[0,1]$上一致收敛于函数$\varphi(x)=\sqrt{x}$。我们记

$$q_n(x)=cp_n\left(\frac{x^2}{c^2}\right),\qquad n=1,2,\cdots.$$

于是函数序列$\{q_n(x)\}$在闭区间$[-c,c]$上一致收敛于

$$c\varphi\left(\frac{x^2}{c^2}\right)=c\cdot\sqrt{\frac{x^2}{c^2}}=|x|.\qquad\square$$

我们来考察连续函数

$$\lambda(x)=\frac{|x|+x}{2}=\begin{cases}0, & 对于\ x\leqslant 0,\\ x, & 对于\ x>0.\end{cases}$$

引理 2 的一个直接推论是：

**引理3** 在任意闭区间$[-c,c]$上，连续函数

$$\lambda(x)=\frac{1}{2}(|x|+x)$$

可以用多项式一致逼近。

上面定义的 $\lambda(x)$是最简单、最基本的折线函数。任意的折线函数都可通过它来表示。

**引理4** 定义于闭区间$[a,b]$上的任何折线函数 $\Lambda(x)$都可以表示为

$$\Lambda(x)=c+c_0\lambda(x-x_0)+\cdots+c_m\lambda(x-x_m).$$

因而定义于闭区间上的任何折线函数都能用多项式一致逼近。

**证明** 设折线函数 $\Lambda(x)$的转折点为

$$x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},$$

这里

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m<x_{m+1}=b.$$

为了叙述方便，我们把区间的两端点 $a=x_0$ 和 $b=x_{m+1}$ 也都看作转折点。对于任意一组实数 $c,c_0,\cdots,c_m$，显然

$$c+c_0\lambda(x-x_0)+\cdots+c_m\lambda(x-x_m)$$

也是以 $x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}$ 为转折点的折线函数。我们知道，任何折线函数由它在转折点处的函数值完全确定。为了使

$$c+c_0\lambda(x-x_0)+\cdots+c_m\lambda(x-x_m)=\Lambda(x),$$
$$\forall x\in[a,b],$$

只须取 $c,c_0,\cdots,c_m$ 满足以下条件

$$c+\sum_{i=0}^{m}c_i\lambda(x_k-x_i)=\Lambda(x_k),$$

$$k=0,1,\cdots,m+1,$$

也就是

$$\begin{cases} c=\Lambda(x_0), \\ c+c_0(x_1-x_0)=\Lambda(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c+c_0(x_m-x_0)+\cdots \\ \qquad +\cdots+c_{m-1}(x_m-x_{m-1})=\Lambda(x_m), \\ c+c_0(x_{m+1}-x_0)+\cdots \\ \qquad +\cdots+c_m(x_{m+1}-x_m)=\Lambda(x_{m+1}). \end{cases}$$

由上面的方程组可唯一地决定系数 $c,c_0,\cdots,c_m$。这样，引理的结论得到了证明。 □

因为任何连续函数都能用折线函数一致逼近，所以从以上的讨论已能得到维尔斯特拉斯逼近定理的一个证明。

**定理1**（维尔斯特拉斯） 闭区间$[a,b]$上的任何连续函数$f(x)$都可以用多项式一致逼近。

**证明** 根据上面的讨论，只须证明$f(x)$可以用折线函数来一致逼近。

由于函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$的一致连续性，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要

$$x',x''\in[a,b],\ |x'-x''|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

我们用分点把闭区间$[a,b]$分成$m+1$段：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m<x_{m+1}=b,$$

使得

$$x_{k+1} - x_k < \delta, \quad k = 0, 1, \cdots, m.$$

然后定义折线函数 $\Lambda(x)$ 如下：

$$\Lambda(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k),$$

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \cdots, m.$$

下面证明

$$|f(x) - \Lambda(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

为此，我们记

$$\alpha(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, \quad \beta(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

在闭区间$[x_k, x_{k+1}]$上，显然有

$$\alpha(x) \geqslant 0, \beta(x) \geqslant 0, \alpha(x) + \beta(x) = 1,$$

$$\Lambda(x) = \alpha(x) f(x_k) + \beta(x) f(x_{k+1}),$$

$$f(x) = \alpha(x) f(x) + \beta(x) f(x).$$

于是，在$[x_k, x_{k+1}]$上就有

$$\begin{aligned} &|f(x) - \Lambda(x)| \\ &\quad \leqslant \alpha(x)|f(x) - f(x_k)| + \beta(x)|f(x) - f(x_{k+1})| \\ &\quad < \varepsilon. \end{aligned}$$

因为$[x_k, x_{k+1}]$可以是$[a, b]$所分成的任何一段，所以我们已经证明了

$$|f(x) - \Lambda(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]. \qquad \square$$

## 附录 I　维尔斯特拉斯逼近定理的伯恩斯坦证明

因为任何闭区间$[a, b]$都可以通过变换

$$x=\frac{t-a}{b-a}$$

变成闭区间[0,1]，所以原则上只须对闭区间[0,1]的情形写出维尔斯特拉斯逼近定理的证明。对于在闭区间[0,1]连续的函数$f$，伯恩斯坦(Bernstein)构造出这样一个多项式序列：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

$$n=1,2,\cdots.$$

利用这多项式序列，伯恩斯坦作出维尔斯特拉斯逼近定理的一种十分简洁的证明。下面我们就来介绍他的证明。

**引理5** 我们有以下这些恒等式：

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$,

(2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x$,

(3) $\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}+x^2$,

(4) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}$.

**证明** 这些恒等式都可以用很初等的办法推导。但我们宁愿借助于微分法把证明写得简短一些。

首先写出恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(p+q)^n. \tag{5.1}$$

在这式中命$p=x$，$q=1-x$，就得到了(1)。

为了证明(2)，我们对(5.1)式两边作运算$p\frac{\partial}{\partial p}$（即先对$p$求导，然后再乘以$p$），这样得到

(5.2) $$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=np(p+q)^{n-1}.$$

在(5.2)式中命$p=x$，$q=1-x$，就得到了(2)。

对于$n\geqslant 2$的情形，我们再以$p\frac{\partial}{\partial p}$作用于(5.2)式两边，这样得到

(5.3) $$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=np(p+q)^{n-1}+n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}.$$

以$p=x$，$q=1-x$代入这式就得到

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}+x^2.$$

——容易看出，这式对于$n=1$也成立。我们完成了对恒等式(3)的证明。

最后，我们指出，恒等式(4)是恒等式(1)，(2)和(3)的直接推论。 □

**引理6** 对于$\delta>0$，我们有

$$\sum'\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2},$$

这里的$\sum'$表示对满足以下条件的那些$k$求和：

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta,\quad k\in\{0,1,\cdots,n\}.$$

**证明** 我们有

$$\sum{}'\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant \sum{}' \frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{\delta^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

——上面推导的最后一步，用到了显然的不等式

$$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}. \qquad \square$$

设函数 $f$ 在闭区间$[0,1]$连续。我们把以下序列中的多项式叫做 $f$ 的伯恩斯坦多项式：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

$$n=1,2,\cdots.$$

伯恩斯坦证明了：

**定理1′** 设函数 $f$ 在闭区间$[0,1]$连续，则多项式序列$\{B_n(f,x)\}$在这闭区间上一致收敛于 $f(x)$。

**证明** 函数 $f$ 在闭区间$[0,1]$连续，因而存在$M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M, \qquad \forall x\in[0,1];$$

并且对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x',x''\in[0,1], \quad |x'-x''|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于引理 5 的 (1)，我们可以写

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

我们约定以$\sum'$表示对满足以下条件的 $k$ 求和：

$$\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta, \quad k \in\{0,1, \cdots, n\} ;$$

并约定以$\sum''$表示对其余的 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$求和。于是有

$$\begin{aligned}
& \left|B_n(f, x)-f(x)\right| \\
& \leqslant \sum_{k=0}^n\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
& =\sum{}'\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
& \quad+\sum{}''\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
& \leqslant 2 M \sum{}'\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
& \quad+\varepsilon \sum{}''\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
& \leqslant \frac{M}{2 n \delta^2}+\varepsilon .
\end{aligned}$$

只要 $n$ 充分大，就可使得

$$\frac{M}{2 n \delta^2}+\varepsilon<2 \varepsilon . \qquad \square$$

读者或许要发问：伯恩斯坦是怎样想出如此巧妙的多项式序列的？这问题不容易用三两句话解释清楚。实际上，伯恩斯坦的

证明是从概率论的一些思想诱导出来的。在托德（J. Todd）写的小册子《函数构造论导引》（Introduction to the Constructive Theory of Functions）的第二章中，对这问题有较详细的说明。

## 附录 II　斯通-维尔斯特拉斯定理

斯通（Stone）研究更广泛的函数逼近问题，他把维尔斯特拉斯逼近定理推广为非常普遍的形式。在这附录里，我们就来介绍斯通-维尔斯特拉斯逼近定理

设$K$是距离空间中的一个紧致集。考察这样的连续函数：

$$f: K\to \mathbb{R}.$$

我们约定把由所有这样的连续函数组成的集合记为$\mathscr{C}(K)$。

对于$f,g\in\mathscr{C}(K)$和$\lambda\in\mathbb{R}$，我们定义函数$f+g$和$\lambda f$如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad x\in K,$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\qquad x\in K.$$

容易验证：对于这样定义的加法和数乘运算，$\mathscr{C}(K)$成为一个线性空间。不仅如此，对于$f,g\in\mathscr{C}(K)$，还可以定义这两函数的乘积$f\cdot g$如下：

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x),\qquad x\in K.$$

这样定义的乘法运算满足以下关系：

$$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h),$$

$$(f_1+f_2)\cdot g=f_1\cdot g+f_2\cdot g,$$

$$f\cdot(g_1+g_2)=f\cdot g_1+f\cdot g_2,$$

$$(\lambda f)\cdot g=f\cdot(\lambda g)=\lambda(f\cdot g)$$

$$(f,f_1,f_2,g,g_1,g_2,h\in\mathscr{C}(K),\qquad \lambda\in\mathbb{R}).$$

我们还注意到，在$K$上恒等于1的函数

$$u(x)=1,\qquad x\in K,$$

起着乘法单位元的作用

$$u \cdot f = f \cdot u = f, \qquad \forall f \in \mathscr{C}(K).$$

以下，我们就把这恒等于1的函数$u(x)$简单地记为1。

一个线性空间，如果它的任意两个元素之间定义了乘法运算，并且这乘法运算是结合的和双线性的(对相乘的每一个因子都是线性的)，那么我们就把这线性空间叫做一个代数。如果乘法还具有单位元，那么我们就说这是一个有单位元的代数。于是，$\mathscr{C}(K)$是一个有单位元的代数。

设$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的一个子集合，满足这样的条件：

$$f, g \in \mathscr{A} \Rightarrow f + g \in \mathscr{A},\ f \cdot g \in \mathscr{A},$$

$$f \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f \in \mathscr{A},$$

那么我们就说$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的一个子代数。容易看出，按照原来在$\mathscr{C}(K)$中定义的运算，$\mathscr{A}$仍是一个代数。如果$1 \in \mathscr{A}$，那么$\mathscr{A}$还是一个有单位元的代数。

紧致集$K$上的任何连续函数都是有界的。在$\mathscr{C}(K)$上可以引入范数

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

和距离

$$D(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

于是，$(\mathscr{C}(K), D)$成为一个距离空间。请注意：空间$\mathscr{C}(K)$中的每一个"点"都是定义于$K$上的一个连续函数；而"点列"$\{f_n\} \subset \mathscr{C}(K)$按距离$D$的收敛性，正是函数序列在$K$上的一致收敛性。——请读者对这一情形陈述一致收敛的定义，并验证一致收敛性等价于按距离$D$的收敛性。

设$\mathscr{E} \subset \mathscr{C}(K)$。我们用记号$\overline{\mathscr{E}}$表示集合$\mathscr{E}$在$\mathscr{C}(K)$中按距离$D$决定的闭包。显然$f \in \overline{\mathscr{E}}$的充分必要条件是：$f$能被$\mathscr{E}$中的函数一致逼近。我们把$\overline{\mathscr{E}}$叫做$\mathscr{E}$的一致闭包。

**例1** 对于$K = [a, b]$的情形，$\mathscr{C}(K) = \mathscr{C}([a, b])$由所有

的在$[a,b]$连续的函数组成．如果用$\mathscr{P}$表示定义于$[a,b]$上的多项式函数的集合，那么显然有

$$\mathscr{P}\subset\mathscr{C}([a,b]).$$

一个函数$f\in\mathscr{C}([a,b])$能用多项式一致逼近，其充分必要条件是$f\in\overline{\mathscr{P}}$．于是，维尔斯特拉斯逼近定理可以表述为

$$\overline{\mathscr{P}}=\mathscr{C}([a,b]).$$

以下，我们仍用$K$表示距离空间中的一个紧致集．

**引理 7**　如果$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的一个子代数，那么$\overline{\mathscr{A}}$也是$\mathscr{C}(K)$的子代数．

**证明**　设$\lambda\in\mathbb{R}$，$f,g\in\overline{\mathscr{A}}$．则存在$\{f_n\}\subset\mathscr{A}$和$\{g_n\}\subset\mathscr{A}$，使得

$$f_n\underset{K}{\rightrightarrows}f,\qquad g_n\underset{K}{\rightrightarrows}g.$$

于是，显然有

$$\lambda f_n\underset{K}{\rightrightarrows}\lambda f,\qquad f_n+g_n\underset{K}{\rightrightarrows}f+g,$$

$$f_n\cdot g_n\underset{K}{\rightrightarrows}f\cdot g.$$

因而

$$\lambda f\in\overline{\mathscr{A}},\qquad f+g\in\overline{\mathscr{A}},\qquad f\cdot g\in\overline{\mathscr{A}}.$$

这样，我们证明了$\overline{\mathscr{A}}$是$\mathscr{C}(K)$的子代数．　□

**引理 8**　设$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的一个子代数，$1\in\mathscr{A}$，则有

$$f\in\mathscr{A}\Rightarrow|f|\in\overline{\mathscr{A}}.$$

因为$\overline{\mathscr{A}}$也是$\mathscr{C}(K)$的子代数，并且$1\in\overline{\mathscr{A}}$，所以更一般地有

$$g\in\overline{\mathscr{A}}\Rightarrow|g|\in\overline{\mathscr{A}}.$$

**证明**　紧致集$K$上的任何连续函数必定有界．对于$f\in\mathscr{A}\subset\mathscr{C}(K)$，存在$c>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant c,\qquad \forall x\in K.$$

根据引理 2，在闭区间$[-c,c]$上，函数$\psi(t)=|t|$可以用多项式序列$\{p_n(t)\}$一致逼近。显然有

$$p_n(f(x))\underset{K}{\rightrightarrows}|f(x)|.$$

因为$\mathscr{A}$是一个含有单位元 1 的代数，所以

$$p_n(f)\in\mathscr{A},\qquad n=1,2,\cdots.$$

我们证明了：$|f|$是$\mathscr{A}$中序列$\{p_n(f)\}$的(一致)极限，即$|f|\in\overline{\mathscr{A}}$。

应用上面证明的结果于子代数$\mathscr{B}=\overline{\mathscr{A}}$，并注意到$\overline{\mathscr{B}}=\mathscr{B}=\overline{\mathscr{A}}$，我们可以断定：

$$g\in\overline{\mathscr{A}}\Rightarrow|g|\in\overline{\mathscr{A}}.\qquad\square$$

对于$f,g\in\mathscr{C}(K)$，我们定义两个函数$\max(f,g)$和$\min(f,g)$如下：

$$\max(f,g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},$$
$$\min(f,g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

容易验证：

$$\max(f,g)=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f,g)=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}.$$

更一般地，对于$f_1,\cdots,f_m\in\mathscr{C}(K)$，我们定义

$$\max(f_1,\cdots,f_m)(x)=\max\{f_1(x),\cdots,f_m(x)\},$$
$$\min(f_1,\cdots,f_m)(x)=\min\{f_1(x),\cdots,f_m(x)\}.$$

对于$m>2$的情形，显然有以下关系：

$$\max(f_1,\cdots,f_m)$$
$$=\max(\max(f_1,\cdots,f_{m-1}),f_m),$$
$$\min(f_1,\cdots,f_m)$$

$$=\min(\min(f_1,\cdots,f_{m-1}),f_m).$$

利用引理 7 和引理 8 可得：

**引理 9** 设$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的子代数，$1\in\mathscr{A}$。则对任何$f,g\in\overline{\mathscr{A}}$，都有

$$\max(f,g)\in\overline{\mathscr{A}},\qquad \min(f,g)\in\overline{\mathscr{A}}.$$

更一般的，对任何$f_1,\cdots,f_m\in\overline{\mathscr{A}}$都有

$$\max(f_1,\cdots,f_m)\in\overline{\mathscr{A}},$$
$$\min(f_1,\cdots,f_m)\in\overline{\mathscr{A}}.$$

设$\mathscr{E}\subset\mathscr{C}(K)$。如果对$K$中任意两个不同的点$x$和$y$，都存在$\psi\in\mathscr{E}$，使得

$$\psi(x)\neq\psi(y),$$

那么我们就说$\mathscr{E}$能区分$K$中的点。

**例 2** 设$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$。我们把$\varphi\in\mathscr{C}(K)$叫做奇函数，如果它满足条件

$$\varphi(-x,-y)=-\varphi(x,y),\qquad \forall\ (x,y)\in K.$$

类似地，我们把$\psi\in\mathscr{C}(K)$叫做偶函数，如果它满足条件

$$\psi(-x,-y)=\psi(x,y),\quad \forall\ (x,y)\in K.$$

如果分别用$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$表示$\mathscr{C}(K)$中的全体奇函数的集合和全体偶函数的集合，那么$\mathscr{E}_1$能区分$K$中的点而$\mathscr{E}_2$不能。事实上，$\mathscr{E}_1$中的两个函数

$$f(x,y)=x\ \text{和}\ g(x,y)=y$$

已足以区分$K$中任意两点；而$\mathscr{E}_2$中的任何函数都不能区分$K$中如下两个点：

$$(1,0)\ \text{和}\ (-1,0).$$

**引理10** 设$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的子代数，$1\in\mathscr{A}$。如果$\mathscr{A}$能区分$K$中的点，那么对任意$a,b\in K$，$a\neq b$和$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，存在$\varphi\in\mathscr{A}$，满足条件：

$$\varphi(a)=\alpha,\qquad \varphi(b)=\beta.$$

**证明** 因为$\mathscr{A}$能区分$K$中的点，所以存在$\psi\in\mathscr{A}$，使得

$$\psi(a)\neq\psi(b).$$

我们定义

$$\varphi(x)=\alpha+\frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}(\beta-\alpha).$$

显然$\varphi\in\mathscr{A}$，并且

$$\varphi(a)=\alpha,\qquad \varphi(b)=\beta.\qquad \square$$

在做了以上这些准备工作之后，我们来证明重要的斯通-维尔斯特拉斯定理：

**定理 2** 设$K$是距离空间中的紧致集，$\mathscr{A}$是$\mathscr{C}(K)$的一个包含有单位元1的子代数．如果$\mathscr{A}$能区分$K$中的点，那么

$$\overline{\mathscr{A}}=\mathscr{C}(K).$$

——这就是说，$\mathscr{C}(K)$中的任何函数，都能用$\mathscr{A}$中的函数一致逼近。

**证明** 因为$\overline{\mathscr{A}}$是$\mathscr{C}(K)$中的闭集，所以只须证明：对任意$f\in\mathscr{C}(K)$和$\varepsilon>0$，存在$\varphi\in\overline{\mathscr{A}}$，使得

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon,\qquad \forall x\in K.$$

首先，根据引理10，对任意的$a,b\in K$，存在$\varphi_{ab}\in\mathscr{A}$，使得

$$\varphi_{ab}(a)=f(a),\qquad \varphi_{ab}(b)=f(b).$$

（对于$a=b$的情形，可取$\varphi_{aa}=f(a)\cdot 1$——这里的"1"表示在$K$上恒等于1的函数，即$\mathscr{C}(K)$中的单位元1。）

因为$\varphi_{ab}(b)-f(b)=0$，所以存在$b$点的邻域$V_b$，使得

$$\varphi_{ab}(x)-f(x)>-\varepsilon,\qquad \forall x\in V_b\cap K,$$

也就是

$$\varphi_{ab}(x)>f(x)-\varepsilon,\qquad \forall x\in V_b\cap K.$$

暂时让$a$点固定，取$b$为$K$中的任意点。所有这样的$V_b$覆盖了$K$。因而存在有限个这样的邻域

$$V_{b_1},\cdots,V_{b_n},$$

使得

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{n}V_{b_j}.$$

我们记

$$\varphi_a=\max(\varphi_{ab_1},\cdots,\varphi_{ab_n}).$$

根据引理 9，$\varphi_a\in\mathscr{A}$。容易验证：

$$\varphi_a(x)>f(x)-\varepsilon,\qquad\forall x\in K,$$

$$\varphi_a(a)=f(a).$$

与上面的讨论类似，我们断定存在 $a$ 点的邻域 $U_a$，使得

$$\varphi_a(x)<f(x)+\varepsilon,\qquad\forall x\in U_a\cap K.$$

让 $a$ 点取遍 $K$，所有这样的 $U_a$ 覆盖了 $K$，因而存在其中有限个

$$U_{a_1},\cdots,U_{a_m}$$

使得

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{a_i}.$$

我们记

$$\varphi=\min(\varphi_{a_1},\cdots,\varphi_{a_m}).$$

显然 $\varphi\in\overline{\mathscr{A}}$，并且满足条件

$$f(x)-\varepsilon<\varphi(x)<f(x)+\varepsilon,\qquad\forall x\in K,$$

也就是

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon,\qquad\forall x\in K.\qquad\square$$

下面是应用斯通-维尔斯特拉斯定理的一些例子。

例 3　设 $K=B^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭单位球体，$\mathscr{P}$ 是定义于 $K=B^n$ 上的 $n$ 元多项式函数的集合。显然 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{C}(K)$ 的子代数，$1\in\mathscr{P}$。下面，我们来说明 $\mathscr{P}$ 能区分 $K=B^n$ 中的点。设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和

$b=(b_1,\cdots,b_n)$是 $B^n$ 中的两个不相同的点，则 $a$ 和 $b$ 至少有一个坐标不相同，例如说

$$a_k \neq b_k.$$

设 $\psi_k$ 是第 $k$ 个坐标函数：

$$\psi_k(x)=x_k,\ 对于x=(x_1,\cdots,x_n).$$

则显然有

$$\psi_k \in \mathscr{P},\quad \psi_k(a)\neq\psi_k(b).$$

根据斯通-维尔斯特拉斯定理，就可以断定：$B^n$ 上的任何连续函数，都能用 $n$ 元多项式一致逼近。

**例 4** 设 $f(t)$是定义于 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $2\pi$ 的连续函数。如果把 $t$ 看成幅角，那么

$$t+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z},$$

决定了单位圆周上的一个点，反之亦然（图19-7）。周期为 $2\pi$ 的连续函数 $f$，可以看成是定义在单位圆周 $S$ 上的连续函数，即可以认为 $f\in\mathscr{C}(S)$。

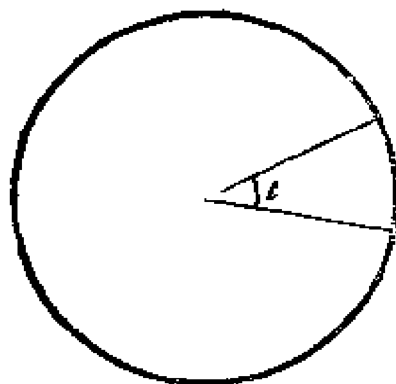


图 19-7

考察以下这些周期为 $2\pi$ 的连续函数：

$$1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,$$
$$\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots.$$

我们把这些函数中任意有限个的实系数线性组合叫做三角多项式，并把全体三角多项式的集合记为$\mathscr{T}$.显然$\mathscr{T}$是$\mathscr{C}(S)$中包含有单位元的子代数。另外，$\mathscr{T}$中的两个函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 已足以区分单位圆周 $S$ 上的任意两个不同的点。根据斯通-维尔斯特拉斯定理，我们断定：任何周期为 $2\pi$ 的连续函数，都可以用三角多项式一致逼近。——这一结果又被称为维尔斯特拉斯第二逼近定理。

**例5** 例 4 中的结果还可以推广到任意周期的情形。考察以

下这些周期为 $2l$ 的函数：

$$1, \cos\frac{\pi t}{l},\ \sin\frac{\pi t}{l},\ \cos\frac{2\pi t}{l},$$

$$\sin\frac{2\pi t}{l},\ \cdots, \cos\frac{n\pi t}{l}, \sin\frac{n\pi t}{l},\ \cdots.$$

我们把这些函数中任意有限项的实系数线性组合叫做周期为$2l$的三角多项式．任何周期为 $2l$ 的连续函数都可以用同一周期的三角多项式一致逼近．

## §6 微分方程解的存在定理

在代数方程的研究中，一个基本的存在定理起了最重要的作用．这定理断定：在复数域中，任何非常数的多项式至少有一个根．对微分方程的研究来说，也有类似的情形．虽然许多微分方程不能用初等方法求解，但这并不意味着这些方程的解不存在．微分方程解的存在定理指出，在相当普遍的条件下，微分方程的解一定存在．本节就来介绍这一重要定理．

我们这里只限于讨论如下形状的一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{6.1}$$

方程（6.1）的解一般说来含有一个任意常数．为了从一般解中确定一个单独的解，需要给方程（6.1)附加一个初始条件

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.2}$$

通常将微分方程（6.1)连同初始条件(6.2）一起加以考虑，讨论以下问题是否有解：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0.\end{cases}$$

人们把这样的问题叫做柯西问题。在下面的讨论中，要求函数 $f(t,x)$ 满足条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant\lambda|x_1-x_2|,$$

这里的 $\lambda$ 是一个常数。人们把这样的条件叫做李普希茨条件。

下面，我们陈述并证明本节的主要定理。

**定理**（柯西） 设函数 $f(t,x)$ 在矩形 $[t_0-a,t_0+a]\times[x_0-b,x_0+b]$ 连续，并且满足李普希茨条件

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant\lambda|x_1-x_2|, \tag{6.3}$$

$$\forall t\in[t_0-a,t_0+a],\quad x_1,x_2\in[x_0-b,x_0+b],$$

则存在 $h$，$0<h<a$，使得在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上，柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases} \tag{6.4}$$

有一个解并且只有一个解。

**证明** 首先，我们指出，求问题（6.4）的连续可微解，等价于求以下积分方程的连续解：

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x)dt. \tag{6.5}$$

事实上，如果连续可微函数 $x=x(t)$ 使得（6.4）中的方程成为恒等式

$$\frac{dx(t)}{dt}\equiv f(t,x(t)).$$

将这恒等式两边从 $t_0$ 到 $t$ 积分，并利用（6.4）中的初始条件 $x(t_0)=x_0$，就得到

$$(6.6) \qquad x(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t.$$

反过来，如果连续函数 $x = x(t)$ 使得（6.5）成为恒等式，那么从（6.6）右端的表示式就可看出：$x(t)$ 实际上是连续可微函数。将（6.6）两边对 $t$ 微分就得到

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv f(t, x(t)).$$

并且从（6.6）还可得到

$$x(t_0) = x_0.$$

这样，问题归结到证明积分方程（6.5）在连续函数类中有一解并且只有一解。

设 $h$ 是一个待定的实数，$0 < h < a$。在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上，我们尝试用迭代法求积分方程（6.5）的连续解 $x = x(t)$。设函数 $x_1(t)$ 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 连续并且满足条件

$$|x_1(t) - x_0| \leqslant b, \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

我们定义

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(t))\mathrm{d}t.$$

显然函数 $x_2(t)$ 也在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 连续。为了能用 $x_2(t)$ 代替 $x_1(t)$ 作迭代：

$$x_3(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_2(t))\mathrm{d}t,$$

须要求

$$|x_2(t) - x_0| \leqslant b, \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

在紧致集 $[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ 上，连续函数 $|f(t, x)|$ 有上界。设 $M > 0$ 是这连续函数的一个上界，则有

$$|x_2(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(t, x_1(t))\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant M|t-t_0|$$
$$\leqslant Mh, \quad \forall t\in[t_0-h, t_0+h].$$

因此，为了使

$$|x_2(t)-x_0|\leqslant b, \quad \forall t\in[t_0-h, t_0+h],$$

只须取 $h$ 满足：

$$0<h\leqslant\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

在这条件下，上面所说的迭代手续可以一次又一次地继续下去，产生一个函数序列$\{x_n(t)\}$：

$$(6.7) \qquad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_n(t))\mathrm{d}t,$$
$$n=1,2,\cdots.$$

如果能证明迭代序列$\{x_n(t)\}$在区间

$$[t_0-h, t_0+h]$$

一致收敛于某个函数 $x(t)$，那么在（6.7）式中取极限就得到

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x(t))\mathrm{d}t.$$

极限函数 $x(t)$ 是积分方程（6.5）的连续解，因而也就是柯西问题（6.4）的连续可微解。

剩下的工作是证明迭代序列（6.7）一致收敛。解决这类问题的一个方便的办法是利用压缩映射原理。为此，需要确定一个完备的距离空间。我们以$X$表示这样一些函数$x(t)$的集合：$x(t)$在$[t_0-h, t_0+h]$连续，并且满足条件

$$|x(t)-x_0|\leqslant b, \quad \forall t\in[t_0-h, t_0+h].$$

在$X$上引入这样的距离

$$d(x,y)=\sup_{|t-t_0|\leqslant h}\{|x(t)-y(t)|\}.$$

容易看出，“函数序列$\{x_n(t)\}$按距离$d$收敛于$x(t)$”意味着这函数序列在区间$[t_0-h,t_0+h]$一致收敛于$x(t)$。根据本章§2的定理2（一致收敛的柯西原理），距离空间$(X,d)$是完备的。

我们定义一个映射

$$\Phi:\ X\to X,$$

这映射把函数$x\in X$变成函数$\Phi x=\xi\in X$，

$$(\Phi x)(t)=\xi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x(t))\mathrm{d}t.$$

对于$\xi=\Phi x$和$\eta=\Phi y$，我们有

$$|\xi(t)-\eta(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(t,x(t))-f(t,y(t)))\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(t,x(t))-f(t,y(t))|\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\lambda\left|\int_{t_0}^{t}|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\lambda h\sup_{|t-t_0|\leqslant h}\{|x(t)-y(t)|\}.$$

由此就可得到

$$d(\xi,\eta)\leqslant\lambda hd(x,y),$$

也就是

$$d(\Phi x,\Phi y)\leqslant\lambda hd(x,y).$$

如果$h$满足条件

$$\lambda h<1,$$

那么$\Phi$就是一个压缩映射。

综上所述，对 $h$ 所加的条件是

$$0<h<\min\left\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{\lambda}\right\}.$$

如果我们事先选择 $h$ 满足这样的条件，并定义$X$，$d$ 和$\Phi$ 如上所述，那么$\Phi$就是完备距离空间（$X$，$d$）上的压缩映射。根据压缩映射原理，映射$\Phi$在$X$中有唯一的不动点 $x$：

$$x=\Phi x.$$

按照定义把上式写出来就是

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x(t))\mathrm{d}t.$$

我们看到：$x(t)$是积分方程（6.5）的唯一的连续解，因而也就是柯西问题（6.4)的唯一连续可微解。 □

**注记** 上面的存在定理是局部性的，它只保证解在 $[t_0-h, t_0+h]$这一区间上存在并且唯一。但如果记

$$t_1=t_0+h,x_1=x(t_0+h),$$

又可考察柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_1)=x_1.\end{cases}$$

这问题的解又在某个区间$[t_1-h,t_1+h]$上存在并且唯一。采取这样的办法，可以一步一步地把解延拓到更大的区间上。——关于解的延拓，当然还需要作更细致的考察。在以后的微分方程课程里有这方面的内容。我们这里就不再深入讨论了。

## §7 两个著名的例子

前面已经谈到，具有“初等表示式”的函数并不太多。为了表示更复杂的函数，就需要突破“初等表示式”的局限，引入进一步的数学工具。一致收敛的函数级数就是这样的工具之一。为了说明用级数表示函数的功效，我们这里介绍两个著名的例子：第一个例子是处处连续但处处不可微的函数；第二个例子是能够填满整个正方形的连续参数曲线。这两个例子多少有些出人意料之外。例子中所涉及的函数都不是用简单的初等式子所能表示的。

### 7.a 处处连续但处处不可微的函数

本段将要介绍的例子对人们弄清楚连续性与可微性的区别起过重要的作用。十九世纪中期以前，几乎所有的数学家都相信，除去某些例外的孤立点，连续函数总是可微的。那时的教科书甚至“证明”了这样的“定理”。直到举出了处处连续但处处不可微的函数的例子，关于连续性与可微性的糊涂认识才得以彻底澄清。最早发表的处处连续但处处不可微的函数的例子是维尔斯特拉斯作出的（发表于1875年）。我们这里将要介绍的是后来(1930年）由范德瓦尔登（Van der Waerden）作出的较简单的例子。

首先，我们用 $u(x)$ 表示 $x$ 到离它最近的整数的距离：

$$u(x)=|x-m|,\quad x\in\left[m-\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\right],\ m\in\mathbb{Z}.$$

函数 $u(x)$ 的图形是锯齿形的（参看图 19-8）。容易看出，函数 $u(x)$ 在整个数轴 $\mathbb{R}$ 上连续，它以 1 为周期，并且满足不等式

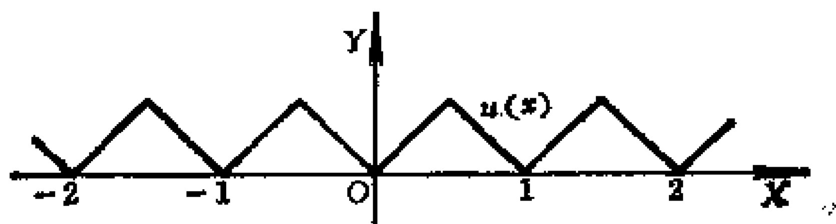



图 19-8

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

在区间$\left[m-\frac{1}{2}, m\right]$上，函数$y=u(x)$的斜率为$-1$；在区间$\left[m, m+\frac{1}{2}\right]$上，函数$y=u(x)$的斜率为$+1$。

利用函数$u$，我们构造一列函数

$$u_k(x)=\frac{u(4^k x)}{4^k}, \qquad k=0,1,2,\cdots.$$

显然函数$u_k(x)$在$\mathbb{R}$上连续，它以$\frac{1}{4^k}$为周期，并且满足不等式

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{2\cdot 4^k}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

在区间$\left[\frac{m}{4^k}-\frac{1}{2\cdot 4^k}, \frac{m}{4^k}\right]$上，函数$y=u_k(x)$的斜率是$-1$；在区间$\left[\frac{m}{4^k}, \frac{m}{4^k}+\frac{m}{2\cdot 4^k}\right]$上，函数$y=u_k(x)$的斜率是$+1$(参看图 19-9)。

考察函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

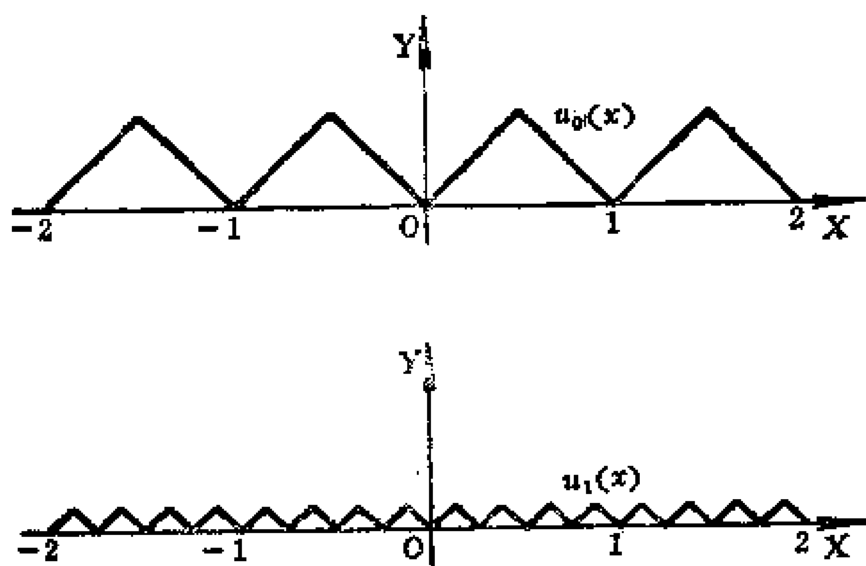



图 19-9

因为上式右端的函数级数具有优级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot 4^k},$$

所以函数 $f(x)$ 在 R 上处处连续。下面，我们来证明函数 $f(x)$ 处处不可微。设 $c$ 是R中任意一点。对任意 $n\in \mathbf{N}$，可以确定 $m_n\in \mathbf{Z}$，使得

$$m_n\leqslant 2\cdot 4^{n-1}\cdot c<m_n+1,$$

也就是

$$\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}}\leqslant c<\frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}}.$$

对任意的 $n\in \mathbf{N}$，在区间

$$I_n=\left[\frac{m_n}{2\cdot 4^{n-1}},\ \frac{m_n+1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$$

之中，存在这样的点 $x_n$，它与点 $c$ 的距离等于区间 $I_n$ 长度的一半，即使得

$$|x_n - c| = \frac{1}{4^n}.$$

考察差商

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k(x_n)-u_k(c)}{x_n - c}.$$

对于 $k \geqslant n$，函数 $u_k$的周期 $\frac{1}{4^k}$能够整除$|x_n - c| = \frac{1}{4^n}$,因而

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(c)}{x_n - c} = 0.$$

对于$k \leqslant n-1$，函数 $u_k(x)$在区间 $I_k \supset I_n$ 上的斜率为$\pm 1$。(按照我们的记号约定，

$$I_k = \left[\frac{m_k}{2\cdot 4^{k-1}}, \frac{m_k+1}{2\cdot 4^{k-1}}\right).$$

当 $m_k$是奇数的时候，函数 $u_k(x)$在$I_k$上的斜率为$-1$。当$m_k$是偶数的时候，函数 $u_k(x)$在 $I_k$上的斜率为$+1$。)于是有

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(c)}{x_n - c} = \pm 1.$$

我们看到

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c} = \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1).$$

上式右端与 $n$ 有同样的奇偶性，因而当 $n \to +\infty$ 时不可能有极限。由此可知：函数 $f$ 在任意一点 $c$ 不可微。 □

### 7.b 填满正方形的连续曲线

以下约定记 $I = [0,1]$。设

$$\varphi: I \to \mathrm{R} \text{ 和 } \psi: I \to \mathrm{R}$$

是连续函数，我们把

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in I$$

叫做连续的参数曲线。上世纪末（1890年），皮亚诺（Peano）首先发现这样一件令人惊异的事实：可以用一条连续的参数曲线填满整个正方形 $I \times I$。后来，人们就把能填满整个正方形的连续曲线叫做皮亚诺曲线。下面将要介绍的一种构造皮亚诺曲线的方法，是索恩伯格（I.J.Schoenberg）在1938年提出的。

在索恩伯格的构造中，利用了实数的 $p$ 进小数展开（$p=2,3$）。我们这里简要地介绍以下事实：对任何实数 $t \in [0,1]$，存在由数字 $0,1,\cdots,p-1$ 组成的数列 $\{t_n\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{p^n} = t.$$

——逐次把区间分成 $p$ 等分，判断 $t$ 落在哪一等分之中，就可确定数列 $\{t_n\}$，利用闭区间套原理就可证明上面的等式。

下面，我们来介绍索恩伯格构造的皮亚诺曲线。

考察正方形 $I \times I$ 中的任意一点 $(a,b)$。我们将 $a$ 和 $b$ 分别用2进小数展开：

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

$$a_n, b_n \in \{0,1\}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

把 $a$ 和 $b$ 的二进小数数字交错排列，我们得到

$$c_1, c_2, \cdots, c_{2n-1}, c_{2n}, \cdots,$$

其中

$$c_{2n-1} = a_n, \quad c_{2n} = b_n, \quad n = 1,2,\cdots.$$

然后，用这些数码做成一个新的数

$$c=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2c_n}{3^n}.$$

显然有

$$0\leqslant c\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=1,$$

因而 $c\in I$。

我们设法构造两个连续函数

$$\varphi,\psi:\ I\to I,$$

希望用这两个函数把 $a$ 和 $b$ 从 $c$ 中"滤"出来。这就是说，希望能定义连续函数 $\varphi$ 和 $\psi$，使得对任何 $(a,b)\in I\times I$ 和按上面办法构造的 $c$，都有

$$\varphi(c)=a,\qquad \psi(c)=b.$$

在 $c$ 的三进小数表示中，各位数字 $2c_1,2c_2,\cdots,2c_n,\cdots$ 都是 0 或者 2。我们首先设法作一个连续函数，要求这函数在 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 取值 0，在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 取值 1。下面的函数 $\omega$ 就满足所说的条件：

$$\omega(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right],\\ 3t-1, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\\ 1, & t\in\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right],\\ -3t+5, & t\in\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right],\\ 0, & t\in\left[\frac{5}{3},2\right].\end{cases}$$

我们将这函数按周期2扩充定义于整个数轴R上(参看图19-10)，

规定

$$\omega(t+2k)=\omega(t),\qquad \forall\, t\in[0,2],\qquad k\in\mathbf{Z}.$$

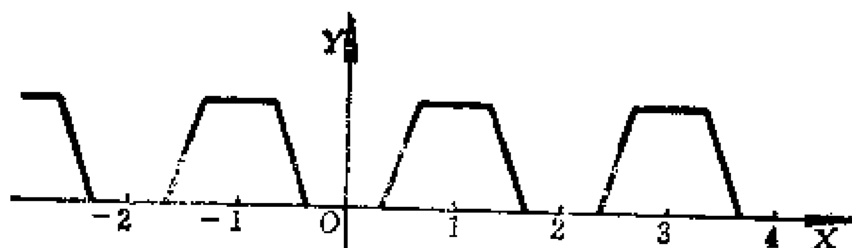



图 19-10

对于

$$c=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{3^n},\qquad c_n\in\{0,1\},\ n=1,2,\cdots,$$

我们写

$$3^kc=2\sum_{n=1}^{k}3^{k-n}c_n+2\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{c_n}{3^{n-k}}=2\sum_{n=1}^{k}3^{k-n}c_n+d_k.$$

下面证明

$$\omega(3^kc)=\omega(d_k)=c_{k+1},\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

分两种情形讨论：

**情形1** $c_{k+1}=0$。对这情形有

$$0\leqslant d_k\leqslant 2\sum_{n=k+2}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-k}}=\frac{1}{3}.$$

因而

$$\omega(3^kc)=\omega(d_k)=0=c_{k+1}.$$

**情形2** $c_{k+1}=1$。对这情形有

$$\frac{2}{3}\leqslant d_k\leqslant 1.$$

因而

$$\omega(3^k c)=\omega(d_k)=1=c_{k+1}.$$

函数 $\omega(3^k t)$作用于 $c$ 就正好"滤出"数字 $c_{k+1}$来。根据这一观察，我们定义

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega(3^{2n-2}t)}{2^n},$$

$$\psi(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega(3^{2n-1}t)}{2^n}.$$

收敛级数$\sum\frac{1}{2^n}$可以作为上两式右端的函数级数的优级数。因而$\varphi(t)$和$\psi(t)$是连续函数。又显然有

$$\varphi(c)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega(3^{2n-2}c)}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{2n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n}=a,$$

$$\psi(c)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega(3^{2n-1}c)}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{2n}}{2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2^n}=b.$$

我们看到，对于 $I\times I$ 中的任意一点$(a,b)$，都存在（按前述方式构造的数）$c\in I$，使得

$$\begin{cases}\varphi(c)=a,\\ \psi(c)=b.\end{cases}$$

这就是说，连续参数曲线

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad t\in I$$

能够填满整个正方形$I\times I$。

# 第二十章　傅里叶级数

## §1　概　　说

设函数 $f(t)$ 在R上有定义。如果存在实数 $T\neq 0$，使得

$$f(t+T)=f(t),\quad \forall t\in \mathbf{R},$$

那么我们就说 $f(t)$ 是一个周期函数，并把 $T$ 叫做 $f(t)$ 的周期。容易看出，如果 $T$ 是函数 $f(t)$ 的一个周期，那么 $kT$ 也是函数 $f(t)$ 的周期，这里 $k$ 是任意非零整数。如果在周期函数 $f(t)$ 的所有的周期当中，存在一个最小的正周期，那么我们就把这最小的正周期叫做函数 $f(t)$ 的最小周期。这里应该指出，并不是任何周期函数都具有最小正周期。例如，常值函数没有最小的正周期，狄里克莱函数也没有最小的正周期。

为了描述周期现象，就需要用到周期函数。各种各样的振动是最常见的周期现象。最简单的振动可以表示为

$$u=a\cos\omega t+b\sin\omega t, \tag{1.1}$$

或者

$$u=A\sin(\omega t+\varphi), \tag{1.1$'$}$$

这里

$$A=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

像 (1.1) 或 (1.1)′ 那样的振动被称为谐振动。$A$ 被称为振幅，$\varphi$ 被称为初相，$\omega$ 被称为圆频率。容易看出，振动 (1.1) 或 (1.1)′

的最小周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

在对振动现象的研究中，以下事实的发现具有特别重要的意义：一般说来，任何复杂的振动都可以分解为一系列谐振动之和。用数学的语言来描述，上面所说的事实就是：在相当普遍的条件下，周期为$T$的函数$f(t)$，可以表示成以下形状的级数的和

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t), \tag{1.2}$$

其中的$\omega=\frac{2\pi}{T}$。——我们把（1.2）中的常数项写成$\frac{a_0}{2}$是为了以后讨论方便。

上述事实并不是显而易见的。1753年，当丹尼尔·伯努里①为了解决弦振动问题最早提出这样的见解时，与他同时代的数学家（包括欧拉和达朗贝尔）大都持怀疑态度。争论和探索一直持续到下一个世纪。直到1829年，狄里克莱才首次给出了前述基本事实的一个严格的数学证明。随后，还有其他一些数学家给出了条件有些不同的证明。可以说，对这一事实的研究，极大地促进了数学分析的发展。

本章考察周期函数$f(t)$展开为形如（1.2）的级数的条件。因为任意周期的情形可以通过变元的比例变换化成周期为$2\pi$的情形，所以我们主要对周期$T=2\pi$（即$\omega=1$）的情形进行讨论。

考察函数系

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t, \tag{1.3}$$

---

① 丹尼尔·伯努里（Daniel Bernoulli, 1700—1782）是著名的瑞士数学家。他的父亲约翰·伯努里（Johann Bernoulli）和伯父雅可布·伯努里（Jakob Bernoulli）也都是著名的数学家。

$$\cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots.$$

我们把（1.3）叫做（周期为$2\pi$的）基本三角函数系．这函数系的一个值得注意的特点是“正交性”，即任意两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分都等于0．事实上，直接计算可得

$$(1.4) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nt\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nt\mathrm{d}t = 0.$$

利用三角公式

$$\cos mt \cos nt = \frac{1}{2}[\cos(m-n)t + \cos(m+n)t],$$

$$\sin mt \sin nt = \frac{1}{2}[\cos(m-n)t - \cos(m+n)t],$$

$$\cos mt \sin nt = \frac{1}{2}[\sin(m+n)t - \sin(m-n)t],$$

又可得到

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi, & 若 m=n, \\ 0, & 若 m\neq n; \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi, & 若 m=n, \\ 0, & 若 m\neq n; \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt\mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

设周期为$2\pi$的函数$f(t)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积．假如以下的展式成立：

$$(1.6) \qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

我们希望了解系数$a_m$和$b_n$是怎样的．为了这一目的，将（1.6）式两边乘以$\cos mt$或$\sin nt$，然后在区间$[-\pi,\pi]$上积分．假如乘以$\cos mt$或$\sin nt$的级数可以逐项积分，就能得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin nt\end{Bmatrix}dt=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin nt\end{Bmatrix}dt$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin nt\end{Bmatrix}dt\right.$$

$$\left.+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin nt\end{Bmatrix}dt\right),$$

这里 $m=0,1,2,\cdots;n=1,2,\cdots$。再利用（1.4）和（1.5），就得到

$$(1.7)\qquad \begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,\\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \end{cases}$$

表示式（1.7）被称为欧拉-傅里叶公式①。

只要函数 $f(t)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积，我们就可以按照欧拉-傅里叶公式（1.7）计算函数 $f(t)$ 的傅里叶系数 $a_0,a_n,b_n$，然后写出这函数的傅里叶级数

$$(1.8)\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

请读者注意：上面的探索，依据的是两个未经验证的假设（两个加有黑体字的"假如"）。到现在为止，我们还没有理由在函数 $f(t)$ 和由它作成的傅里叶级数之间划上等号。我们约定采用记号

---

① 傅里叶（Joseph Fourier，1768—1830）是法国数学家。他在1822年出版的《热的分析理论》一书中，广泛地运用了形状如（1.6）那样的级数展式。

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

以表示右端的级数是左端的函数的傅里叶级数。

对于周期为$2\pi$的函数$f(t)$，欧拉-傅里叶公式（1.7）中的各积分可以在任何一个长为$2\pi$的区间上计算，例如

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t,$$

$$k = 1,2,3,\cdots.$$

如果$f(t)$ 是在区间$[-\pi,\pi]$上有定义的偶函数，并且在这区间上可积或广义绝对可积，那么按照欧拉-傅里叶公式计算得

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-t)\sin kt\,\mathrm{d}t = 0, \end{aligned}$$

$$k = 1,2,\cdots.$$

因而偶函数$f(t)$ 的傅里叶级数只含余弦部分：

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt,$$

并且傅里叶系数可按下面公式计算：

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \\ a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

如果$f(t)$ 是在区间$[-\pi,\pi]$上有定义的奇函数，并且在这区间上可积或广义绝对可积，那么这函数的傅里叶级数只含正弦部分

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kt,$$

并且

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

## §2 正交函数系，贝塞尔不等式

在导出欧拉-傅里叶公式的过程中，我们利用了三角函数系的一个重要性质——正交性。本节对正交性作更一般的讨论。

考察在闭区间$[\alpha,\beta]$上黎曼可积的函数所组成的集合$\mathscr{R}$。按照通常方式定义加法和乘以实数的运算，$\mathscr{R}$成为一个实线性空间。在$\mathscr{R}$上，我们按以下方式定义内积$(\cdot,\cdot)$：

$$(f, g) = \rho\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

这里$\rho$是取定的正实数。对许多情形，可以简单地取$\rho = 1$；对另外有些情形，取$\rho$为其他数值更加方便。容易验证，所定义的内积具有以下这些重要性质：

(I$_1$) $\qquad (f, g) = (g, f), \quad \forall f, g \in \mathscr{R}$；

(I$_2$) $\qquad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1(f_1, g) + \lambda_2(f_2, g)$，

$$\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathscr{R},\ f_1,f_2,g\in\mathscr{R};$$

$$(\mathrm{I}_3)\qquad (f,f)\geqslant 0,\ \ \forall f\in\mathscr{R}.$$

请注意，与线性代数课程中的定义稍有不同，这里的内积$(f,f)$是非负的，但未要求是正定的。——对于$f\in\mathscr{R}$，单凭$(f,f)=0$尚不能断定$f=0$。(在以后学习的课程中，引入勒贝格积分概念之后，对此将作进一步的处理。)

如果两个函数$f,g\in\mathscr{R}$满足条件

$$(f,g)=0,$$

那么我们就说这两函数是正交的。考察函数系

$$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$$

或者

$$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots.$$

如果函数系中的函数两两正交，那么我们就说这函数系是正交的。如果函数系$\{\varphi_k\}$满足这样的条件：

$$(\varphi_k,\varphi_l)=\delta_{kl}=\begin{cases}1, & \text{对于}k=l,\\ 0, & \text{对于}k\neq l,\end{cases}$$

那么我们就说这函数系是规范正交的。

下面，我们来考察$\mathscr{R}$中的一个取定的规范正交函数系

$$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots.$$

假设函数$f\in\mathscr{R}$能展开成以下形式的级数

$$(2.1)\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(x).$$

以$\varphi_l(x)$乘这式两边得

$$f(x)\varphi_l(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(x)\varphi_l(x).$$

假设上式右端的级数可以逐项积分，就能得到

$$(f,\varphi_l)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(\varphi_k,\varphi_l)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\delta_{kl}$$

$$=c_l,\qquad l=0,1,2,\cdots,$$

也就是

$$c_k=(f,\varphi_k),\qquad k=0,1,2,\cdots. \tag{2.2}$$

公式 (2.2)被称为关于正交函数系$\{\varphi_k\}$的欧拉-傅里叶公式。按照这公式计算系数，然后作成级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(x). \tag{2.3}$$

我们约定把这样的级数叫做函数 $f$ 关于正交函数系$\{\varphi_k\}$的傅里叶级数，并约定用以下记号表示

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(x).$$

对于$f\in\mathscr{R}$，约定记

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}.$$

我们来考察用线性组合

$$\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k(x) \tag{2.4}$$

逼近函数$f(x)$的均方误差：

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k\right\|$$

$$=\sqrt{\left(f-\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k,\ f-\sum_{k=0}^{n}b_k\varphi_k\right)}$$

$$= \sqrt{\rho \int_{\alpha}^{\beta} \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x) \right)^2 dx.}$$

下面将指出，在所有的形状如 (2.4)那样的$n+1$项线性组合当中，函数$f$的傅里叶级数的部分和使得逼近的均方误差达到最小。在这个意义上，我们说傅里叶级数的部分和是函数$f$的最佳均方逼近。事实上

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k \right\|^2 = \left( f - \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k \right)$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=0}^{n} b_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} b_k^2$$

$$= \| f \|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} b_k c_k + \sum_{k=0}^{n} b_k^2$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)^2$$

$$(c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, n).$$

我们看到，当且仅当

$$b_k = c_k, \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

这样的情形，均方误差才达到最小值

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2. \tag{2.5}$$

对上述事实，可以作如下的几何解释：在内积空间$V$中，规范正交向量$e_0, e_1, \cdots, e_n$的线性组合

$$\sum_{k=0} b_k e_k$$

张成了一个$n+1$维的子空间$W$。设$f$是空间$V$中的一个点。我

们希望找出子空间$W$中离$f$最近的点(参看图20-1)。显然所求的点应该是点$f$在子空间$W$上的垂直投影，即

$$\sum_{k=0}^{n} c_k e_k,$$

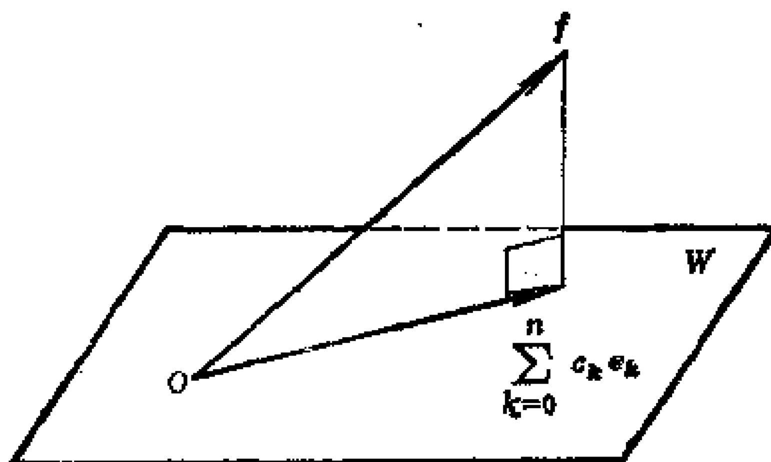



图 20-1

这里$c_k=(f,e_k)$，$k=0,1,\cdots,n$。而$f$到这垂足的距离的平方为

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n} c_k e_k\right\|=\|f\|^2-\left\|\sum_{k=0}^{n} c_k e_k\right\|^2,$$

也就是

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n} c_k e_k\right\|=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$

在前面的讨论中，我们得到了等式

$$\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n} c_k^2=\left\|f-\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k\right\|^2. \tag{2.5}$$

由此又可得到

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2.6}$$

这里的（2.5)和（2.6)分别被称为贝塞尔（Bessel）等式和贝塞尔不等式。又因为（2.6)式中的 $n$ 是任意的，所以级数 $\sum c_k^2$ 收敛，并且以下不等式成立：

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2.7}$$

通常也把（2.7)称为贝塞尔不等式。作为不等式（2.7)的推论，我们断定

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0. \tag{2.8}$$

现在，我们再回过来考察三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \cdots \tag{2.9}$$

如果把函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积定义为

$$(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

那么三角函数系（2.9）是规范正交的。我们来考察函数 $f$ 对规范正交函数系(2.9）的傅里叶级数

$$A_0\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

通常记 $a_0 = \sqrt{2}A_0$，而把这级数写成

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2.11}$$

傅里叶级数（2.11）中的系数可按以下各公式计算：

$$a_0 = \sqrt{2}A_0 = \sqrt{2}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (f, 1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \end{aligned}\right. \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

——这就是我们在上节中已经得到的欧拉-傅里叶公式。

对函数 $f$ 的傅里叶级数，我们写出贝塞尔不等式

$$A_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

仍然记 $a_0 = \sqrt{2}A_0$，就得到

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

由此得知：级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

收敛，并且有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

这里的（2.12）和（2.13）就是关于三角函数系的贝塞尔不等式。由此又可得到

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

也就是

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = 0, \tag{2.14}$$

(2.15) $$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0.$$

值得注意的是：(2.14) 和 (2.14) 中的极限都不能取到积分号里面去。

在下一节中，我们还将进一步推广象 (2.14) 和 (2.15) 这样的结果。

## §3 傅里叶级数的逐点收敛性

本节考察傅里叶级数在各点的收敛状况。3.a段和3.b段先作一些必要的准备。3.c段和3.d 段介绍最常用的判别法。3.e 段给出傅里叶级数展开的一些例子。

### 3.a 黎曼-勒贝格引理

如果函数$h(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上有定义，并且存在区间$[\alpha,\beta]$的分割，使得$h(t)$在分割的各子区间的内部为常数，那么我们就说$h(t)$是区间$[\alpha,\beta]$上的阶梯函数。

**引理1** 设函数$g(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上可积，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在定义于区间$[\alpha,\beta]$上的阶梯函数$h(t)$，使得

$$\int_{\alpha}^{\beta}|g(t)-h(t)|dt<\varepsilon.$$

**证明** 因为函数$g(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上可积，所以存在这区间的一个分割

$$P:\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta t_i<\varepsilon.$$

这里

$$M_i = \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} g(t), \quad m_i = \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} g(t),$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \qquad i = 1,2,\cdots,n.$$

我们定义这样一个阶梯函数 $h(t)$：

$$h(t) = m_i,\ t\in[t_{i-1},t_i),\ i = 1,2,\cdots,n;$$

$$h(\beta) = g(\beta).$$

在子区间$[t_{i-1},t_i)$上显然有

$$0 \leqslant g(t) - h(t) \leqslant M_i - m_i.$$

因而

$$\int_\alpha^\beta |g(t)-h(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(t)-h(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta t_i < \varepsilon. \qquad \square$$

在上一节中，我们证明了：对于在区间$[-\pi,\pi]$上可积的函数$f(t)$，应有

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t = 0.$$

黎曼-勒贝格(Lebesgue)引理将上述结果推广到更一般的情形。这引理在傅里叶级数理论中起着十分重要的作用。

**引理2**（黎曼-勒贝格） 如果函数$g(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上可积或广义绝对可积，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\cos\lambda t = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\sin\lambda t=0$$

**证明** 先设 $g(t)$是阶梯函数。这就是说，存在区间$[\alpha,\beta]$的分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

使得

$$g(t)=c_i,\quad t\in(t_{i-1},t_i),$$
$$i=1,2,\cdots,n.$$

对这情形，我们有

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\cos\lambda t dt\right|=\left|\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}g(t)\cos\lambda t dt\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^n c_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}\cos\lambda t dt\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^n c_i\frac{\sin\lambda t_i-\sin\lambda t_{i-1}}{\lambda}\right|$$
$$\leqslant\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^n|c_i|.$$

因而

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\cos\lambda t dt=0.$$

其次，设 $g(t)$是常义可积函数。根据引理 1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $h(t)$，使得

$$\int_\alpha^\beta|g(t)-h(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于阶梯函数 $h(t)$，根据上面已证明的结果，存在 $\Gamma>0$，使得

只要 $\lambda>\Gamma$，就有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}h(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $\lambda>\Gamma$ 时就有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\alpha}^{\beta}g(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\left|\int_{\alpha}^{\beta}(g(t)-h(t))\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&\quad+\left|\int_{\alpha}^{\beta}h(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}|g(t)-h(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_{\alpha}^{\beta}h(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

最后，设函数 $g(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上广义绝对可积。为了叙述简便，不妨设 $\alpha$ 是唯一的瑕点．根据广义绝对可积的定义，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\eta}|g(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为函数 $g(t)$在区间$[\alpha+\eta,\beta]$上已是常义可积的了，所以又存在 $\Delta>0$，使得只要 $\lambda>\Delta$，就有

$$\left|\int_{\alpha+\eta}^{\beta}g(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $\lambda>\Delta$ 时就有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}g(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left| \int_{a}^{a+\eta} g(t)\cos \lambda t \mathrm{d}t \right|$$

$$+ \left| \int_{a+\eta}^{\beta} g(t)\cos \lambda t \mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \int_{a}^{a+\eta} |g(t)| \mathrm{d}t + \left| \int_{a+\eta}^{\beta} g(t)\cos \lambda t \mathrm{d}t \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

我们已证明了

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{a}^{\beta} g(t)\cos \lambda t \mathrm{d}t = 0.$$

同样可证

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{a}^{\beta} g(t)\sin \lambda t \mathrm{d}t = 0. \qquad \square$$

作为黎曼-勒贝格定理的一个应用，我们来证明：

**引理3**（狄里克莱）

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

**证明** 根据广义积分的狄里克莱判别法，可以断定(3.1) 左端的积分收敛。显然有

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{0}^{\lambda \pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \tag{3.2}$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{d}t.$$

为了计算(3.2) 式中最后一个极限，我们利用以下的恒等式

$$\text{(3.3)} \qquad \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt.$$

将(3.3)式两边从0到$\pi$积分就得到

$$\text{(3.4)} \qquad \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

下面，我们来证明

$$\text{(3.5)} \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\lambda t}{t} dt$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

$$= \lim_{\lambda_n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

事实上有

$$\int_0^\pi \frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{t}{2}} dt - \int_0^\pi \frac{\sin\lambda t}{t} dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{t - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} \sin\lambda t dt$$

$$= \int_0^\pi g(t)\sin\lambda t dt,$$

这里

$$g(t)=\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}.$$

容易看出：$t=0$ 是函数 $g(t)$的可去间断点；补充定义 $g(0)=0$之后，函数 $g(t)$就在闭区间$[0,\pi]$连续。根据黎曼-勒贝格引理，应有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi g(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t=0.$$

我们已经证明了(3.5) 式. 在这式中取

$$\lambda_n=n+\frac{1}{2}\to+\infty$$

并利用(3.4) 式，就得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\lambda t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda_n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}.\qquad\square$$

### 3.b 傅里叶级数部分和的积分表示

设周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积，并设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{3.6}$$

我们来考察傅里叶级数的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ku\mathrm{d}u,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin ku\mathrm{d}u,$$

$$k=1,2,\cdots,$$

所以

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\cos ku\cdot\cos kx$$

$$+\sin ku\cdot\sin kx)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

注意到(3.3)式，很容易看出：这里最后一个积分的被积函数是变元 $t$ 的周期函数，周期为$2\pi$。因而我们可以把积分区间$[-\pi-x,\pi-x]$换成$[-\pi,\pi]$，这样得到

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right)f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

通过上面的讨论，我们把傅里叶级数的部分和表示成积分

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

这样的表示被称为狄里克莱积分.

**引理4**（黎曼局部化原理） 设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积。则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在任意一点 $x_0$ 的收敛状况（是否收敛？收敛到怎样的值?），只取决于这函数在 $x_0$ 点的任意小的邻域内的性态.

**证明** 在 $x_0$ 点，函数 $f$ 的傅里叶级数的部分和 $S_n(x_0)$ 可以表示为

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t,$$

这里的 $\delta$ 是任意小的正数. 在第二个积分中，函数

$$g(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

在区间 $[\delta,\pi]$ 上可积或广义绝对可积. 根据黎曼-勒贝格引理可以断定

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t = 0.$$

由此可知：序列$\{S_n(x_0)\}$是否收敛与收敛到怎样的数值，只取决于函数$f(x)$在区间$[x_0-\delta, x_0+\delta]$上的性态。 □

根据黎曼局部化原理，为了考察傅里叶级数在某点$x_0$的收敛状况，只须考察$n\to+\infty$时以下积分的极限状况

$$I_{\delta,n}(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t.$$

下面的引理说明，代替积分$I_{\delta,n}(x_0)$，我们可以考察更简单的积分$J_{\delta,n}(x_0)$的极限状况。

**引理5** 设周期为$2\pi$的函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积或广义绝对可积。我们记

$$I_{\delta,n}(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t,$$

$$J_{\delta,n}(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t,$$

则有

$$\lim_{n\to+\infty}(I_{\delta,n}(x_0)-J_{\delta,n}(x_0))=0.$$

**证明** 我们有

$$I_{\delta,n}(x_0)-J_{\delta,n}(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

因为函数

$$h(t)=(f(x_0+t)+f(x_0-t))\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}$$

在区间[0,$\delta$]上可积或广义绝对可积，所以根据黎曼-勒贝格引理就有

$$\lim_{n\to+\infty}(I_{\delta,n}(x_0)-J_{\delta,n}(x_0))=0. \qquad \square$$

综合上面的引理 4 与引理 5，可得：

引理 6　在引理 5 的条件下，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n(x_0)-J_{\delta,n}(x_0))=0,$$

这里$\{S_n(x)\}$是函数 $f(x)$的傅里叶级数的部分和序列。

### 3.c　狄尼-李普希茨判别法

**引理 7**（狄尼）　设函数 $g(t)$ 在区间 $(0,\delta]$有定义，$g(0+)$存在，并且以下的积分收敛：

$$\int_0^\delta\frac{|g(t)-g(0+)|}{t}dt,$$

则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=g(0+).$$

**证明**　我们有

$$\int_0^\delta g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=\int_0^\delta\frac{g(t)-g(0+)}{t}\sin\lambda t\,dt+g(0+)\int_0^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$= \int_0^{\delta} \frac{g(t) - g(0+)}{t} \sin \lambda t \, dt + g(0+) \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin t}{t} dt.$$

让 $\lambda \to +\infty$，上式右端第一项的极限是 0（黎曼-勒贝格引理），第二项的极限是 $\frac{\pi}{2} g(0+)$（引理 3）. □

**定理 7**（狄尼判别法） 设周期为$2\pi$的函数$f(x)$在区间$[-\pi, \pi]$上可积或广义绝对可积. 我们记

$$g(t) = \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2}.$$

如果积分

$$\int_0^{\delta} \frac{|g(t) - g(0+)|}{t} dt$$

收敛，那么函数$f(x)$的傅里叶级数在点$x_0$收敛于

$$g(0+) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

**证明** 根据引理 6 和引理 7，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to +\infty} S_n(x_0) \\
&= \lim_{n \to +\infty} J_{\delta, n}(x_0) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} g(t) \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{t} dt \\
&= g(0+) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.
\end{aligned}$$

□

**推论1**（李普希茨判别法） 设周期为$2\pi$的函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上可积或广义绝对可积，在$x_0$点连续或有第一类间断，并且在$x_0$点邻近满足以下的李普希茨条件：存在$L>0,\alpha>0$和$\delta>0$,使得

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0)|\leqslant Lt^{\alpha},\quad \forall t\in(0,\delta],$$

那么函数$f(x)$的傅里叶级数在$x_0$点收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

**证明** 若记

$$g(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2},$$

则有

$$\frac{|g(t)-g(0+)|}{t}\leqslant\frac{L}{t^{1-\alpha}},\quad \forall t\in(0,\delta].$$

因而积分

$$\int_0^{\delta}\frac{|g(t)-g(0+)|}{t}\mathrm{d}t$$

收敛。 □

**推论2** 如果周期为$2\pi$的函数$f$满足以下各条件：

(1) $f$在区间$[-\pi,\pi]$上的不连续点和不可微点至多只有有限多个；

(2) $f$在每一不连续点处具有第一类间断；

(3) 在每一不可微点（包括不连续点）$\xi$,以下两个极限存在

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(\xi+t)-f(\xi+0)}{t},$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(\xi-t)-f(\xi-0)}{-t},$$

那么函数 $f$ 的傅里叶级数在每一点 $x_0$ 收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

**证明** 按照所给的条件，不论 $x_0$ 是函数 $f$ 的可微点或者不可微点，以下两个极限都一定存在

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}.$$

因而函数 $f$ 在 $x_0$ 点邻近满足 $\alpha=1$ 的李普希茨条件

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0)|\leqslant Lt,\quad \forall t\in(0,\delta]. \quad \square$$

**注记** 推论 2 中的两个极限可以称为广义单侧导数。如果 $\xi$ 是 $f$ 的连续点，那么广义单侧导数也就是单侧导数。

推论 2 的条件可以等价地陈述为：存在区间$[-\pi,\pi]$的一个分割

$$-\pi=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_m=\pi,$$

使得在每一子区间$[\xi_{i-1},\xi_i]$上按以下方式定义的函数 $\tilde{f}_i$ 是可微的（在子区间的端点处单侧可微）：

$$\tilde{f}_i(x)=\begin{cases}f(\xi_{i-1}+0), & \text{对于 } x=\xi_{i-1},\\ f(x), & \text{对于 } x\in(\xi_{i-1},\xi_i),\\ f(\xi_i-0), & \text{对于 } x=\xi_i.\end{cases}$$

因此，对这情形，我们说函数 $f$ 在区间$[-\pi,\pi]$上是分段可微的。引用这样的术语，可以把推论 2 简单地陈述为：

**推论 2′** 如果周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上是分段可微的，那么这函数的傅里叶级数在每一点 $x_0$ 收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

特别地，在函数 $f$ 的连续点 $x_0$ 处，这函数的傅里叶级数收敛于 $f(x_0)$。

### 3.d 狄里克莱判别法

引理 8（狄里克莱） 如果函数$h(t)$在区间$(0,\delta]$上单调并且有界，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=h(0+).$$

**证明** 假定函数 $h(t)$在区间$(0,\delta]$单调上升并且有界。我们来证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt=0.$$

为此，把上式中的积分拆成两项：

$$\int_0^\delta(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=\int_0^\eta(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\int_\eta^\delta(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt,$$

这里的 $\eta$ 将在$(0,\delta)$范围内适当选择。为了估计上式右边的第一项，我们利用积分的第二中值定理：

$$\int_0^\eta(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=(h(\eta)-h(0+))\int_\xi^\eta\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=(h(\eta)-h(0+))\int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta}\frac{\sin u}{u}du.$$

因为积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

收敛，所以存在 $M>0$，使得

$$\left|\int_{0}^{v}\frac{\sin u}{u}du\right|\leqslant M,\quad \forall v\in\mathbf{R}.$$

于是

$$\left|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|$$

$$=\left|\int_{0}^{\lambda\eta}\frac{\sin u}{u}du-\int_{0}^{\lambda\xi}\frac{\sin u}{u}du\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{0}^{\lambda\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|+\left|\int_{0}^{\lambda\xi}\frac{\sin u}{u}du\right|\leqslant 2M.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，我们可以选择充分小的 $\eta\in(0,\delta)$，使得

$$0\leqslant h(\eta)-h(0+)\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}.$$

对于这样选定了的 $\eta\in(0,\delta)$，函数

$$\frac{h(t)-h(0+)}{t}$$

在区间$[\eta,\delta]$可积。根据黎曼-勒贝格引理，应有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{\eta}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt=0.$$

因此，存在 $\Delta>0$，使得只要 $\lambda>\Delta$，就有

$$\left|\int_{\eta}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，只要 $\lambda>\Delta$，就有

$$\left|\int_{0}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{0}^{\eta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|$$

$$+\left|\int_{\eta}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant|h(\eta)-h(0+)|\left|\int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|$$

$$+\left|\int_{\eta}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这证明了

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{0}^{\delta}(h(t)-h(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=0.$$

由此可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{0}^{\delta}h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}h(0+)\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}h(0+)\int_{0}^{\lambda\delta}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{2} h(0+).$$

这证明了引理。 □

设函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有定义。如果存在区间 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割，使得在所分成的每一个子区间的内部函数 $f(x)$ 是单调的，那么我们就说函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上分段单调。

**定理 2**（狄里克莱判别法） 如果周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段单调并且有界，那么 $f$ 的傅里叶级数在任意一点 $x_0$ 收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

**证明** 对于充分小的 $\delta>0$，函数 $h(t)=f(x_0\pm t)$ 在区间 $(0,\delta]$ 上单调并且有界。根据引理 8 就有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\delta f(x_0\pm t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,\mathrm{d}t = f(x_0\pm 0).$$

由此得到

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\delta,n}(x_0) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \qquad \square$$

### 3.e 傅里叶级数展开的例子

对以下各例，既可以利用 3.c 段中的判别法，也可以利用 3.d 段中的判别法。

**例 1** 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上把函数

$$f(x)=x$$

展开成傅里叶级数。

解　首先补充规定

$$f(-\pi)=f(\pi)=0,$$

然后再按周期 $2\pi$ 扩充函数 $f(x)$ 的定义到整个数轴上。我们把这样得到的周期为$2\pi$的函数记为$\tilde{f}(x)$（参看图20-2）。

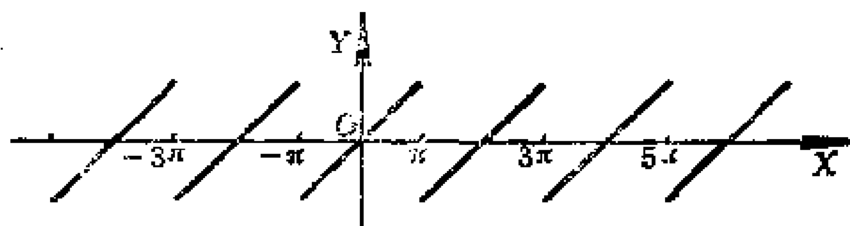



图　20-2

因为 $\tilde{f}(x)$ 是奇函数，所以它的傅里叶级数只含正弦部分。按照欧拉-傅里叶公式计算系数得

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\sin kx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx\mathrm{d}x\\&=(-1)^{k+1}\frac{2}{k},\qquad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

根据 3.c 或 3.d 中的判别法，可以断定函数 $\tilde{f}$ 的傅里叶级数在任何一点 $x_0$ 处收敛于

$$\frac{\tilde{f}(x_0+0)+\tilde{f}(x_0-0)}{2}=\tilde{f}(x_0).$$

我们得到：

$$\tilde{f}(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x = 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}, \qquad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

**例 2** 试将函数

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

展成傅里叶级数。

**解** 我们扩充这函数的定义，使它成为周期为$2\pi$的函数。——扩充后的函数记为$\tilde{f}(x)$。因为$\tilde{f}(x)$是偶函数，所以它的傅立叶级数只含余弦部分。计算系数得：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

我们得到傅里叶级数展式：

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

特别地，在上式中分别取$x = 0$和$x = \pi$就得到：

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

和

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

**例 3** 设 $\alpha$ 不是整数，试将函数

$$f(t)=\cos\alpha t,\qquad t\in[-\pi,\pi]$$

展开成傅里叶级数。

**解** 我们扩充这函数的定义，使它成为一个周期为 $2\pi$ 的函数。——扩充后的函数记为 $\tilde{f}(t)$。因为 $\tilde{f}(t)$ 是偶函数，所以它的傅里叶级数只含有余弦部分。计算系数得：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha t\,dt=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha t\cdot\cos nt\,dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(\alpha-n)t+\cos(\alpha+n)t]dt\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right]\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\sin\alpha\pi\left[\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right]\\&=(-1)^n\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)},\qquad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

我们得到这函数的傅里叶展式：

$$\tilde{f}(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\cos nt}{\alpha^2-n^2}\right).$$

限制在 $[-\pi,\pi]$ 上就得到：

(3.7) $$\cos at=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2a\cos nt}{a^2-n^2}\right),$$

$$t\in[-\pi,\pi].$$

**例 4** 利用例 3 中所得到的结果，我们来推导函数

$$\operatorname{ctg} z \text{ 与 } \frac{1}{\sin z}$$

的简单分式展式。

在 (3.7) 式中令 $t=\pi$ 就得到

$$\pi\operatorname{ctg} a\pi=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

用 $x$ 代替$a$，可以将上式写成

(3.8) $$\pi\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}\quad(x\notin\mathbb{Z}).$$

在 (3.8) 式中令$z=\pi x$，又得到

(3.9) $$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

$$(z\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

在 (3.7) 式中令 $t=0$ 就得到

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}.$$

用 $x$ 代替$a$，可以将上式写成

(3.10) $$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2}$$

$$(x\notin\mathbb{Z}).$$

在（3.10）式中令$z=\pi x$，又得到

(3.11)
$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$
$$(z\neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

我们将所得到的一些有用的展式小结如下：

$$\pi\ \mathrm{ctg}\ \pi x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}\quad (x\notin \mathbf{Z}),$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2}\quad (x\notin \mathbf{Z}),$$

$$\mathrm{ctg}\ z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$
$$(z\neq k\pi,\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$
$$(z\neq k\pi,\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

**例 5** 在区间 $(0,2\pi)$ 将函数

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

展开为傅里叶级数。

**解** 首先补充规定

$$f(0)=f(2\pi)=0,$$

然后按周期 $2\pi$ 扩充函数$f(x)$ 的定义到整个数轴上。——扩充后的函数记为$\tilde{f}(x)$。计算傅里叶系数得：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,\mathrm{d}x=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos kx\mathrm{d}x=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kx\mathrm{d}x=\frac{1}{k},$$

$$k=1,2,\cdots.$$

于是，我们得到

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k},\qquad 0<x<2\pi.$$

## §4 均方收敛性与帕塞瓦等式，等周问题

前面我们谈过，在可积函数类$\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中，可以引入内积

$$(f,g)=\rho\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

利用关于积分的等式

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_\alpha^\beta g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0,$$

容易得到

$$(f\cdot g)^2\leqslant(f,f)(g,g).$$

据此又可证明："范数"①

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

满足以下的三角形不等式

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

设$f, f_n \in \mathscr{R}[\alpha,\beta]$ $(n=1,2,\cdots)$。

如果

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

也就是

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta (f_n(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x = 0,$$

那么我们就说函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$[\alpha,\beta]$上均方收敛于函数$f(x)$。

容易证明：如果函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$[\alpha,\beta]$一致收敛于函数$f(x)$，那么这函数序列也必定在区间$[\alpha,\beta]$上均方收敛于函数$f(x)$。

然而，相反的论断却不能成立。因此我们说：均方收敛性弱于一致收敛性。

如果函数级数$\sum u_k(x)$的部分和序列

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

在区间$[\alpha,\beta]$上均方收敛于函数$f(x)$，即

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\| = 0,$$

那么我们就说这函数级数在区间$[\alpha,\beta]$上均方收敛于函数$f(x)$。

下面，我们着重考察函数类

$$\mathscr{R}[-\pi,\pi],$$

① "范数"二字加有引号，因为我们是在较弱的意义下使用这个词：虽然仍有$\|f\| \geqslant 0$，但单凭$\|f\| = 0$，尚不能断定$f=0$。

约定对这函数类引入内积

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

并相应地定义范数

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x}$$

本节的主要任务是证明：如果$f\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$，那么$f$的傅里叶级数在区间$[-\pi,\pi]$上均方收敛于这函数本身。

在下面的讨论中，我们把基本三角函数系中任意有限项的实系数线性组合叫做三角多项式。

### 4.a 均方逼近

在本段中，我们证明：$\mathscr{R}[-\pi,\pi]$中的任何函数都可以用三角多项式作均方逼近。

设$f$是周期为$2\pi$的函数，它在区间$[-\pi,\pi]$上可积或广义绝对可积。又设

$$S_0(x),S_1(x),\cdots,S_n(x),\cdots \tag{4.1}$$

是函数$f$的傅里叶级数的部分和序列。我们把序列(4.1)中前$n$项的算术平均值

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x) \tag{4.2}$$

叫做函数$f$的第$n$个费叶(Fejér)和$(n=1,2,\cdots)$。

下面的引理给出费叶和的积分表示。

**引理1** 在上面所述的条件下，我们有：

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t,$$

$$n=1,2,\cdots。$$

据此又可得到恒等式

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t=1,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

**证明** 我们有

$$S_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$k=0,1,\cdots,n.$$

由此可得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

利用恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\cdot\sin\frac{t}{2}}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\sum_{k=0}^{n-1}[\cos kt-\cos(k+1)t]$$

$$=\frac{1-\cos nt}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}=\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

我们得到

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

特别地，对于函数 $f(x)=1$，计算傅里叶系数得

$$a_0=2,\quad a_k=b_k=0,\qquad k=1,2,\cdots.$$

直接从定义可得

$$\sigma_n(x)=1,\qquad n=1,2,\cdots.$$

再与上面得到的积分表示比较，就得到

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=1,$$

$$n=1,2,\cdots.\qquad\square$$

**引理2** 设 $f$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积。如果函数 $f$ 在区间 $[\alpha-\eta,\beta+\eta]$ 连续 $(\eta>0)$，那么函数 $f$ 的

费叶和序列$\{\sigma_n(x)\}$在区间$[\alpha,\beta]$上一致收敛于$f(x)$。

**证明** 函数$f$是有界的。可设

$$|f(x)|\leqslant M,\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

又因为函数$f$在闭区间$[\alpha-\eta,\beta+\eta]$上一致连续，所以对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta\in(0,\eta)$，使得只要

$$x',x\in[\alpha-\eta,\beta+\eta],\quad |x'-x|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对于$x\in[\alpha,\beta]$就有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)2M\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2n\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\frac{2M}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

于是，只要 $n$ 充分大，就一致地有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [\alpha, \beta]. \qquad \square$$

作为引理 2 的直接推论，我们有

**定理1** 设 $f$ 是周期为$2\pi$ 的连续函数，$\sigma_n(x)$是函数 $f$ 的第 $n$ 个费叶和，则$\{\sigma_n(x)\}$一致地收敛于$f(x)$。

**注记** 维尔斯特拉斯的第二逼近定理说：周期为$2\pi$的连续函数可以用三角多项式一致逼近。我们这里给出了第二逼近定理的一个构造式的证明——具体地构造出逼近序列$\{\sigma_n(x)\}$。

**引理3** 设 $f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在周期为$2\pi$的连续函数 $g$，使得

$$\|g - f\| < \varepsilon.$$

**证明** 改变可积函数在有限个点的值，既不影响可积性，也不改变积分的值。必要时改变函数 $f$ 在区间$[-\pi,\pi]$的一个端点处的值，可以要求这函数满足条件

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

因为$f \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$，所以对任意给定的$\varepsilon>0$，存在区间$I=[-\pi,\pi]$的分割

$$P: \quad -\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = \pi,$$

使得

$$\sum_{k=1}^{p} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\pi}{M-m}\varepsilon^2,$$

这里

$$M > \sup_{x\in I} f(x), \qquad m = \inf_{x\in I} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x \in I_k} f(x), \qquad m_k = \inf_{x \in I_k} f(x),$$

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$k = 1, 2, \cdots, p.$$

我们作这样一个折线函数 $g$：

$$g(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}),$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \qquad k = 1, 2, \cdots, p.$$

显然函数 $g$ 在区间$[-\pi,\pi]$连续，并且满足条件

$$g(-\pi) = g(\pi).$$

我们可以扩充 $g$ 的定义范围，把它延拓成周期为$2\pi$的连续函数。还容易看出，函数 $g$ 满足这样的条件：

$$m_k \leqslant g(x) \leqslant M_k, \qquad \forall x \in [x_{k-1}, x_k],$$

$$k = 1, 2, \cdots, p.$$

因而有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(x) - f(x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(g(x) - f(x))^2 dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{p}(M_k - m_k)^2 \Delta x_k$$

$$\leqslant \frac{M - m}{\pi}\sum_{k=1}^{p}(M_k - m_k)\Delta x_k$$

$$< \varepsilon^2.$$

这就是

$$\|g - f\| < \varepsilon. \qquad \square$$

**定理2** 任何函数 $f\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$都可以用三角多项式均方逼近，使得均方误差小于预先给定的正数$\varepsilon$。

**证明** 对于任意给定的$\varepsilon>0$，根据引理3，存在周期为$2\pi$的连续函数$g$，使得

$$\|g-f\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

我们以$\tau_n(x)$表示函数$g(x)$的第$n$个费叶和。根据定理1，三角多项式序列$\{\tau_n(x)\}$在区间$[-\pi,\pi]$一致收敛于函数$g(x)$。因而也在这区间上均方收敛于函数$g(x)$。于是，$n$充分大时就有

$$\|\tau_n-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样的$\tau_n$就使得

$$\|\tau_n-f\|\leqslant\|\tau_n-g\|+\|g-f\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad \square$$

### 4.b 傅里叶级数的均方收敛性与帕塞瓦等式

设$E$是$n+1$维欧几里德空间，而$e_0,e_1,\cdots,e_n$是空间$E$中的规范正交基。于是，任意的$x\in E$可以展开成

$$x=x_0e_0+x_1e_1+\cdots+x_ne_n,$$

并且有

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=\|x\|^2.$$

——这后一等式可以看作勾股定理的推广。

在可积函数类$\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中，定义了内积并给定了一个规范正交函数系$\{\varphi_k\}$之后，自然可以计算函数$f$对正交系$\{\varphi_k\}$的傅里叶系数$c_0,c_1,\cdots$。在前面的讨论中，曾经证明了不等式

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

现在，我们提出这样一个问题：在怎样的条件下，上面的不等式成为等式？

在下面的讨论中，我们认为在 $\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中已经取定了一个内积

$$(f,g)=\rho\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

**定理3** 设 $f\in\mathscr{R}[\alpha,\beta]$，$\{\varphi_k\}$是$\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中的一个规范正交函数系，而$c_0,c_1,\cdots,c_k,\cdots$是 $f$ 关于$\{\varphi_k\}$的傅里叶系数，则以下三条件互相等价：

(1) 可以用 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_k,\cdots$的有限线性组合逼近 $f$，使得均方误差小于任何预先给定的正数$\varepsilon$；

(2) 当 $n\to+\infty$ 时，傅里叶级数的部分和$\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上均方收敛于 $f(x)$；

(3) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k^2=\|f\|^2$.

**证明** 先证“(1)⇒(2)”. 设(1)成立，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在$b_0,b_1,\cdots,b_N\in\mathbb{R}$，使得

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{N} b_k\varphi_k\right\|<\varepsilon.$$

对于$n>N$，如果记

$$b_{N+1}=\cdots=b_n=0,$$

那么根据傅里叶级数部分和的最佳均方逼近性质就可得到

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\right\|\leqslant\left\|f-\sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k\right\|$$

$$=\left\|f-\sum_{k=0}^{N}b_k\varphi_k\right\|<\varepsilon.$$

这证明了(2)。

以上证明了"(1)⇒(2)"。而"(2)⇒(1)"是显然的。我们已经证明了条件(1)与(2)的等价性。至于条件(2)与(3)的等价性，则可从下面的等式看出：

$$\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2=\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2. \qquad \square$$

**注记** 人们把

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k^2=\|f\|^2$$

叫做帕塞瓦（Parseval）等式或者封闭性方程。定理3讨论了帕塞瓦等式成立的条件。

**定理4** 设$\{\varphi_k\}$是$\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中的规范正交函数系，$f$和$g$是$\mathscr{R}[\alpha,\beta]$中的两个函数。如果

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\varphi_k(x),\quad g(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}\gamma_k\varphi_k(x),$$

并且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k^2=\|f\|^2,\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\gamma_k^2=\|g\|^2,$$

那么就有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\gamma_k=(f,g).$$

**证明** 显然有$f\pm g\in\mathscr{R}[\alpha,\beta]$，并且有

$$(f\pm g,\varphi_k)=(f,\varphi_k)\pm(g,\varphi_k).$$

因而

$$f(x)+g(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k+\gamma_k)\varphi_k(x),$$

$$f(x)-g(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k-\gamma_k)\varphi_k(x).$$

根据定理3可以断定，对于函数$f+g$和函数$f-g$，帕塞瓦等式仍成立：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k+\gamma_k)^2=\|f+g\|^2,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k-\gamma_k)^2=\|f-g\|^2.$$

上面两式相减就得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\gamma_k=(f,g).\qquad\square$$

**注记** 上面最后一个式子也被称为帕塞瓦等式。在这式子中取$g=f$就得到原来形式的帕塞瓦等式。因而这里给出的是更一般的形式。

**定理5** 在$\mathscr{R}[-\pi,\pi]$中，考察关于基本三角函数系的傅里叶级数，我们得到：

(1) 任何函数$f\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$的傅里叶级数均方收敛于这函数；

(2) 设$f\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$，并设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 设$f,g\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$，并设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx),$$

则有

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 根据定理2，$\mathscr{R}[-\pi,\pi]$中的任何函数$f$都可用三角多项式逼近，使得均方误差小于任何预先给定的正数$\varepsilon$。再利用定理3和定理4，就得到本定理的结论。 □

**定理6** 设$f\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$，并设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

则有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0x}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\mathrm{d}t.$$

不仅如此，还可以断定：上式右端的级数在区间$[-\pi,\pi]$一致收敛于

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

**证明** 我们以$S_n(x)$表示函数$f(x)$的傅里叶级数的部分和，则有

$$\left|\int_0^x S_n(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_0^x (S_n(t) - f(t))\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot|S_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|S_n(t) - f(t)|^2\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(S_n(t) - f(t))^2\mathrm{d}t}, \\
&\qquad\qquad\qquad \forall x\in[-\pi,\pi].
\end{aligned}
$$

根据定理 5，函数序列$\{S_n(t)\}$均方收敛于函数$f(t)$。因而，对任何预先给定的$\varepsilon>0$，存在$N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得只要$n>N$，就有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(S_n(t) - f(t))^2\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon^2}{2\pi}.$$

于是，只要$n>N$，就有

$$\left|\int_0^x S_n(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

至此，我们已完成了定理的证明。 □

**注记** 这定理告诉我们：可积函数的傅里叶级数总是可以逐项积分的。值得注意的是，不论可积函数的傅里叶级数本身是否收敛，由这级数逐项积分所得的级数总是一致收敛的。

### 4.c 等周问题

在周长相等（设为$L$）的所有的简单闭曲线当中，怎样的曲线所围的面积$A$最大？这就是著名的"等周问题"。早在古代，人们就已经猜测这样的曲线应该是圆周。但这一事实的严格证明

直到近代才得到。

十九世纪的数学家斯坦纳（Steiner）曾用朴素的几何方法证明了：除了圆周而外，任何其他的简单闭曲线都不可能是“等周问题”的解。下面，我们扼要地介绍斯坦纳的论证。首先指出：如果简单闭曲线 $\gamma$ 是“等周问题”的解，那么这曲线必定是凸的。否则，我们可以不改变周长而设法把所围的面积扩大（参看图20-3）。其次，如果曲线 $\gamma$ 上的两点 $A$ 和 $B$ 把这曲线分成长

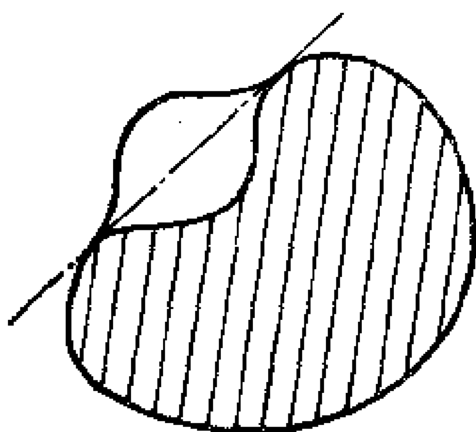


图 20-3

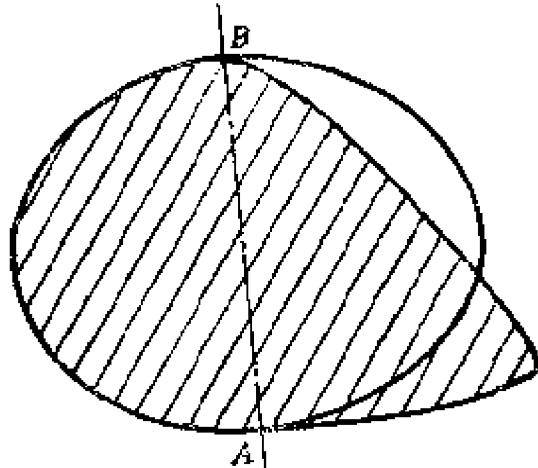



图 20-4

度相等的两段，那么联结这两点的直线 $AB$ 一定把曲线 $\gamma$ 所围的图形分成面积相等的两部分。否则我们可以用面积较大那一部分关于直线 $AB$ 的反射图形代替面积较小的一部分，这样就扩大了总共所围的面积（参看图20-4）。

现在，我们把问题转化为：寻找两端同在一条直线上的长度为 $\frac{L}{2}$ 的凸曲线，使得这凸曲线与直线所围的面积为最大。我们指出：如果从这凸曲线上的任意一点向两端点引射线，那么这两射线所夹的角必定是直角。否则，只要把两射线的夹角改成直角（不改变图中画阴影部分的形状），就能扩大所围的面积（参看图20-5）。

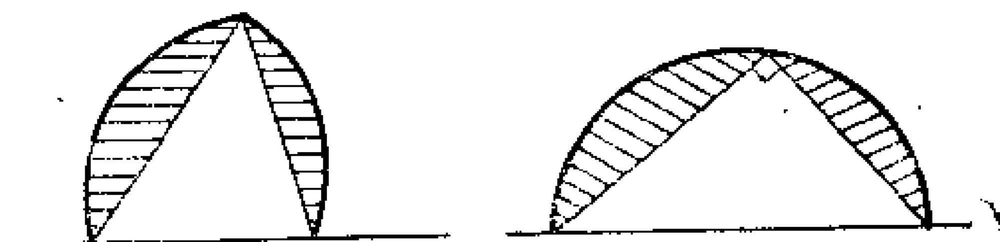


图 20-5

如上所述，斯坦纳证明了："等周问题"的解如果存在，那么这解就一定是圆周。

性急的读者或许会认为斯坦纳的上述论证已经完全解决了"等周问题"。斯坦纳自己当时也是这样认为的。但后来维尔斯特拉斯指出了这推理方式的漏洞。斯坦纳仅仅证明了：如果等周问题的解存在，那么这解只能是圆周。然而解的存在性是需要证明的。

后来有许多学者继续研究等周问题。有的把斯坦纳遗留下来的漏洞补好，有的发展了其他的证明方法。下面将介绍等周问题的一种著名的分析解法。这种解法是胡尔维茨（A.Hurwitz）在1902年作出的。我们限于在分段连续可微的简单闭曲线类中讨论问题。

设 $\gamma$ 是一条具有分段连续可微的参数表示的简单闭曲线，其周长为$L$。以弧长为参数，可以把曲线 $\gamma$ 的方程写成：

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad s\in [0,L],$$
$$(x(0) = x(L),\quad y(0) = y(L)).$$

为了下面讨论方便，我们作变元替换

$$s = \frac{L}{2\pi}t,$$

而把曲线 $\gamma$ 的方程改写为：

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad t \in [0, 2\pi],$$
$$(\varphi(0) = \varphi(2\pi),\quad \psi(0) = \psi(2\pi)).$$

函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 可以按周期 $2\pi$ 延拓，然后展开成傅里叶级数：

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$\psi(t) = \frac{\alpha_0}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt).$$

我们来考察导函数 $\varphi'$ 和 $\psi'$ 的傅里叶级数：

$$\varphi'(t) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k' \cos kt + b_k' \sin kt),$$

$$\psi'(t) \sim \frac{\alpha_0'}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k' \cos kt + \beta_k' \sin kt).$$

通过简单的计算就可得到

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k' &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(t)\cos kt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\varphi(t)\cos kt\,\Big|_0^{2\pi} + k\int_0^{2\pi} \varphi(t)\sin kt\,\mathrm{d}t\right] \\ &= kb_k, \\ b_k' &= -ka_k, \end{aligned}$$
$$k = 1, 2, \cdots.$$

类似地可得

$$\alpha_0' = 0,\quad \alpha_k' = k\beta_k,\quad \beta_k' = -k\alpha_k,$$
$$k = 1, 2, \cdots.$$

借助于帕塞瓦等式，可以用傅里叶系数 $a_k, b_k, \alpha_k, \beta_k$ 等，表

示曲线 $\gamma$ 的周长 $L$ 与面积 $A$。首先注意到

$$s=\frac{L}{2\pi}t,$$

$$\frac{L^2}{4\pi^2}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2=(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2.$$

从这关系出发，利用帕塞瓦等式就得到

$$\frac{L^2}{2\pi}=\int_0^{2\pi}[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]\mathrm{d}t$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}[(a'_k)^2+(b'_k)^2+(\alpha'_k)^2+(\beta'_k)^2]$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(a_k^2+b_k^2+\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

其次，将曲线 $\gamma$ 所围的面积 $A$ 表示为曲线积分并利用帕塞瓦等式，我们得到

$$A=\oint_\gamma x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\alpha'_k+b_k\beta'_k)$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}k(a_k\beta_k-b_k\alpha_k).$$

（这里，我们假定当参数 $t$ 从 0 变到 $2\pi$ 时，点 $(\varphi(t),\psi(t))$ 沿逆时针方向描出曲线 $\gamma$。必要时以 $2\pi-t$ 代替 $t$ 作为参数，总能使这要求得到满足。）

利用周长与面积的表示式，我们得到

$$\frac{L^2}{4\pi}-A=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(a_k^2+b_k^2+\alpha_k^2+\beta_k^2)\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{+\infty}2k(a_k\beta_k-b_k\alpha_k)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}[(ka_k-\beta_k)^2+(kb_k+\alpha_k)^2]\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{+\infty}(k^2-1)(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right\}.$$

上式右边各项都是非负的。我们证明了"等周不等式"：

$$A\leqslant\frac{L^2}{4\pi}. \tag{4.3}$$

当且仅当下面的条件得到满足时，等周不等式才能取等号：

$$ka_k=\beta_k,\quad kb_k=-\alpha_k,\quad k=1,2,\cdots;$$
$$\alpha_k=\beta_k=0,\quad k=2,3,\cdots.$$

这就是说，当且仅当以下条件满足时，（4.3）才能取等号：

$$\begin{cases}\alpha_1=-b_1,\beta_1=a_1,\\ \alpha_k=\beta_k=a_k=b_k=0,\quad k=2,3,\cdots.\end{cases} \tag{4.4}$$

这也就是说，当且仅当曲线 $\gamma$ 的方程为以下形状时，（4.3）中才能取等号：

$$\begin{cases}x=\varphi(t)=\dfrac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1\sin t,\\ y=\psi(t)=\dfrac{\alpha_0}{2}-b_1\cos t+a_1\sin t,\end{cases}\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

或者

$$\left(x-\frac{a_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a_0}{2}\right)^2=a_1^2+b_1^2.$$

这样，我们证明了：当且仅当曲线 $\gamma$ 是圆周时，它所围成的面积才能达到最大值

$$A=\frac{L^2}{4\pi}.$$

## §5 周期为$2l$的傅里叶级数，弦的自由振动

### 5.a 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

与周期为 $2\pi$ 的情形类似，对周期为 $2l$的函数 $f(x)$，也可以讨论它的傅里叶级数展开问题。这里只简单地陈述相应的结果。证明的过程就不再重复了。

在$\mathscr{R}[-l,l]$中可以引进内积

$$(f,g)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

按照这内积，以下函数系是规范正交的：

$$(5.1)\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l},\cdots.$$

于是，我们可以来考察函数 $f\in\mathscr{R}[-l,l]$关于(5.1)的傅里叶级数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

这里的系数可按以下的欧拉-傅里叶公式计算：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$k=1,2,\cdots.$$

对于任何函数 $f\in\mathscr{R}[-l,l]$，以下的帕塞瓦等式成立

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

并且有

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n-f\|=0,$$

这里的 $S_n$ 是函数 $f$ 的傅里叶级数的部分和：

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$n=1,2,\cdots.$$

如果周期为 $2l$ 的函数 $f$ 在区间$[-l,l]$上分段可微或者分段单调，那么这函数的傅里叶级数在任意一点$x_0$收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

如果 $f$ 是周期为 $2l$ 的偶函数，那么 $f$ 的傅里叶级数只含余弦部分：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad k=1,2,\cdots.$$

如果 $f$ 是周期为 $2l$ 的奇函数，那么 $f$ 的傅里叶级数只含正弦部分：

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,\qquad k=1,2,\cdots.$$

### 5.b 弦振动方程

我们来考察数学物理中的一个颇有名气的问题——弦的自由振动问题。这问题曾在十八世纪中叶到十九世纪初引起了数学界的一场大争论，促进了傅里叶级数理论的诞生和发展。这问题的实际模型是弦乐器上的一根绷紧的弦。这弦受到初始拨动之后就开始振动发声，在振动的过程中不再受到外力的作用（所以被称为"自由振动"）.下面，我们来推导弦的自由振动所满足的方程。

在平面上选定一个坐标系 $OXY$。为了下面叙述方便，我们认为 $OX$ 轴沿水平方向而 $OY$ 轴沿竖直方向。设弦 $OL$ 张紧在 $O(0,0)$ 和 $L(l,0)$ 两点之间。这弦受到一个在 $OXY$ 平面内的初始拨动之后，就在这平面内振动。我们设这弦是绝对柔顺的（没有弯曲应力，张力沿着这弦的切线方向），完全弹性的（弹性张力的大小 $H$ 与相对伸长成正比）和均匀的（线密度 $\rho$ 是常数）。我们只限于考察弦的微小横振动，即认为弦上每一点只在竖直方向上作微小的运动。于是，弦上每一点的纵坐标 $y$ 取决于该点的横

坐标 $x$ 与时间变量 $t$：

$$y=y(x,t).$$

因为弦的振动很微小，在振动过程中所增加的相对伸长可以忽略不计，所以可以认为弹性张力的数值$H$始终不变（等于平衡状态时弦的张力）。

考察这弦上介于点 $(x,y(x,t))$与点$(x+\Delta x,y(x+\Delta x,t))$之间的一小段．我们对这一小段写出牛顿第二定律的方程．因为在水平方向上没有运动，所以我们可以集中注意力于竖直方向．设在点$(x,y(x,t))$处，弦的切线与$OX$轴的夹角为$\alpha(x,t)$．则有

$$(5.2)\qquad H\sin\alpha(x+\Delta x,t)-H\sin\alpha(x,t)=\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

因为弦的振动很微小，可以认为

$$\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

于是方程(5.2)可以写成

$$H\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right)=\rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

这式两边除以$\Delta x$，然后再让$\Delta x\to 0$取极限，就得到

$$H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

弦的自由振动应满足这样的方程

$$(5.3)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中的 $c$ 是一个常数

$$c=\sqrt{\frac{H}{\rho}}.$$

弦振动的实际问题，还给方程(5.3)的解附加了一定的条件。因为弦的两端是固定的，所以解应该满足这样的边界条件：

$$y(0,t)=y(l,t)=0.$$

又因为弦的振动是由初始拨动所引起的。初始位置和初始速度决定了以后的振动状况，所以解应该由以下的初始条件所决定：

$$y(x,0)=\varphi(x),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\psi(x).$$

这里的函数 $\varphi$ 和 $\psi$ 在区间 $[0,l]$ 上有定义，并且满足条件

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=\psi(l)=0.$$

### 5.c 用分离变量法解弦振动问题

考察附加了边界条件与初始条件的弦振动问题：

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y(0,t)=y(l,t)=0, \\ y(x,0)=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

我们将用分离变量法求解这问题。

首先，暂不考虑边界条件与初始条件，我们先来探索弦振动方程(5.3)的以下形状的解：

$$(5.5)\qquad y(x,t)=X(x)T(t).$$

将(5.5)代入(5.3)就得到

$$X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t),$$

也就是

$$(5.6) \qquad \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

这式的左边只是变量 $t$ 的函数，右边只是变量 $x$ 的函数。要使 (5.6) 成为恒等式，必须等号两边的比值都是常数。我们设

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

于是得到

$$(5.7) \qquad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ T'' - \lambda c^2 T = 0. \end{cases}$$

为了使函数

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

满足边界条件

$$y(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$
$$y(l,t) = X(l)T(t) = 0,$$

还应要求

$$X(0) = X(l) = 0.$$

我们寻求满足以下条件的函数 $X(x)$：

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

分几种情形来讨论.

情形1 $\lambda = 0$。求解方程 $X'' = 0$，我们得到 $X(x) = \alpha x + \beta$。但要满足条件

$$X(0) = X(l) = 0,$$

只能是 $\alpha = \beta = 0$，$X(x) \equiv 0$。对这种情形，不存在非平凡解。

情形2 $\lambda > 0$。对这种情形，求解方程 $X'' - \lambda X = 0$，我们得到

$$X(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda} x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

但要满足条件

$$\begin{cases} X(0) = \alpha + \beta = 0, \\ X(l) = \alpha e^{\sqrt{\lambda} l} + \beta e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0, \end{cases}$$

只能有 $\alpha = \beta = 0$，即 $X(x) \equiv 0$，对这种情形，也不存在非平凡解。

情形3　$\lambda = -\mu^2 < 0$。对这情形，方程

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

的通解为

$$X(x) = \alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x.$$

但要满足

$$\begin{cases} X(0) = \alpha = 0, \\ X(l) = \alpha \cos \mu l + \beta \sin \mu l = 0, \end{cases}$$

只能是

$$\begin{cases} X(x) = \beta \sin \mu x, \\ \mu = \dfrac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

对应于这情形，方程

$$T'' + \mu^2 c^2 T = 0$$

的通解为

$$T(t) = A \cos c\mu t + B \sin c\mu t.$$

于是，问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y(0, t) = y(l, t) = 0, \\ y(x, t) = X(x) T(t) \end{cases}$$

的非平凡解只能是

$$y_n(x, t) = \left( A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

我们把上面得到的解迭加起来，希望和函数$y(x,t)$能满足初始条件。这就是说，要求

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

满足条件

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{cn\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x).$$

虽然函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$只在区间$[0,l]$上给出，但我们很容易把这两函数扩充为定义在区间$[-l,l]$上的奇函数，然后又可按周期$2l$把这两函数的定义域扩充到整个数轴上。扩充定义后的函数仍记为$\varphi(x)$和$\psi(x)$。作这两函数的傅里叶展开，就可求出解$y(x,t)$表示式中的系数$A_n$和$B_n$ $(n=1,2,\cdots)$。这样，通过试探，我们得到弦的自由振动问题(5.4)的以下形式的解

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,$$

$$B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

还需要验证所得的表示式确实是弦振动方程的解。为此，需要对$\varphi$和$\psi$加上一定的条件。我们不准备叙述细节，只是指出以下结果：如果$\varphi$是4次连续可微的，$\psi$是3次连续可微的，那么利用分部积分法容易得到：

$$A_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \qquad B_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

在这样的条件下，所得的 $v(x,t)$ 的级数表示式可以逐项微分 2 次，并且容易验证这表示式确实满足弦振动方程。

考察弦振动方程解的级数表示式，对于弦乐器的发声性能，可以得出一些有趣的结论。首先，我们注意到，弦的各谐振分量的圆频率为

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{l} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

其中

$$\omega_1 = \frac{c\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

对应着基音，其他的 $\omega_n (n = 2, 3, \cdots)$ 对应著泛音。基音的频率(基频)决定了音调的高低。基音与泛音的能量对比决定了音色。我们看到：

(1) 弦的振动频率与弦长成反比，因而较短的弦发出的声音较高；

(2) 弦的振动频率与张力的平方根成正比，因而张得越紧的弦发出的音越高；

(3) 弦的振动频率由弦长、弦的线密度以及弦所受的张力决定，因而拨弦的位置基本上不影响音调（但可能影响音色）。

## §6 傅里叶级数的复数形式，傅里叶积分简介

### 6.a 傅里叶级数的复数形式

在电工学中，通常把如下形状的量叫做复谐振动：

$$x = ce^{i\omega t} \tag{6.1}$$

这里的复数

$$c = re^{i\theta}$$

被称为复振幅，而实数 $\omega$ 被称为圆频率。复谐振动(6.1)可以写成

$$x = ce^{i\omega t} = r(\cos(\omega t + \theta) + i\sin(\omega t + \theta)).$$

我们看到，(6.1)的实部或虚部就是通常的谐振动。复振幅的模

$$|c| = r$$

就是通常的振幅。复振幅的幅角 $\theta$ 就是通常的初相。在交流电的应用中，常常需要计算频率相同但振幅与初相不同的若干量的迭加。这时采用复数形式就比采用三角函数形式方便。

周期函数的傅里叶级数展开，意味着把复杂的振动分解为谐振动分量之和。下面，我们设法把各谐振动分量写成复谐振动的形式。设 $f(t)$ 是周期为 $2l$ 的函数，它的傅里叶级数为

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

这里

$$\omega = \frac{\pi}{l}.$$

我们有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k - ib_k)(\cos k\omega t + i\sin k\omega t)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + ib_k)(\cos k\omega t - i\sin k\omega t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t},$$

这里

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \bar{c}_k,$$

$$k = 1, 2, \cdots.$$

这样得到的级数

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

被称为函数 $f$ 的复数形式的傅里叶级数，记为

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \tag{6.2}$$

其中的系数可按以下公式计算：

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,(\cos k\omega t - i\sin k\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

$$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos k\omega t+i\sin k\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{ik\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\omega=\frac{\pi}{l},\quad k=1,2,\cdots.$$

在本节中，我们把在区间$[-l,l]$上可积的实变复值函数的集合记为$\mathscr{R}[-l,l]$。如果在$\mathscr{R}[-l,l]$上定义厄米特(Hermite)内积如下：

$$(f,g)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t,$$

那么函数系

$$\{e^{ik\omega t}\mid k\in\mathbf{Z}\}$$

是规范正交的$\left(这里\ \omega=\frac{\pi}{l}\right)$。事实上，我们有

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}e^{im\omega t}\cdot e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{im\pi t}\cdot e^{-in\pi t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{i(m-n)\pi t}\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}1, & 如果 m=n,\\ 0, & 如果 m\neq n.\end{cases}$$

复数形式傅里叶级数的系数计算公式可以写成

$$c_k = (f(t), e^{ik\omega t}), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

在实际应用中，常常需要考察一个周期量 $f(t)$ 的各谐振分量的振幅分布情况。把 $f(t)$ 展开成傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t},$$

我们看到，对应于频率

$$\omega, 2\omega, \cdots, k\omega, \cdots,$$

相应的谐振分量的振幅为

$$|c_1|, |c_2|, \cdots, |c_k|, \cdots.$$

以横坐标表示频率，以纵坐标表示振幅，我们作出如图 20-6 那样的图示。

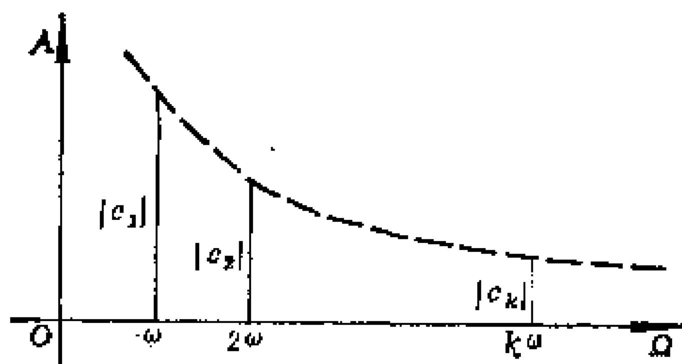



图 20-6

人们通常把象图 20-6 那样的图示叫做频谱图。频谱分析是研究各种实际振动问题的很有用的工具。

### 6.b 傅里叶积分简介

设 $f(t)$ 是定义于 R 上的一个非周期函数。截取这函数定义在 $[-l, l]$ 上的一段：

$$f_l(t) = f(t), \quad t \in [-l, l],$$

然后将这段函数按周期 $2l$ 延拓：

$$f_l(t+2pl)=f(t),\ \forall t\in[-l,l],p\in\mathbb{Z}.$$

这样，我们得到一个周期为 $2l$ 的函数 $f_l(t)$。如果函数 $f(t)$ 是连续的，并且在任何有限区间上分段可微或分段单调，那么函数 $f_l(t)$ 就可以展开成傅里叶级数

$$(6.3)\qquad f_l(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\omega_n t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\tau)e^{i\omega_n(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

这里

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

我们来考察，当 $l\longrightarrow+\infty$ 时，展式(6.3)的极限大致是怎样的。为此，我们把 $\omega$ 看作一个连续变化的实变量，而把 $\omega_n$ 看成 $\omega$ 的离散取值。注意到

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad \omega_{n-1}=\frac{(n-1)\pi}{l},$$

$$\frac{1}{2l}=\frac{1}{2\pi}(\omega_n-\omega_{n-1})=\frac{1}{2\pi}\Delta\omega_n,$$

我们可以把（6.3）式写成

$$(6.4)\qquad f_l(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l}f(\tau)e^{i\omega_n(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

当 $l\rightarrow+\infty$ 时，$\Delta\omega_n=\dfrac{\pi}{l}\rightarrow0$。可以设想（6.4）式的右端趋于如下的积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

于是得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau. \tag{6.5}$$

这里的讨论当然不能看成严格的证明。但通过这样的讨论，我们可以猜测，在适当的条件下，函数 $f$ 能有形状如（6.5）那样的积分表示。我们把（6.5）右端那样的积分表示叫做傅里叶积分。

人们常把（6.5）右端的两重积分拆开，分别写成

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{6.6}$$

和

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{6.7}$$

从函数$f(t)$到函数$\hat{f}(\omega)$的变换（6.6）被称为傅里叶变换。从函数$\hat{f}(\omega)$到函数$f(t)$的变换(6.7)被称为傅里叶逆变换。这里的情形可以与周期为 $2\pi$ 的函数的傅里叶级数作一类比。如果我们把周期为 $2\pi$ 的函数$f(t)$的傅里叶系数记为 $\hat{f}(n)$，那么

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)e^{-in\tau}\mathrm{d}\tau \quad (n\in\mathbb{Z}). \tag{6.8}$$

从函数 $f(t)$到它的傅里叶系数 $\hat{f}(n)$的计算公式(6.8) 可以看成"离散的傅里叶变换"，而傅里叶级数展式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{int} \tag{6.9}$$

可以看成"离散的傅里叶逆变换"。

上面关于傅里叶积分公式（6.5）的讨论只不过是形式主义

的推演。限于篇幅，我们略去严格的证明。这里仅仅指出：如果函数$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$连续可微并且绝对可积，那么以下的傅里叶积分公式成立：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

最后，我们简单地介绍傅里叶积分公式的其他形式。显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$+i\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这积分的实部是$\omega$的偶函数，而虚部是$\omega$的奇函数，因而

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

于是，傅里叶积分公式（6.5）可以写成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

# 第二十一章　含参变元的积分

我们来考察积分

$$\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \int_a^{+\infty} g(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

这些积分的被积函数，除了依赖于积分变元 $x$ 而外，还依赖于一个参变元 $t$。由这样的积分，定义了参变元 $t$ 的函数

$$\varphi(t)=\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

或

$$\psi(t)=\int_a^{+\infty} g(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

本章就来研究用这种方式定义的函数。

## §1　含参变元的常义积分

设 $D\subset\mathbb{R}$，函数 $f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 连续。本节考察这样一些含参变元的积分：

$$I(t)=\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

和

$$J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

首先考察对参变元的连续性。

**定理1** 如果函数 $f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 上一致连续（例如这样的情形：$D$ 是有界闭集，函数 $f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 上连续），那么由含参变元的积分所定义的函数

$$I(t)=\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在集合 $D$ 上连续。

**证明** 对于 $t,t_0\in D$，我们有

$$|I(t)-I(t_0)|=\left|\int_a^b (f(t,x)-f(t_0,x))\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b |f(t,x)-f(t_0,x)|\,\mathrm{d}x.$$

因为函数 $f(t,x)$ 在 $D\times[a,b]$ 上一致连续，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$t,t'\in D,\quad x,x'\in[a,b],$$
$$|t-t'|<\delta,\quad |x-x'|<\delta,$$

就有

$$|f(t,x)-f(t',x')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是，只要 $t,t_0\in D$，$|t-t_0|<\delta$，就有

$$|I(t)-I(t_0)|\leqslant\int_a^b |f(t,x)-f(t_0,x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这证明了定理。 □

**定理1′** 设函数 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续，则函数

$$J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$上连续。

如果函数$f(t,x)$满足上面所说的条件，函数$\varphi(t)$和$\psi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上连续，并且

$$a\leqslant \begin{matrix}\varphi(t)\\ \\ \psi(t)\end{matrix} \leqslant b, \quad \forall t\in[\alpha,\beta],$$

那么函数

$$K(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}f(t,x)\mathrm{d}x$$

在区间$[\alpha,\beta]$上连续。

**证明** 因为函数$f(t,x)$在$[\alpha,\beta]\times[a,b]$上连续，所以可设

$$|f(t,x)|\leqslant M, \quad \forall\ (t,x)\in[\alpha,\beta]\times[a,b].$$

我们有

$$J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{u_0}^{v_0}f(t,x)\mathrm{d}x+\int_u^{u_0}f(t,x)\mathrm{d}x+\int_{v_0}^{v}f(t,x)\mathrm{d}x,$$

$$|J(t,u,v)-J(t_0,u_0,v_0)|$$

$$\leqslant\left|\int_{u_0}^{v_0}(f(t,x)-f(t_0,x))\mathrm{d}x\right|$$

$$+\left|\int_u^{u_0}f(t,x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{v_0}^{v}f(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|f(t,x)-f(t_0,x)|\mathrm{d}x+M|u-u_0|+M|v-v_0|.$$

利用这不等式，读者可以毫无困难地完成定理第一部分的证明。如果把

$$K(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

看成复合函数：

$$K(t) = J(t, \varphi(t), \psi(t)),$$

那么定理第二部分的结论也立即可得到。 □

下面，我们考察含参变元的常义积分对参变元的可微性。

**定理2** 设函数 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上连续可微，则函数

$$I(t) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，并且

$$I'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{I(t+\tau)-I(t)}{\tau} \\
&= \int_a^b \frac{f(t+\tau,x)-f(t,x)}{\tau}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t+\theta\tau, x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因为函数 $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上是一致连续的，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$t', t\in[\alpha,\beta],\quad x', x\in[a,b],$$
$$|t'-t|<\delta,\quad |x'-x|<\delta,$$

就有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t',x')-\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是，只要 $0<|\tau|<\delta$，就有

$$\left|\frac{I(t+\tau)-I(t)}{\tau}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t+\theta\tau,x)-\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\mathrm{d}x<\varepsilon. \qquad \square$$

**定理2′** 设函数 $f(t,x)$ 在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 连续可微，则函数

$$J(t,u,v)=\int_u^v f(t,x)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]\times[a,b]\times[a,b]$ 连续可微，并且有

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,u,v)=\int_u^v\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial J}{\partial u}(t,u,v)=-f(t,u),$$

$$\frac{\partial J}{\partial v}(t,u,v)=f(t,v).$$

如果函数 $f(t,x)$ 满足上面所说的条件，函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，并且

$$a\leqslant\begin{matrix}\varphi(t)\\ \\ \psi(t)\end{matrix}\leqslant b,\quad \forall t\in[\alpha,\beta],$$

那么函数

$$K(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}f(t,x)\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，并且

$$K'(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}x$$

$$-f(t,\varphi(t))\varphi'(t)+f(t,\psi(t))\psi'(t).$$

**证明** 依据定理 2，我们求得

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,u,v)=\int_u^v\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

依据第九章§3的定理 2，又可求得

$$\frac{\partial J}{\partial u}(t,u,v)=-f(t,u),$$

$$\frac{\partial J}{\partial v}(t,u,v)=f(t,v).$$

从这些表示式可以看出：函数 $J(t,u,v)$是连续可微的．把$K(t)$看成复合函数：

$$K(t)=J(t,\varphi(t),\psi(t)),$$

利用复合函数微分的链式法则就得到

$$K'(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}x$$

$$-f(t,\varphi(t))\varphi'(t)+f(t,\psi(t))\psi'(t).\qquad\square$$

最后，依据重积分化为累次积分计算的有关结果，我们陈述对参变元积分的法则：

**定理3** 设函数 $f(t,x)$在$[\alpha,\beta]\times[a,b]$连续，并设

$$I(t)=\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\int_\alpha^\beta I(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

**证明** 在所给条件下，函数 $f(t,x)$ 在矩形 $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ 上的二重积分与两个累次积分都存在并且相等。我们有

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

这也就是

$$\int_\alpha^\beta I(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(t,x)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**例 1** 设 $b>a>0$，试计算积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

**解** 这积分可以写成

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y.$$

因为函数

$$f(x,y)=x^y$$

在 $[0,1]\times[a,b]$ 连续，所以两个积分号可以交换次序。我们得到

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

**例 2** 设 $r\in(-1,1)$，试计算积分

$$J(r)=\int_0^\pi\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\,\mathrm{d}\theta.$$

**解** 对任意取定的$r\in(-1,1)$，存在正数$b$，使得$|r|<b<1$。因为函数

$$f(r,\theta)=\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$$

在$[-b,b]\times[0,\pi]$上连续可微，所以$J(r)$可以在积分号下求导数：

$$J'(r)=\int_0^\pi \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}d\theta$$

$$=\int_0^\pi \frac{-2\cos\theta+2r}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta.$$

我们来计算这后一积分。对于$r=0$，显然有

$$J'(0)=\int_0^\pi(-2\cos\theta)d\theta=0.$$

对于$r\neq 0$的情形，计算得

$$J'(r)=\int_0^\pi \frac{-2\cos\theta+2r}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^\pi\left(1+\frac{r^2-1}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{r}\left[\theta-2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right)\right]\Bigg|_{\theta=0}^{\pi}=0$$

——这里，我们借助于“万能替换”$t=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$求出原函数，然后利用牛顿-莱布尼兹公式计算积分。

因为有

$$J'(r)=0,\quad \forall r\in(-1,1),$$

所以$J(r)$在区间$(-1,1)$上是一个常数：

$$J(r)=J(0)=0.$$

这样，我们证明了

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta=0,\quad \forall r\in(-1,1).$$

## §2 关于一致收敛性的讨论

在考察含参变元的广义积分之前，先对一致收敛性问题作较一般的讨论。

本节中，我们作以下这些一般性的假定：$D$和$E$是$\mathbb{R}$的子集合，$u_0$(或者$+\infty$)是$E$的聚点；函数$F(t,u)$在$D\times E$上有定义，并且对任何$t\in D$，存在有穷的极限

$$\lim_{u\to u_0} F(t,u)=\varphi(t)\in\mathbb{R}$$

(或者$\lim\limits_{u\to+\infty} F(t,u)=\varphi(t)\in\mathbb{R}$)。

**定义1** 如果对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$(或者$\Delta>0$)，使得只要

$$u\in E,\ 0<|u-u_0|<\delta$$
$$(\text{或者 } u\in E,\ u>\Delta),$$

就有

$$\sup_{t\in D}|F(t,u)-\varphi(t)|<\varepsilon,$$

那么我们就说：当$u$沿$E$趋于$u_0$(或者$+\infty$)时，函数$F(t,u)$对$t\in D$一致地收敛于极限函数$\varphi(t)$，记为

$$F(t,u)\rightrightarrows\varphi(t)$$
$$(t\in D,\ u\xrightarrow[E]{} u_0\ (\text{或者}+\infty)).$$

仿照第十九章§2定理2中的作法，我们可以证明：

**定理 1** 当 $u\to u_0$ 时（或者 $u\to+\infty$ 时），函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于某个极限函数的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（或者 $\Delta>0$），使得只要

$$u,u'\in E,\quad 0<|u-u_0|<\delta,\quad 0<|u'-u_0|<\delta,$$

$$(\text{或者 } u,u'\in E,\ u>\Delta,u'>\Delta,)$$

就有

$$|F(t,u)-F(t,u')|<\varepsilon,\quad \forall t\in D.$$

在第十九章中，我们曾讨论了函数序列的一致收敛性。其实，这里所介绍的更为一般的一致收敛性，仍可借助于函数序列的一致收敛性来加以考察的。

**定理 2** 当 $u\to u_0$ 时（或者 $u\to+\infty$ 时），函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$ 的充分必要条件是：对于 $E\setminus\{u_0\}$ 中满足条件 $u_n\to u_0$ 的任意序列 $\{u_n\}$（或者 $E$ 中满足条件 $u_n\to+\infty$ 的任意序列 $\{u_n\}$），相应的每一函数序列

$$\varphi_n(t)=F(t,u_n),\quad n=1,2,\cdots,$$

都在 $D$ 上一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$。

**证明** 条件的必要性很容易验证。下面，我们来证明条件的充分性（用反证法）。假如当 $u\to u_0$ 时（或者 $u\to+\infty$ 时），函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 不一致收敛于 $\varphi(t)$，那么对某个 $\varepsilon>0$，不管 $n\in\mathbb{N}$ 怎样大，总存在 $u_n\in E$，使得

$$0<|u_n-u_0|<\frac{1}{n}\ (\text{或者 } u_n>n),$$

$$\sup_{t\in D}|F(t,u_n)-\varphi(t)|\geqslant\varepsilon.$$

对这样得到的函数序列 $\{u_n\}$，虽然有

$$u_n\in E\setminus\{u_0\},\quad u_n\to u_0,$$

$$(\text{或者 } u_n\in E,\ u_n\to+\infty,)$$

但相应的函数序列

$$\varphi_n(t)=F(t,u_n)\ (n=1,2,\cdots)$$

却不能一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$。 □

下面，我们考察极限函数的分析性质。

**定理 3** 设 $D=[\alpha,\beta]$，$E\subset\mathbb{R}$，$u_0$ 是 $E$ 的一个聚点（或者 $+\infty$ 是 $E$ 的一个聚点），函数 $F(t,u)$ 在 $D\times E$ 上有定义，并且 $F(t,u)$ 对每一取定的 $u\in E$ 是 $t$ 的连续函数。如果当 $u\to u_0$ 时（或者当 $u\to+\infty$ 时），函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$，那么函数 $\varphi(t)$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上连续。

**证明** 任意选取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}$：

$$u_n\in E\setminus\{u_0\},\quad u_n\to u_0.$$

$$(\text{或者 } u_n\in E,\quad u_n\to+\infty.)$$

我们来考察函数序列

$$\varphi_n(t)=F(t,u_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

这连续函数序列在 $D$ 上一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$，因而 $\varphi(t)$ 在 $D$ 上连续。 □

**定理 4** 设 $D=[\alpha,\beta]$，$E\subset\mathbb{R}$，$u_0$ 是 $E$ 的一个聚点（或者 $+\infty$ 是 $E$ 的一个聚点），函数 $F(t,u)$ 在 $D\times E$ 上有定义。

如果

(1) $F(t,u)$ 对每一取定的 $u\in E$ 是变元 $t$ 的连续可微函数；

(2) 当 $u\to u_0$ 时（或者 $u\to+\infty$ 时），函数 $F(t,u)$ 收敛于极限函数 $\varphi(t)$；

(3) 当 $u\to u_0$ 时（或者 $u\to+\infty$ 时），函数 $\frac{\partial F}{\partial t}(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数 $\psi(t)$，

那么函数 $\varphi(t)$ 在 $D$ 上连续可微，并且有

$$\varphi'(t)=\psi(t).$$

**证明** 任意选取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}$：

$$u_n \in E \backslash \{u_0\}, \quad u_n \to u_0.$$

$$(\text{或者 } u_n \in E, \quad u_n \to +\infty.)$$

因为函数序列

$$\varphi_n(t) = F(t, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

收敛于极限函数 $\varphi(t)$，而函数序列

$$\varphi_n'(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $D$ 上一致地收敛于极限函数 $\psi(t)$，所以函数 $\varphi(t)$ 在 $D$ 上连续可微，并且

$$\varphi'(t) = \psi(t). \qquad \square$$

**定理 5** 设 $D = [\alpha, \beta]$，$E \subset \mathbb{R}$，$u_0$ 是 $E$ 的一个聚点（或者 $+\infty$ 是 $E$ 的一个聚点），函数 $F(t, u)$ 在 $D \times E$ 上有定义，并且 $F(t, u)$ 对每一取定的 $u \in E$ 是变元 $t$ 的连续函数。如果当 $u \to u_0$ 时（或者当 $u \to +\infty$ 时），函数 $F(t, u)$ 对 $t \in D$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$，那么就有

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ E}} \int_\alpha^\beta F(t, u)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\Bigg($或者

$$\lim_{\substack{u \to +\infty \\ E}} \int_\alpha^\beta F(t, u)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t. \Bigg)$$

**证明** 任意选取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}$：

$$u_n \in E \backslash \{u_0\}, \quad u_n \to u_0.$$

$$(\text{或者 } u_n \in E, \quad u_n \to +\infty.)$$

因为函数序列

$$\varphi_n(t) = F(t, u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $D = [\alpha, \beta]$ 上一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$，所以有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

也就是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta F(t,u_n)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为对任意满足前述条件的序列$\{u_n\}$，上式都成立，所以

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ E}}\int_\alpha^\beta F(t,u)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(或者

$$\lim_{\substack{u\to+\infty\\ E}}\int_\alpha^\beta F(t,u)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t.\ )$$

关于函数序列的狄尼定理有如下的推广

**定理6**（狄尼定理的推广） 设$D=[\alpha,\beta]$,$E\subset\mathbb{R}$,$u_0\in\mathbb{R}$或者$u_0=+\infty$是$E$的一个聚点，函数$F(t,u)$在$D\times E$上有定义并且当$u\to u_0$时收敛于极限函数$\varphi(t)$。

如果

(1) 对每一取定的$t\in D$，函数$F(t,u)$关于变元$u$单调上升；

(2) 对每一取定的$u\in E$，函数$F(t,u)$关于变元$t$连续；

(3) 极限函数$\varphi(t)$在$D$上连续，

那么，当$u\to u_0$时，函数$F(t,u)$对$t\in D$一致地收敛于$\varphi(t)$.

**证明** 因为$u_0$是$E$的一个聚点，所以至少在$u_0$的一侧含有$E$的无穷多个点。如果在$u_0$的左侧含有$E$的无穷多个点，那么就可以在$E$中选取一个严格单调上升的点列$\{u_n\}$，使得

$$\lim u_n=u_0,$$

我们来考察函数序列

$$\varphi_n(t)=F(t,u_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

显然每一函数 $\varphi_n(t)$ 都在闭区间 $D=[\alpha,\beta]$ 连续，并且序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 单调收敛于连续函数 $\varphi(t)$。由关于函数序列的狄尼定理可知：序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $D=[\alpha,\beta]$ 上一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$。

于是，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$0\leqslant\varphi(t)-\varphi_N(t)<\varepsilon,\quad \forall t\in D.$$

这就是说，对于 $\Delta=u_N$ 有

$$0\leqslant\varphi(t)-F(t,\Delta)<\varepsilon,\quad \forall t\in D.$$

因为函数 $F(t,u)$ 关于变元 $u$ 单调上升，所以只要

$$u\in E,\quad \Delta<u<u_0,$$

就有

$$0\leqslant\varphi(t)-F(t,u)\leqslant\varphi(t)-F(t,\Delta)<\varepsilon,$$
$$\forall t\in D.$$

这证明了：当 $u\in E$，$u<u_0,u\to u_0$ 时，函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$。如果在 $u_0$ 的右侧也有 $E$ 的无穷多个点，那么同样可以证明：当 $u\in E$，$u>u_0$，$u\to u_0$ 时，函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(t)$。这样，我们完成了定理的证明。 □

## §3 含参变元的广义积分

本节考察含参变元的广义积分，包括含参变元的无穷限积分

$$\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x,\quad \int_{-\infty}^{c}g(t,x)\mathrm{d}x,$$

以及含参变元的瑕积分

$$\int_a^b h(t,x)\,\mathrm{d}x \quad (a \text{ 或 } b \text{ 是瑕点})。$$

因为对这几种情形的讨论，没有实质性的差别，所以我们将集中注意力于上限为 $+\infty$ 的积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x。$$

### 3.a 含参变元广义积分的一致收敛性

设函数 $f(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续，并设对每一取定的 $t\in D$，以下的积分收敛：

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x。$$

我们来考察"部分"积分

$$F(t,u)=\int_c^u f(t,x)\,\mathrm{d}x, \quad u>c。$$

如果当 $u\to+\infty$ 时，函数 $F(t,u)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于极限函数

$$\varphi(t)=\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x,$$

那么我们就说：含参变元的广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

对 $t\in D$ 一致收敛。

这定义可以更具体地表述如下：如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>c$，使得只要是 $u>\Delta$，就有

$$\left|\int_c^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x - \int_c^u f(t,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_u^{+\infty} f(t,x)dx\right|$$

$$< \varepsilon, \quad \forall t \in D,$$

那么我们就说含参变元的广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t \in D$ 一致收敛。

上节所得的结果，都可应用于这里的情形。例如，由上节的定理 1 可得：

**定理 1**（一致收敛的柯西原理） 设函数 $f(t,x)$ 在 $D \times [c, +\infty)$ 连续，则含参变元的积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$$

一致收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\Delta > c$，使得只要是 $u' > u > \Delta$，就有

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \forall t \in D.$$

由上节的定理 2 可得：

**定理 2** 设函数 $f(t,x)$ 在 $D \times [c, +\infty)$ 连续，则含参变元的积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$$

一致收敛的充分必要条件是：对于满足条件

$$u_n > c, \qquad u_n \to +\infty$$

的任意序列 $\{u_n\}$，相应的函数序列

$$\varphi_n(t)=\int_c^{b_n} f(t,x)\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$$

一致收敛。

由上节的定理 3 可得：

**定理 3** 设函数 $f(t,x)$ 在

$$[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$$

连续，并设含参变元的积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

对 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则函数

$$\varphi(t)=\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 连续。

由上节的定理 4 可得：

**定理 4** 设函数 $f(t,x)$ 在

$$[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$$

连续可微，积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

对任意 $t\in[\alpha,\beta]$ 收敛，而积分

$$\int_c^{+\infty} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}x$$

对 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则函数

$$\varphi(t)=\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 连续可微，并且

$$\varphi'(t)=\int_c^{+\infty}\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

由上节的定理5可得

**定理5** 设函数 $f(t,x)$ 在

$$[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$$

连续，并且积分

$$\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t\in[\alpha,\beta]$一致收敛，则函数

$$\varphi(t)=\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$$

在区间$[\alpha,\beta]$上的积分可以按下式计算：

$$\int_\alpha^\beta\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_c^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

这结果可以写成

$$\int_\alpha^\beta\mathrm{d}t\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(t,x)\mathrm{d}t.$$

由上节定理6可得

**定理6** 设函数 $f(t,x)$ 在

$$[\alpha,\beta]\times[c,+\infty)$$

连续并且非负(即$\geqslant0$)；并设积分

$$\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$$

对任意的 $t\in[\alpha,\beta]$收敛。如果函数

$$\varphi(t)=\int_c^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$$

在闭区间$[\alpha,\beta]$连续，那么积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

对 $t\in[\alpha,\beta]$一致收敛。

### 3.b 关于两个广义积分运算交换次序的问题

在定理 5 中，已经讨论了一个常义积分运算与一个广义积分运算交换次序的问题。——在广义积分一致收敛的条件下，我们得到

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

本段将进一步考察两个广义积分运算交换次序的问题。

**定理 7** 设函数 $f(x,y)$在

$$[a,+\infty)\times[b,+\infty)$$

连续并且非负(即$\geqslant 0$)．如果

(1) 任给 $A>a$，积分

$$\int_b^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

对 $x\in[a,A]$一致收敛，

(2) 任给 $B>b$，积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

对 $y\in[b,B]$一致收敛，

那么就有

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_b^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

——这式的含义是：如果等号一端的积分收敛，那么另一端的积分也收敛，并且二者相等。

**证明** 设(3.1)式左端的积分收敛。对任意的 $B>b$，因为

$$\int_b^B f(x,y)\,dy \leqslant \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_b^B dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx &= \int_a^{+\infty} dx\int_b^B f(x,y)\,dy \\ &\leqslant \int_a^{+\infty} dx\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy < +\infty.\end{aligned}$$

由此可知，(3.1)式右端的积分也收敛，并且

$$\int_b^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} dx\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

因为已经证明了(3.1)式右端的积分的收敛性，所以又可用类似的办法证明

$$\int_a^{+\infty} dx\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy \leqslant \int_b^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

这样，我们证明了

$$\int_a^{+\infty} dx\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_b^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx. \qquad \square$$

定理 7 的以下推论，对于实际应用来说，是特别方便的。

**推论** 设函数 $f(x,y)$ 在

$$[a,+\infty)\times[b,+\infty)$$

连续并且非负．如果

$$\varphi(x)=\int_{b}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

和

$$\psi(y)=\int_{a}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

分别是 $x\in[a,+\infty)$ 和 $y\in[b,+\infty)$ 的连续函数，那么就有

$$\int_{a}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{b}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{b}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{a}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

**证明** 根据本节的定理 6，可以断定这里的情形满足定理 7 的全部条件． □

定理 7 要求被积函数不改变符号，因此在应用中颇受限制．下面，我们考察更一般的情形．

两个广义积分运算交换次序，相当于"在广义积分号下取极限"．在进一步讨论之前，需要对这问题作一些说明．

首先，我们指出：与"在常义积分号下取极限"的情形不同，为了在广义积分号下对函数序列取极限，单凭一致收敛的条件是不够的．请看下面的例子．

**例 1** 考察函数序列

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{n^2}, & \text{如果 } x\in[0,n),\\[2ex] \dfrac{2n-x}{n^2}, & \text{如果 } x\in[n,2n),\\[2ex] 0 & \text{如果 } x\in[2n,+\infty),\end{cases}$$

$$n=1,2,\cdots.$$

因为

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \forall x \in [0, +\infty),$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

所以函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$[0, +\infty)$一致收敛于极限函数0。但显然有

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = 1 \neq 0.$$

对于含参变元的函数，也有类似的情形：

**例 2** 考察定义于$[0, +\infty) \times [1, +\infty)$的函数

$$F(x, v) = \begin{cases} \dfrac{x}{v^2}, & \text{如果 } x < v, \\ \dfrac{2v - x}{v^2}, & \text{如果 } v \leqslant x < 2v, \\ 0, & \text{如果 } x \geqslant 2v. \end{cases}$$

显然有

$$|F(x, v)| \leqslant \frac{1}{v}, \qquad \forall (x, v) \in [0, +\infty) \times [1, +\infty).$$

由此可知

$$F(x, v) \rightrightarrows 0 \quad (x \in [0, +\infty), \ v \to +\infty).$$

但却有

$$\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(x, v) \, dx = 1 \neq 0.$$

关于在广义积分号下取极限的充分条件，我们有下面的引理：

**引理** 假设

(1) 函数$F(x, v)$在$[a, +\infty) \times [b, +\infty)$连续，

(2) 对任意的 $x\in[a,+\infty)$，存在有穷的极限

$$\lim_{v\to+\infty} F(x,v)=\varphi(x),$$

并且对任意给定的 $A>a$，当 $v\to+\infty$ 时，函数 $F(x,v)$ 关于 $x\in[a,A]$ 一致地收敛于极限函数 $\varphi(x)$，即

$$F(x,v)\rightrightarrows\varphi(x)\quad(x\in[a,A],\ v\to+\infty),$$

(3) 函数 $F(x,v)$ 能被一个与 $v$ 无关的可积函数"控制"——这就是说：存在一个定义于 $[a,+\infty)$ 的非负函数 $G(x)$，使得

$$\int_a^{+\infty}G(x)\,dx<+\infty$$

和

$$|F(x,v)|\leqslant G(x),\qquad\forall x\in[a,+\infty),\ v\in[b,+\infty).$$

在上面所说的条件下，我们有

$$\lim_{v\to+\infty}\int_a^{+\infty}F(x,v)\,dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx,$$

也就是

$$\lim_{v\to+\infty}\int_a^{+\infty}F(x,v)\,dx=\int_a^{+\infty}(\lim_{v\to+\infty}F(x,v))\,dx.$$

**证明** 首先，依据条件(2)和条件(3)，我们得到

$$|\varphi(x)|\leqslant G(x),\qquad\forall x\in[a,+\infty).$$

其次，由条件(3)可知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$，使得

$$\int_A^{+\infty}G(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是有

$$\left|\int_a^{+\infty}F(x,v)\,dx-\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^A|F(x,v)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_A^{+\infty}|F(x,v)|\mathrm{d}x+\int_A^{+\infty}|\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^A|F(x,v)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_A^{+\infty}G(x)\mathrm{d}x+\int_A^{+\infty}G(x)\mathrm{d}x$$

$$<\int_a^A|F(x,v)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\varepsilon.$$

因为当$v\to+\infty$时，函数$F(x,v)$关于$x\in[a,A]$一致地收敛于极限函数$\varphi(x)$(条件(2))，所以存在$\Delta>b$，使得只要是$v>\Delta$，就有

$$\int_a^A|F(x,v)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，只要$v>\Delta$，就有

$$\left|\int_a^{+\infty}F(x,v)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.\qquad\square$$

**定理8** 设函数$f(x,y)$在

$$[a,+\infty)\times[b,+\infty)$$

连续．如果

(1) 任给$A>a$，积分

$$\int_b^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

对$x\in[a,A]$一致收敛，

(2) 任给$B>b$，积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

对 $y\in[b,B]$一致收敛，

(3) $$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y<+\infty$$

或者

$$\int_b^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

那么就有

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_b^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

**证明** 为确定起见，设有

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y<+\infty.$$

我们记

$$F(x,v)=\int_b^v f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\varphi(x)=\int_b^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$G(x)=\int_b^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y.$$

这样定义的 $F(x,v)$，$\varphi(x)$和 $G(x)$满足上面引理中的全部条件，因而有

$$\lim_{v\to+\infty}\int_a^{+\infty}F(x,v)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

容易看出

$$\lim_{v\to+\infty}\int_a^{+\infty}F(x,v)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{v\to+\infty}\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^v f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{v\to+\infty}\int_b^v\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_b^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

我们证明了

$$\int_b^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.\qquad\square$$

### 3.c 关于广义积分一致收敛性的一些常用的判别法

与函数级数的情形类似，对于广义积分的一致收敛性，我们也有

**维尔斯特拉斯判别法** 设函数 $f(t,x)$在 $D\times[c,+\infty)$连续，函数 $g(x)$在$[c,+\infty)$连续，并且

$$|f(t,x)|\leqslant g(x),\quad\forall t\in D,\quad x\in[c,+\infty).$$

如果广义积分

$$\int_c^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

收敛，那么含参变元的广义积分

$$\int_c^{+\infty}f(t,x)dx$$

对 $t\in D$ 一致收敛。

**证明** 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>c$，使得只要是 $u'>u>\Delta$，就有

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_u^{u'} |f(t,x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_u^{u'} g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon, \quad \forall t\in D. \qquad \square$$

关于条件收敛积分的一致收敛性，我们有狄里克莱判别法和阿贝尔判别法。

**狄里克莱判别法** 设函数 $f(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 在 $D\times[c,+\infty)$ 连续。如果

(1) 对任意取定的 $t\in D$，函数 $f(t,x)$ 关于 $x$ 单调，并且当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(t,x)$ 对 $t\in D$ 一致地收敛于 0，

(2) 部分积分

$$\int_c^u g(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t$ 和 $u$ 一致地有界，即存在 $M>0$，使得

$$\left|\int_c^u g(t,x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M, \quad \forall t\in D, \ u\geqslant c,$$

那么积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t\in D$ 一致收敛。

**证明** 对于 $u'>u>c$，利用第二中值定理来估计以下积分，我们得到

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left| f(t,u)\int_u^{\xi} g(t,x)\mathrm{d}x \right.$$

$$\left. + f(t,u')\int_{\xi}^{u'} g(t,x)\mathrm{d}x \right|$$

$$\leqslant 2M(|f(t,u)| + |f(t,u')|).$$

因为当 $x \to +\infty$时，函数 $f(t,x)$对 $t\in D$ 一致地收敛于0，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>c$，使得只要是$u'>u>\Delta$，就有

$$|f(t,u)|<\frac{\varepsilon}{4M}, \quad |f(t,u')|<\frac{\varepsilon}{4M},$$

$$\forall t\in D.$$

于是，只要 $u'>u>\Delta$，就有

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$<2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon,$$

$$\forall t\in D。$$ □

**阿贝尔判别法** 设函数 $f(t,x)$和 $g(t,x)$在 $D\times[c,+\infty)$连续。如果

(1) 对每一取定的 $t\in D$，函数 $f(t,x)$关于 $x$ 单调，并且

$$|f(t,x)|\leqslant K, \quad \forall t\in D, \quad x\in[c,+\infty),$$

(2) 积分

$$\int_c^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t\in D$ 一致收敛，

那么积分

$$\int_c^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$$

对 $t\in D$ 一致收敛.

**证明** 对于 $u'>u>c$，我们有

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|f(t,u)\int_u^{\xi} g(t,x)\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+f(t,u')\int_{\xi}^{u'} g(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant K\left(\left|\int_u^{\xi} g(t,x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\xi}^{u'} g(t,x)\mathrm{d}x\right|\right).$$

对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>c$，使得只要是 $v'>v>\Delta$，就有

$$\left|\int_v^{v'} g(t,x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2K},\quad \forall t\in D.$$

于是，对于 $u'>u>\Lambda$，就有

$$\left|\int_u^{u'} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$<K\left(\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2K}\right)=\varepsilon,$$

$$\forall t\in D. \qquad \square$$

**例 3** 设函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续并且广义可积，求证

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 我们看到：

(1) 对于取定的$\alpha\in[0,\eta]$，函数

$$f(\alpha,x)=e^{-\alpha x}$$

关于$x$单调，并且显然有

$$|f(\alpha,x)|\leqslant 1,\quad \forall\alpha\in[0,\eta],\ x\in[0,+\infty),$$

(2) 积分

$$\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

收敛。

根据阿贝尔判别法，我们断定积分

$$\int_0^{+\infty}f(\alpha,x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}g(x)\mathrm{d}x$$

对$\alpha\in[0,\eta]$一致收敛，因而函数

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}g(x)\mathrm{d}x$$

在$[0,\eta]$连续。于是有

$$\lim_{\alpha\to0+}\varphi(\alpha)=\varphi(0),$$

这也就是

$$\lim_{\alpha\to0+}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

### 3.d 计算广义积分的例题

为了计算广义积分，常利用含参变元的积分的有关定理。请看下面的例子。

**例 4** 设$b>a>0$，试计算积分

(1) $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x,$$

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx.$$

**解** 我们有：

(1) $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy$$

$$=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

这里交换积分的次序是合理的，因为积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$$

对$y\in[a,b]$一致收敛(可用维尔斯特拉斯判别法判定)。

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b\frac{\sin xy}{x}dy$$

$$=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx.$$

这里交换积分次序是允许的，因为积分

(3.2) $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$$

对 $y\in[a,b]$一致收敛(可用狄里克莱判别法判定)。在(3.2)中作变元替换 $x=\frac{u}{y}$，就得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$

我们最后求得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

**例 5** 试计算以下几个积分：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x dx \quad (\alpha>0)$,

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha>0)$,

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$.

**解** (1) 可以直接利用牛顿-莱布尼兹公式计算：

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

为了计算 (2)，我们记

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

对$\beta$求导得

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

——这里在积分号下求导是允许的，因为求导后的积分对 $\beta$ 是一

致收敛的（维尔斯特拉斯判别法）。求解微分方程

$$I'(\beta)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

可得

$$I(\beta)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}+C.$$

因为$I(0)=0$，所以$C=0$。我们得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

为了计算（3），可以在上式中让$\alpha\to0+$取极限，这样得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{如果}\beta>0,\\ 0, & \text{如果}\beta=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{如果}\beta<0.\end{cases}$$

——我们用到这样的事实：因为积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin\beta x dx$$

对$\alpha\geqslant0$一致收敛（狄里克莱判别法），这积分是参变元$\alpha\geqslant0$的连续函数，所以有

$$\lim_{\alpha\to0+}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

这例子中的积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx,$$

不允许在积分号下对参数$\beta$求导。否则就要得到发散的积分

$$\int_0^{+\infty}\cos\beta x\mathrm{d}x.$$

为了克服这一困难，我们引入一个“收敛因子”

$$e^{-\alpha x}\quad(\alpha>0),$$

先来考察这样的积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x.$$

引入“收敛因子”是计算广义积分时常常用到的一种方法。

**例6** 试计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta x\mathrm{d}x.$$

**解** 我们记

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta x\mathrm{d}x.$$

对参数$\beta$求导得到

$$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin2\beta x\mathrm{d}x.$$

用分部积分法计算得

$$\begin{aligned}I'(\beta)&=e^{-x^2}\sin2\beta x\Big|_0^{+\infty}\\&\quad-2\beta\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\beta x\,\mathrm{d}x\\&=-2\beta I(\beta).\end{aligned}$$

通过解微分方程

$$I'(\beta) = -2\beta I(\beta),$$

我们得到

$$I(\beta) = Ce^{-\beta^2}.$$

因为（参看第十三章§5中的例8）

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

我们最后得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\beta x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}.$$

**例 7** 试计算拉普拉斯（Laplace）积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

**解** 我们记

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x,$$

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

对于$\beta \geqslant b > 0$，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

是一致收敛的。事实上，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)=\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2},$$

所以函数

$$\frac{x}{a^2+x^2}$$

对于$x>a$是单调下降的，并且显然有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}=0.$$

另一方面，容易看出

$$\left|\int_0^u \sin\beta x\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{b},\quad \forall\,\beta\geqslant b,u\geqslant 0.$$

根据狄里克莱判别法，我们断定积分（3.3）是一致收敛的。下面计算 $I(\beta)$ 的 1 阶和 2 阶导数。在积分号下求导一次，我们得到

$$I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

再在积分号下求导是不允许的。我们采取以下办法克服这一困难。已经知道（见例 5）

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

将（3.4）式与（3.5）式相加就得到

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=a^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(a^2+x^2)}\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

将（3.6）式对$\beta$求导，我们得到

$$I''(\beta)=a^2I(\beta). \tag{3.7}$$

这微分方程的通解是

$$I = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta}.$$

因为

$$|I| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} I = 0,$$

所以

$$C_1 = 0.$$

再让$\beta \to 0+$，我们求得

$$\lim_{\beta \to 0+} I = \lim_{\beta \to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

因而

$$C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

我们最后求得

$$I = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta},$$

$$J = -\frac{dI}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}.$$

## §4 $\Gamma$ 函数与 $B$ 函数

“阶乘”本来只对非负整数有定义：

$$0! = 1, \quad n! = [(n-1)!] \cdot n.$$

借助于含参变元的积分定义的 $\Gamma$ 函数，可以看成“阶乘”的推广.

**定义1** 含参变元的广义积分

$$(4.1) \qquad \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

定义了参变元 $x$ 的一个函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

我们把这一函数叫做 $\Gamma$ 函数（Gamma函数）。

**引理1** $\Gamma$函数在（0，+∞）有定义并且连续。

**证明** 因为（4.1）中的积分对 $x>0$ 收敛，所以 $\Gamma$ 函数对 $x>0$ 有定义。又因为（4.1）中的积分对 $x\in[\delta,+\infty)$一致收敛（$\delta$可以是任意小的正数），所以$\Gamma$函数对$x>0$连续。 □

**引理2** 设$a<A$，函数$f(t)$和$g(t)$在$[a,A]$连续，并且

$$f(t)\geqslant 0,\quad g(t)\geqslant 0,\quad \forall\, t\in[a,A].$$

如果

$$\lambda>0,\quad \mu>0,\quad \lambda+\mu=1,$$

那么

$$\int_a^A (f(t))^{\lambda}(g(t))^{\mu}\mathrm{d}t \leqslant\left(\int_a^A f(t)\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_a^A g(t)\mathrm{d}t\right)^{\mu}.$$

**证明** 对于$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，$\lambda>0$，$\mu>0$，$\lambda+\mu=1$，我们有这样的不等式

$$u^{\lambda}v^{\mu}\leqslant\lambda u+\mu v.$$

事实上，如果记$\varphi(x)=-\ln x$，那么就有

$$\varphi''(x)=\frac{1}{x^2}>0.$$

我们看到，在区间（0，+∞）上，$\varphi(x)$ 是凸函数，因而对 $u>0$和$v>0$有

$$\varphi(\lambda u+\mu v)\leqslant\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v).$$

这也就是

$$u^{\lambda}v^{\mu}\leqslant\lambda u+\mu v.$$

对于 $u=0$，$v>0$，或者 $u>0$，$v=0$，或者 $u=v=0$ 的情形，上面的不等式显然也成立。

我们记

$$F=\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t,\quad G=\int_a^A g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\tilde{f}(t)=\frac{1}{F}f(t),\quad \tilde{g}(t)=\frac{1}{G}g(t).$$

于是有

$$(\tilde{f}(t))^{\lambda}(\tilde{g}(t))^{\mu}\leqslant\lambda\tilde{f}(t)+\mu\tilde{g}(t).$$

上式两边从 $a$ 到 $A$ 积分就得到

$$\begin{aligned}&\int_a^A(\tilde{f}(t))^{\lambda}(\tilde{g}(t))^{\mu}\mathrm{d}t\\&\qquad\leqslant\lambda\int_a^A\tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^A\tilde{g}(t)\,\mathrm{d}t\\&\qquad=\lambda+\mu=1.\end{aligned}$$

由此得到

$$\int_a^A(f(t))^{\lambda}(g(t))^{\mu}\mathrm{d}t\leqslant F^{\lambda}G^{\mu}.$$

这就是

$$\begin{aligned}&\int_a^A(f(t))^{\lambda}(g(t))^{\mu}\mathrm{d}t\\&\qquad\leqslant\left(\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_a^A g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\mu}.\end{aligned}\qquad\square$$

下面的定理描述了$\Gamma$函数的基本特征。

**定理1** $\Gamma$函数具有以下基本性质：

(1) $\Gamma(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$,

$$\Gamma(1)=1;$$

(2) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$;

(3) $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是凸函数。

**证明** 性质 (1) 可以从 $\Gamma$ 函数的定义直接看出。性质 (2) 可利用分部积分法验证：

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=-t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x).$$

为了证明性质(3)，我们将利用引理2中的不等式。对于$A>a>0$，$\lambda>0$，$\mu>0$，$\lambda+\mu=1$，$x>0$，$y>0$，应有

$$\int_a^A t^{\lambda x+\mu y-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\int_a^A\left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\lambda}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\mu}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_a^A t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\mu}.$$

在上式中让$a\to0+$，$A\to+\infty$，就得到

$$\int_0^{+\infty}t^{\lambda x+\mu y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\lambda}\left(\int_0^{+\infty}t^{y-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\mu},$$

即

$$\Gamma(\lambda x+\mu y)\leqslant(\Gamma(x))^{\lambda}(\Gamma(y))^{\mu}.$$

由此又得到

$$\ln\Gamma(\lambda x+\mu y)\leqslant\lambda\ln\Gamma(x)+\mu\ln\Gamma(y).\qquad\square$$

**推论** $\Gamma(n+1)=n!$，$\forall n\in\mathbb{N}$.

波尔(H.Bohr)与莫勒儒普(J.Mollerup)发现，定理 1 中的三

条性质完全决定了 $\Gamma$ 函数。

**定理 2** (Bohr–Mollerup) 如果定义于 $(0,+\infty)$ 的函数 $f$ 满足以下条件：

(1) $f(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, $f(1)=1$,

(2) $f(x+1)=xf(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$,

(3) $\ln f(x)$ 是凸函数,

那么必有

$$f(x)=\Gamma(x),\qquad \forall x\in(0,+\infty).$$

**证明** 我们记

$$\varphi(x)=\ln f(x).$$

由条件 (1) 和 (2) 可得：

$$f(n+1)=n!\ ,$$

$$\varphi(n+1)=\ln(n!),\tag{4.2}$$

$$f(x+n+1)=(x+n)\cdots(x+1)xf(x),$$

$$\varphi(x+n+1)=\varphi(x)+\ln[x(x+1)\cdots(x+n)].\tag{4.3}$$

因为 $\varphi(x)$ 是凸函数 (条件(3)), 所以对于 $x\in(0,1]$ 应有

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{(n+1)-n}\leqslant\frac{\varphi(x+n+1)-\varphi(n+1)}{(x+n+1)-(n+1)}$$

$$\leqslant\frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{(n+2)-(n+1)},$$

也就是

$$\ln n\leqslant\frac{\varphi(x+n+1)-\ln(n!)}{x}\leqslant\ln(n+1).$$

由此得到

$$x\ln n+\ln(n!)\leqslant\varphi(x+n+1)\leqslant x\ln(n+1)+\ln(n!).\tag{4.4}$$

由 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\ln\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant\varphi(x)\leqslant\ln\frac{(n+1)^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由此又得到

$$0\leqslant\varphi(x)-\ln\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

我们证明了

$$\varphi(x)=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

(4.5)
$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$
$$\forall x\in(0,1].$$

因为（4.5）与条件（2）完全决定了函数 $f$，所以我们实际上已经证明了：满足条件（1），（2）和（3）的函数是唯一的。因而

$$f(x)=\Gamma(x),\quad\forall x>0.\qquad\square$$

**推论** 对于$x>0$，我们有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

**证明** 我们记

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

在定理 2 的证明中，已经得到

(4.6) $$\Gamma(x)=g(x),\qquad\forall x\in(0,1].$$

另一方面，由 $g$ 的定义容易看出

(4.7) $$g(x+1)=xg(x),\qquad\forall x>0.$$

事实上，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{x+1}\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}$$

$$= x \lim_{n \to +\infty} \left[ \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \left( \frac{n}{x+n+1} \right) \right]$$

$$= x \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由（4.6）和（4.7）就可得到

$$\Gamma(x) = g(x), \quad \forall x > 0. \quad \square$$

引理 3　对于$x \in (0,1)$，我们有

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

**证明**　我们记

$$\psi(x) = \ln\left[ \pi \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \right] = \ln \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

显然有

$$\psi(0) = \ln \pi.$$

容易求得

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

回忆起第二十章§3例 4 中的展式

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

我们得到

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{x} = \psi'(x), \quad \ln \frac{\sin \pi x}{x} = \psi(x) + C.$$

让 $x \to 0+$，又可确定

$$C = 0.$$

我们证明了：

$$\ln\frac{\sin\pi x}{x}=\psi(x),\quad \frac{\sin\pi x}{x}=\pi\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

$$\forall x\in(0,1).\qquad\square$$

**推论** 我们有

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

**证明** 在上面引理中已经得到

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad \forall x\in(0,1).\tag{4.8}$$

为讨论方便，引入记号

$$h(x)=\pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

我们指出函数 $h$ 的重要性质：

(1) $h(0)=h(1)=0$,

(2) $h(-x)=-h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$,

(3) $h(x+1)=-h(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

性质(1)和(2)是显然的。为了证明性质(3)，我们利用以下恒等式

$$\pi(x+1)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{(x+1)^2}{n^2}\right)$$

$$=\pi(x+1)\frac{\prod_{n=1}^{N}[(n+1+x)(n-1-x)]}{(N!)^2}$$

$$=-\pi x\frac{\prod_{n=1}^{N}(n+x)\prod_{n=1}^{N}(n-x)}{(N!)^2}\cdot\frac{N+1+x}{N-x}$$

$$= -\pi x\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdot\frac{N+1+x}{N-x}.$$

在上式中让 $N\to+\infty$就 得到

$$h(x+1) = -h(x).$$

根据（4.8）式与函数 $h$ 的性质（1），（2)和（3），我们断定

$$\sin\pi x = h(x),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

这就是

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

由此又得到

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \forall x\in\mathbf{R}.\qquad\square$$

**定理3**（$\Gamma$ 函数的余元公式）

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},\quad \forall x\in(0,1).$$

**证明** 我们有

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

$$\Gamma(1-x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1-x}\cdot n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1-x}}{(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)(n+1-x)},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{x(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{n}{n+1-x}\right]$$

$$=\frac{1}{x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi x}.\qquad\square$$

**引理4** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

**证明** 由余元公式可得：

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\pi,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\qquad\square$$

以下公式是勒让得（Legendre）最先提出的，所以又叫做勒让得公式。

**定理 4**（$\Gamma$ 函数的倍元公式）

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right),\qquad\forall x>0.$$

**证明** 这公式可以写成

$$\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right),\qquad\forall x>0. \tag{4.9}$$

我们记

$$f(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

为了证明等式（4.9），只须验证：函数 $f$ 满足定理 2 中的三条件。

（1） 显然有 $f(x)>0$， $\forall x>0$， 并且

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)=1.$$

（2）

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{2^{x}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\\&=\frac{2^{x}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)\\&=\frac{2^{x}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\\&=xf(x).\end{aligned}$$

（3） 因为

$$\begin{aligned}\ln f(x)=&(x-1)\ln 2-\ln\sqrt{\pi}\\&+\ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right),\end{aligned}$$

而 $(x-1)\ln 2-\ln\sqrt{\pi}$， $\ln\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ 和 $\ln\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 都是凸函数， 所以 $\ln f(x)$ 也是凸函数。 □

与 $\Gamma$ 函数密切相关联的一个二元函数是 $B$ 函数（Beta函数）。

**定义2** 含参变元 $x$ 和 $y$ 的积分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{4.10}$$

定义了一个二元函数

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

我们把这函数叫做 $B$ 函数。

引理5 函数 $B(x,y)$对任何 $x>0$，$y>0$有定义，并且满足以下条件：

(1) $B(x,y)>0$，$\forall\, x,y>0$，并且

$$B(1,y)=\frac{1}{y},$$

(2) $(Bx+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$，

(3) 对于取定的 $y>0$，$\ln B(x,y)$是变元 $x$ 的凸函数。

**证明** (1) 由$B(x,y)$的定义可知

$$B(x,y)>0,\quad \forall\, x,y>0,$$

并且有

$$B(1,y)=\int_0^1 (1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{y}.$$

(2) 利用分部积分法可得

$$\begin{aligned}
&B(x+1,y)\\
&=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x(1-t)^{x+y-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x}(1-t)^{x+y}\Big|_{t\to 0+}^{t\to 1-}$$

$$+\frac{x}{x+y}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}(1-t)^{x+y}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{x+y}B(x,y).$$

(3) 对于$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$ 和 $x_1>0$，$x_2>0$，$y>0$，我们有

$$B(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)$$

$$=\int_0^1 t^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\left[t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\right]^{\lambda_1}\cdot\left[t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\right]^{\lambda_2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\right)^{\lambda_1}\left(\int_0^1 t^{x_2-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\right)^{\lambda_2}$$

$$=(B(x_1,y))^{\lambda_1}(B(x_2,y))^{\lambda_2}.$$

由此可知$\ln B(x,y)$是变元$x$的凸函数。 □

$B$ 函数可以用 $\Gamma$ 函数来表示：

**定理5** 对于$x>0,y>0$，我们有

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

**证明** 对任意取定的$y>0$，考察这样一个函数

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+y)B(x,y)}{\Gamma(y)}.$$

下面证明这函数满足定理 2 中的三个条件。

(1) 显然有$f(x)>0$, $\forall x>0$,并且

$$f(1)=\frac{\Gamma(1+y)B(1,y)}{\Gamma(y)}=\frac{y\Gamma(y)\cdot\frac{1}{y}}{\Gamma(y)}=1.$$

(2)
$$f(x+1)=\frac{\Gamma(x+y+1)B(x+1,y)}{\Gamma(y)}$$

$$=\frac{(x+y)\Gamma(x+y)\cdot\frac{x}{x+y}B(x,y)}{\Gamma(y)}$$

$$=xf(x).$$

(3) 对于取定的 $y>0$,因为$\ln\Gamma(x+y)$和 $\ln B(x,y)$ 都是变元 $x$ 的凸函数,所以

$$\ln f(x)=\ln\Gamma(x+y)+\ln B(x,y)-\ln\Gamma(y)$$

也是变元 $x$ 的凸函数。

这样,我们证明了:$f(x)=\Gamma(x)$。 □

**推论** 我们有

(1) $B(x,y)=B(y,x)$, $\quad\forall x>0, y>0$;

(2) $B(x,1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$, $\quad\forall x\in(0,1)$.

**例 1** 试证明

(1) $$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u,$$

(2) $$B(x,y)=\int_0^1\frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u.$$

**证明**　在下面的积分中作变元替换

$$t=\frac{u}{1+u}=1-\frac{1}{1+u}$$

就得到：

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^1\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u.$$

在最后一个积分中作变元替换

$$u=\frac{1}{v}$$

又得到：

$$\int_1^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\mathrm{d}v.$$

这样，我们证明了

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^1\frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u.$$

**例2**　试计算积分

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cdot\cos^{\beta}x\mathrm{d}x\quad(\alpha>-1,\beta>-1).$$

**解**　作变元替换 $t=\sin^2 x$ 就得到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

对于$\alpha=4$，$\beta=6$的情形，我们得到

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cdot \cos^6 x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}.$$

**例3** 试计算积分

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^\alpha dx \quad (|\alpha|<1).$$

**解** 我们有

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^\alpha dx = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cdot \cos^{-\alpha} x dx$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

**例 4** 设$a>-1$,试计算积分

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a x\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{\pi/2}\cos^a x\mathrm{d}x.$$

**解** 利用例 2 中的结果,我们得到

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^a x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+2}{2}\right)}.$$

**例 5** 最后,我们指出,半径为$r$的$n$维球体的体积$V_n(r)$可以表示为:

$$V_n(r)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}r^n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n.$$

事实上,在第十三章§4的例6中,我们已经求得

$$V_n(r)=a_n r^n,$$

式中的系数$a_n$满足递推关系

$$a_1=2,$$

$$a_n=2a_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t,$$

$$n=2,3,\cdots.$$

在上面的例 4 中,我们又已求得

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

利用这些关系，借助于数学归纳法，就可证明

$$a_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

## §5 含参变元的积分与函数逼近问题

借助于含参变元的积分，我们将给出维尔斯特拉斯逼近定理一个新的证明，并推广这方法证明多元函数的维尔斯特拉斯逼近定理。

首先，我们定义一列函数

$$D_n(t) = \begin{cases} c_n^{-1}(1-t^2)^n, & \text{如果} |t| \leqslant 1, \\ 0, & \text{如果} |t| > 1, \end{cases}$$

这里

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

**引理 1** 这样定义的函数序列$\{D_n(t)\}$满足以下条件：

(Ⅰ) 对任何$n \in \mathbf{N}$，函数$D_n(t)$在$\mathbf{R}$上连续并且非负(即$\geqslant 0$)；

(Ⅱ) $\int_{-\infty}^{+\infty} D_n(t)\mathrm{d}t = 1, \forall n \in \mathbf{N}$；

(Ⅲ) 对任意取定的$\delta > 0$都有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|\geq\delta} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

**证明** 条件(Ⅰ)和(Ⅱ)显然得到满足。下面验证条件(Ⅲ)。对于任意取定的 $\delta\in(0,1)$，我们有

$$c_n = \int_{|t|\leq 1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t$$

$$\geq\int_{|t|\leq\delta/2}(1-t^2)^n\mathrm{d}t\geq\delta\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n,$$

$$\int_{\delta\leq|t|\leq 1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t\leq 2(1-\delta^2)^n,$$

$$\int_{|t|\geq\delta} D_n(t)\,\mathrm{d}t = c_n^{-1}\int_{\delta\leq|t|\leq 1}(1-t^2)^n\mathrm{d}t$$

$$\leq\frac{2}{\delta}\left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)^n.$$

由此可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|\geq\delta} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0. \qquad \square$$

**引理 2** 设函数 $f$ 在$\mathbb{R}$的任何闭区间上（常义）可积，并设

$$|f(x)|\leq M,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

我们构作这样一个函数序列：

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,D_n(u-x)\,\mathrm{d}u,$$

$$n = 1, 2, \cdots.$$

如果 $f$ 在闭区间 $[a-h,b+h]$ 上是连续的 $(h>0)$，那么函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$。

**证明** 因为函数 $f$ 在闭区间 $[a-h,b+h]$ 一致连续，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,h)$，使得只要

$$x',x\in[a-h,b+h],|x'-x|<\delta,\text{就有}$$

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对于 $x\in[a,b]$，就有

$$\begin{aligned}
&|f_n(x)-f(x)|\\
&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)D_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)-f(x)|D_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{|t|<\delta}|f(x+t)-f(x)|D_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_{|t|\geqslant\delta}|f(x+t)-f(x)|D_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2M\int_{|t|\geqslant\delta}D_n(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

根据关于 $\{D_n(t)\}$ 的条件(Ⅲ)，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得只要 $n>N$，就有

$$2M\int_{|t|\geqslant\delta}D_n(t)\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，只要 $n>N$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \quad \forall x\in[a,b].$$ □

**定理 1** 在闭区间上连续的任何函数 $f$，可以在这闭区间上用多项式一致逼近。

**证明** 必要时作适当的平移与比例变换，可设这闭区间是 $[-\rho,\rho]\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 我们按以下方式扩充函数 $f$ 的定义，规定

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} 0, & \text{如果 } x<-\frac{1}{2}, \\ \frac{1+2x}{1-2\rho}f(-\rho), & \text{如果 } x\in\left[-\frac{1}{2},-\rho\right], \\ f(x), & \text{如果 } x\in[-\rho,\rho], \\ \frac{1-2x}{1-2\rho}f(\rho), & \text{如果 } x\in\left(\rho,\frac{1}{2}\right], \\ 0, & \text{如果 } x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

这样扩充的函数在 $(-\infty,+\infty)$ 连续并且有界。以下，为了书写简便，约定把这扩充了的函数 $\tilde{f}(x)$ 仍然记为 $f(x)$。

我们构作函数序列

$$f_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)D_n(u-x)\,du$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(u)D_n(u-x)\,du,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

根据引理 2，这函数序列在闭区间 $[-\rho,\rho]$ 上一致收敛于 $f(x)$。下面，我们指出：每一个 $f_n(x)$ 都是多项式。事实上，对于

$$|u| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |x| \leqslant \rho < \frac{1}{2},$$

我们有

$$|u-x| < 1,$$
$$D_n(u-x) = c_n^{-1}(1-(u-x)^2)^n.$$

因而

$$(5.1) \qquad f_n(x) = c_n^{-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)(1-(u-x)^2)^n \mathrm{d}u.$$

显然有

$$(1-(u-x)^2)^n = g_0(u) + g_1(u)x + \cdots + g_{2n}(u)x^{2n}.$$

将这展式代入 (5.1)就得到

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n}x^{2n},$$

这里

$$a_i = c_n^{-1}\int_{-1/2}^{1/2} f(u) g_i(u) \mathrm{d}u,$$
$$i = 0, 1, \cdots, 2n.$$

这样，我们完成了维尔斯特拉斯逼近定理的证明。 □

推广上面的做法，可以证明关于$m$元函数的维尔斯特拉斯逼近定理。为此，我们先来定义这样一列$m$元函数

$$D_n(t) = \begin{cases} c_n^{-1}(1-\|t\|^2)^n, & \text{如果}\|t\| \leqslant 1, \\ 0, & \text{如果}\|t\| > 1, \end{cases}$$

这里

$$t = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^m,$$
$$\|t\| = \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_m^2},$$
$$c_n = \int_{\|t\| \leqslant 1} (1-\|t\|^2)^n \mathrm{d}t$$
$$n = 1, 2, \cdots.$$

引理 3　这样定义的（$m$元）函数序列$\{D_n(t)\}$满足以下条件：

（Ⅰ）对任何$n\in\mathbb{N}$，函数$D_n(t)$在$\mathbb{R}^m$上连续并且非负（即$\geqslant 0$）；

（Ⅱ）$\int_{\mathbb{R}^m} D_n(t)\mathrm{d}t=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$；

（Ⅲ）对任意取定的$\delta>0$都有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\|t\|\geqslant\delta} D_n(t)\mathrm{d}t=0.$$

**证明**　条件（Ⅰ）和（Ⅱ）显然得到满足。下面验证条件（Ⅲ）。我们约定以$V_m(\rho)$表示半径为$\rho$的$m$维球体的体积。对于任意取定的$\delta\in(0,1)$，显然有

$$\begin{aligned}c_n&=\int_{\|t\|<1}(1-\|t\|^2)^n\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_{\|t\|\leqslant\delta/2}(1-\|t\|^2)^n\mathrm{d}t\\&\geqslant\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n V_m\left(\frac{\delta}{2}\right)\\&=\left(\frac{\delta}{2}\right)^m\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n V_m(1),\end{aligned}$$

$$\int_{\delta<\|t\|<1}(1-\|t\|^2)^n\mathrm{d}t\leqslant(1-\delta^2)^n V_m(1),$$

$$\begin{aligned}\int_{\|t\|\geqslant\delta} D_n(t)\mathrm{d}t&=c_n^{-1}\int_{\delta<\|t\|<1}(1-\|t\|^2)^n\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\frac{2}{\delta}\right)^m\left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}}\right)^n.\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\|t\|\geq\delta} D_n(t)\mathrm{d}t=0. \qquad \square$$

为了叙述方便，我们引入这样的记号：

$$B_\rho=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|\leqslant\rho\}.$$

仿照引理2，很容易证明下面的引理。

**引理4** 设函数 $f$ 在 $\mathbb{R}^m$ 的任何闭球体上可积，并设

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \forall x\in\mathbb{R}^m.$$

我们构作这样一个（$m$元）函数序列

$$f_n(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x+t)D_n(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\mathbb{R}^m} f(u)D_n(u-x)\mathrm{d}u,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

如果 $f$ 在闭球体 $B_{\rho+\eta}$ 上是连续的($\eta>0$)，那么函数序列$\{f_n(x)\}$在闭球体 $B_\rho$ 上一致收敛于函数 $f(x)$。

下面，我们陈述并证明关于$m$元函数的维尔斯特拉斯逼近定理。

**定理2** 在$m$维闭球体 $B_\rho$ 上连续的任何函数 $f$，可以在这闭球体上用多项式一致逼近。

**证明** 必要时作适当的比例变换，可设

$$\rho<\frac{1}{2}.$$

我们按以下方式扩充函数 $f$ 的定义，规定

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果}\|x\|\leqslant\rho, \\ \dfrac{1-2\|x\|}{1-2\rho}f\left(\dfrac{\rho x}{\|x\|}\right), & \text{如果 }\rho<\|x\|\leqslant\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{如果}\|x\|>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

这样扩充的函数在$\mathbf{R}^m$上连续并且有界。以下，为了书写简便，约定把这扩充了的函数$\tilde{f}(x)$仍然记为$f(x)$。

我们构作($m$元)函数序列

$$\begin{aligned} f_n(x)&=\int_{\mathbf{R}^m} f(u)D_n(u-x)\,du \\ &=\int_{\|u\|\leqslant 1/2} f(u)D_n(u-x)\,du, \\ & n=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

根据引理 4，这函数序列在闭球体$B_\rho$上一致地收敛于$f(x)$。很容易看出：这函数序列的每一项$f_n(x)$都是$m$元多项式。 □

# 后　记

教师总想多写点、多讲点，但受时间限制，免不了要忍痛割爱．用三学期时间教这三册书，当然是紧一点．书中已经有一部分材料列入了附录．实际讲课时还可以根据实际情况作更多的剪裁省略．例如，书中介绍重积分的变元替换公式时，先叙述定理，接着用一大堆例题帮助学生掌握运用，最后才是定理的证明．如果时间不够，就可以把最后的证明略去不讲（好的学生自己会去看的）．

微积分的创立是人类思想史上光辉灿烂的成就．为了让学生在学习过程中就能感受到这一点，就必须讲一些重要的应用．记得自己当学生的时候，就曾产生过这样的疑惑：花费这么多的时间和精力学微积分，学完之后究竟能做哪些事？好象除了求极值、求面积体积而外，就什么也不会了．笔者写这套书，就是想或多或少改变一下这种状况．书中有些内容在后继课程中还要深入讨论，讲的时候当然可以简略一些．

从编写教学改革实验讲义到整理改写成书，前后花费了五年最宝贵的时间．笔者做这件事可以说是“知其不可为而为之”．明知是“吃力不讨好”，却硬着头皮做了，也许是因为想起了自己的学生时代．每当学到某处，因为教材上说得不清楚，害得学生花费很多时间最后才弄明白“原来不过如此”的时候，总是希望有一本更可心的书．当了教师之后才知道，要想把书写得清楚明白，绝对不是一件容易的事情．有时候费了半天口舌，本想把事情说得更清楚一点，反而更让人糊涂了．写这书已经费了这么多事，究竟效果如何，也只能留给学生们与教师们去评论了．《红

楼梦》作者的诗句道出了每一位用心血写书的人的感慨："都云作者痴，谁解其中味"！

写书总有许多事情麻烦别人。除了在本书第一册前言中提到的那些领导和同事们而外，笔者还应向本书责任编辑刘勇同志表示特别的感谢。他的高度责任心和工作效率才使得本书得以早日与读者见面。

还有一件事促成了本书第三册付印前最后一次重大的改动。为此笔者应感谢自己的同学王铎博士。他在北京大学完成博士后阶段的研究工作之后到清华大学任教。我们曾经有几次长谈，讨论微积分的教学问题。有一次谈到空间区域中曲线积分与路径无关的条件。传统的教材在这里引入了"曲面单连通"的概念。这种单连通性要求区域中任何一条分段连续可微的简单闭曲线都能作为某一块分片连续可微的可定向曲面的边界。王铎尖锐地批评道："学生根本不可能检验一个区域是否曲面单连通的，他们做题时唯一的办法就是根本不验证条件。"传统教材引入"曲面单连通"这一概念是因为讨论中要用到斯托克斯公式。为了可用公式就加上公式所要求的条件，根本没有考虑学生做题时怎样去检验这条件。任意的一条分段连续可微的"简单"闭曲线，其形状可以是千奇百怪的，在空间中甚至可以打出各种漂亮而复杂的纽结来（这样的纽结可以有无穷多种不同的类型）。面对如此复杂的情形，学生又怎样去判定是否任何一条这样的曲线都可作为某类曲面的边界呢？作为基础课，虽然不可能处处作出很严密的论证，但至少要有一个形象直观的判别办法，或者告诉学生一个能据以判定的准则。出于以上这些考虑，笔者对传统教材关于这问题的讲法作了根本性的更改，敬请读者予以指正。

笔者

1990年岁末 于北京大学蔚秀园

楼梦》作者的诗句道出了每一位用心血写书的人的感慨："都云作者痴，谁解其中味"！

写书总有许多事情麻烦别人。除了在本书第一册前言中提到的那些领导和同事们而外，笔者还应向本书责任编辑刘勇同志表示特别的感谢。他的高度责任心和工作效率才使得本书得以早日与读者见面。

还有一件事促成了本书第三册付印前最后一次重大的改动。为此笔者应感谢自己的同学王铎博士。他在北京大学完成博士后阶段的研究工作之后到清华大学任教。我们曾经有几次长谈，讨论微积分的教学问题。有一次谈到空间区域中曲线积分与路径无关的条件。传统的教材在这里引入了"曲面单连通"的概念。这种单连通性要求区域中任何一条分段连续可微的简单闭曲线都能作为某一块分片连续可微的可定向曲面的边界。王铎尖锐地批评道："学生根本不可能检验一个区域是否曲面单连通的，他们做题时唯一的办法就是根本不验证条件。"传统教材引入"曲面单连通"这一概念是因为讨论中要用到斯托克斯公式。为了可用公式就加上公式所要求的条件，根本没有考虑学生做题时怎样去检验这条件。任意的一条分段连续可微的"简单"闭曲线，其形状可以是千奇百怪的，在空间中甚至可以打出各种漂亮而复杂的纽结来（这样的纽结可以有无穷多种不同的类型）。面对如此复杂的情形，学生又怎样去判定是否任何一条这样的曲线都可作为某类曲面的边界呢？作为基础课，虽然不可能处处作出很严密的论证，但至少要有一个形象直观的判别办法，或者告诉学生一个能据以判定的准则。出于以上这些考虑，笔者对传统教材关于这问题的讲法作了根本性的更改，敬请读者予以指正。

笔者

1990年岁末　于北京大学蔚秀园